Wykład drugi, trzeci ...

PRZESTRZENIE WEKTOROWE Z NORMĄ

Normą w przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{R}$ nazywamy odwzorowanie

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

spełniające następujące warunki:

- $\| x \| \geqslant 0$,
- $\| x \| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
- $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ dla $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ dla $x, y \in V$.

Przestrzeń z normą nazywamy przestrzenią *unormowaną*. W przestrzeni unormowanej możemy zdefiniowac metrykę d wzorem

$$d(x, y) = \| x - y \| .$$

Sprawdzamy nierównośc trójkąta:

$$d(x, z) = \| x - y + y - z \| \leqslant \| x - y \| + \| y - z \| = d(x, y) + d(y, z)$$

Pozostałe aksjomaty metryki są spełnione w sposób oczywisty. Mówi się, że metryka d jest metryką normową. Wykażemy teraz stwierdzenie pokazujące zgodnośc metryki ze strukturą algebraiczną przestrzeni wektorowej. Przypomnijmy najpierw, że dla dwóch podzbiorów $A, B \subset V$ sumą algebraiczną $A + B$ nazywamy obraz podzbioru $A \times B \subset V \times V$ względem relacji dodawania w V. Innymi słowy,

$$A + B = \{x \in V : x = v + w, \quad v \in A, \ w \in B\}.$$

Podobnie, dla $r \in \mathbb{R}$

$$rA = \{x \in V : x = rv, \quad v \in A\}.$$

Twierdzenie 1. *Dla kul w przestrzeni z metryką normową mamy:*

(1) $K(x, r) = x + K(0, r)$,
(2) $K(x, r)$ *jest zbiorem wypukłym,*
(3) $K(0, r) = rK(0, 1)$,
(4) *kula domknięta* $\bar{K}(x, r)$ *jest domknięciem kuli otwartej* $K(x, r)$.

DOWÓD.

(1) $d(x, y) = \| x - y \| = \| (x - y) - 0 \| = d(x - y, 0)$. Stąd

$$d(x, y) \leqslant r \text{ jest równoważne } d(x - y, 0) \leqslant r$$

i w konsekwencji mamy równoważności

$$y \in K(x, r) \iff y - x \in K(0, r) \iff y \in K(0, r) + x.$$

(2) Mamy pokazac, że jeśli $y, y' \in K(x, r)$, to $[y, y'] \subset K(x, r)$, tzn. dla $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ również $\lambda y + (1 - \lambda) y' \in K(x, r)$. Istotnie,

$$\| \lambda y + (1 - \lambda) y' - x \| \leqslant \| \lambda (y - x) \| + \| (1 - \lambda)(y' - x) \| =$$
$$= \lambda \| y - x \| + (1 - \lambda) \| y' - x \| < \lambda r + (1 - \lambda) r = r.$$

(3) Oczywisty jest ciąg równoważności

$$\| x \| < r \iff \frac{1}{r} \| x \| < 1 \iff \left\| \frac{x}{r} \right\| < 1 \iff \frac{x}{r} \in K(0, 1).$$

(4) Wiadomo, że $K(x, r) \subset \bar{K}(x, r)$. Niech teraz $y \in \bar{K}(x, r) \setminus K(x, r)$, to znaczy $\| y - x \| = r$. Połóżmy $y_n = y - \dfrac{1}{n}(y - x)$. Mamy

$$\| y_n - x \| = \left\| (1 - \frac{1}{n})(y - x) \right\| = (1 - \frac{1}{n}) \| y - x \| = (1 - \frac{1}{n}) r < r,$$

czyli $y_n \in K(x,r)$. Z drugiej strony

$$d(y,y_n) = \|\, y_n - y \,\| = \frac{1}{n} \|\, y - x \,\|\,,$$

więc $y_n \to y$ i y należy do domknięcia $K(0,r)$.

Niech teraz $y \in \overline{K(x,r)}$, tzn. istnieje ciąg $y_n \to y$, gdzie $y_n \in K(x,r)$. Mamy

$$\|\, y \,\| \leqslant \|\, y - y_n \,\| + \|\, y_n \,\|$$

dla każdego n, czyli $\|\, y \,\| \leqslant r + \epsilon$ dla każdego $\epsilon > 0$. Stąd $\|\, y \,\| \leqslant r$. $\square$

Jeżeli mamy dwie przestrzenie unormowane $(V, \|\cdot\|)$ oraz $(W, \|\cdot\|')$, to w iloczynie kartezjańskim wprowadzamy normy na trzy różne sposoby:

$$\|\,(v,w)\,\|_{\square} = \max(\|\, v \,\|\,, \|\, w \,\|'),$$
$$\|\,(v,w)\,\|_{\diamond} = \|\, v \,\| + \|\, w \,\|'\,,$$
$$\|\,(v,w)\,\|_{\circ} = \sqrt{\|\, v \,\|^2 + \|\, w \,\|'^2}.$$

Pokażemy, normy te nie różnią się w sposób istotny.

Podobnie, jak w przypadku metryk pokazujemy, że normy $\|\,(v,w)\,\|_{\square}\,$, $\|\,(v,w)\,\|_{\diamond}\,$, $\|\,(v,w)\,\|_{\circ}$ są równoważne.

Jesteśmy teraz przygotowani do innego stwierdzenia o zgodności normy ze strukturą przestrzeni wektorowej.

Twierdzenie 2. *Norma i działania algebraiczne w przestrzeni wektorowej unormowanej są odwzorowaniami ciągłymi.*

DOWÓD.

Ciągłośc normy wynika z oszacowania

$$|\,\|\, x \,\| - \|\, y \,\|\,| \leqslant \|\, x - y \,\| = d(x,y).$$

Dowód tej nierówności jest analogiczny do dowodu podobnej nierówności dla liczb zespolonych:

$$\|\, x \,\| \leqslant \|\, x - y \,\| + \|\, y \,\|\,, \quad \|\, y \,\| \leqslant \|\, y - x \,\| + \|\, x \,\|\,,$$

a stąd

$$\|\, x \,\| - \|\, y \,\| \leqslant \|\, x - y \,\|\,, \quad \|\, y \,\| - \|\, x \,\| \leqslant \|\, x - y \,\|\,.$$

Ciągłośc dodawania $+\colon V \times V \to V$ wynika z oszacowania

$$\|\,(x + x') - (y + y')\,\| \leqslant \|\, x - y \,\| + \|\, x' - y' \,\| = \|\,(x,x') - (y,y')\,\|_{\diamond}\,.$$

Ciągłośc mnożenia $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ wynika z oszacowania

$$\|\, \lambda x - \lambda' x' \,\| \leqslant |\lambda - \lambda'|\,\|\, x \,\| + |\lambda'|\,\|\, x - x' \,\|\,. \ \square$$

PRZESTRZENIE WYMIARU SKOŃCZONEGO

Twierdzenie 3. *W przestrzeni wymiaru skończonego wszystkie normy są równoważne.*

DOWÓD.

Niech $e = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą w przestrzeni unormowanej $(V, \|\cdot\|)$ wymiaru skończonego. Baza zadaje izomorfizm przestrzeni wektorowych

$$T\colon \mathbb{R}^n \to V\colon (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^1 e_1 + \dots + x^n e_n.$$

Zdefiniujmy nową normę $\|\cdot\|_e$ na V wzorem

$$\left\|\, x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \,\right\|_e = |x^1| + \dots + |x^n| = \left\|\,(x^1, \dots, x^n)\,\right\|_{\diamond}.$$

Odwzorowanie $T\colon \mathbb{R}^n \to (V, \|\cdot\|_e)$ jest oczywiście ciągłe.

Mamy oszacowanie wynikające z nierówności trójkąta

$$\|\, x \,\| = \left\|\, x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \,\right\| \leqslant |x^1|\,\|\, e_1 \,\| + \dots + |x^n|\,\|\, e_n \,\|$$
$$\leqslant K(|x^1| + \dots + |x^n|) = K\,\|\, x \,\|_e\,,$$

gdzie $K = \max_i \| e_i \|$. Z oszacowania tego wnioskujemy że norma $\| \cdot \|$ jest funkcją ciągłą na przestrzeni unormowanej $(V, \| \cdot \|_e)$:

(1)
$$| \| x \| - \| y \| | \leqslant \| x - y \| \leqslant K \| x - y \|_e .$$

Zbiór opisany równaniem $|x^1| + \cdots + |x^n| = 1$ jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}^n$, więc zwarty. Odwzorowanie T przeprowadza ten zbiór na sferę jednostkową (zbiór wszystkich wektorów o normie 1) w $(V, \| \cdot \|_e)$. T jest odwzorowaniem ciągłym, więc sfera ta jest zwarta jako obraz zbioru zwartego. Zatem funkcja ciągła $\| \cdot \|$ osiąga na niej swój kres dolny α, $\alpha = \| x_0 \| > 0$ dla pewnego x_0, gdzie $\| x_0 \|_e = 1$. Dla każdego wektora $x \in V$ mamy więc

(2)
$$\left\| \frac{x}{\| x \|_e} \right\| \geqslant \alpha, \text{ co jest równoważne nierówności } \frac{1}{\alpha} \| x \| \geqslant \| x \|_e .$$

Nierówności 1 i 2 oznaczają, że normy $\| \cdot \|$ i $\| \cdot \|_e$ są równoważne. Zatem dowolne dwie normy też są równoważne. □

Wnioski.

(1) W przestrzeni wymiaru skończonego kula domknięta jest zwarta.
(2) W przestrzeni wymiaru skończonego zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy, kiedy jest domknięty i ograniczony.
(3) Przestrzeń wymiaru skończonego jest zupełna.

Istotnie, ze stwierdzenia wynika istnienie liniowego homeomorfizmu przestrzeni wymiaru skończonego i $\mathbb{R}^n$. Liniowy homeomorfizm przeprowadza zbiory domknięte w domknięte, zwarte w zwarte i ograniczone w ograniczone. Podobnie ciągi zbieżne w ciągi zbieżne, a ciągi Cauchy'ego w ciągi Cauchy'ego. Własności o których mowa we wniosku wynikają z odpowiednich własności przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Własnośc (1) i równoważna jej własnośc (2) w powyższych wnioskach charakteryzują skończenie-wymiarowe przestrzenie z normą.

Twierdzenie 4. (Riesza) *Jeżeli kula domknięta w przestrzeni z normą jest zwarta, to przestrzeń jest wymiaru skończonego.*

ODWZOROWANIA LINIOWE I CIĄGŁE

Niech $(V, \| \cdot \|)$ i $(W, \| \cdot \|')$ będą przestrzeniami unormowanymi i niech $F \colon V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym to znaczy takim, że dla dowolnych wektorów v_1, v_2 i dowolnych liczb λ^1, λ^2 mamy
$$F(\lambda^1 v_1 + \lambda^2 v_2) = \lambda^1 F(v_1) + \lambda^2 F(v_2).$$

Twierdzenie 5. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *F przeprowadza ciągi zbieżne w ograniczone.*
(2) *F jest ciągłe w zerze (zero może byc zastąpione przez dowolny punkt).*
(3) *Istnieje liczba $a > 0$ taka, że $\| Fx \|' \leqslant a \| x \|$ dla wszystkich $x \in V$.*
(4) *F jest odwzorowaniem ciągłym.*

DOWÓD.
(1)⇒(2) Weźmy ciąg (v_n) zbieżny do zera i zdefiniujmy nowy ciąg (w_n) wzorem
$$w_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } v_n = 0, \\ \dfrac{v_n}{\sqrt{\| v_n \|}} & \text{gdy } v_n \neq 0 \end{cases} .$$

Mamy $\| w_n \| = \sqrt{\| v_n \|} \to 0$, więc ciąg (w_n) jest zbieżny do zera. Jego obraz $(F(w_n))$ jest zatem ciągiem ograniczonym:
$$\| F(w_{n_k}) \|' < a$$
dla pewnego a i stąd
$$\| F(v_n) \|' = \left\| F(\sqrt{\| v_n \|} w_n) \right\|' = \sqrt{\| v_n \|} \, \| F(w_n) \|' \leqslant a \sqrt{\| v_n \|},$$

czyli ciąg $F(v_n)$ jest zbieżny do zera. F jest odwzorowaniem ciągłym w zerze.

(2)⇒(3) Ciągłośc w zerze oznacza, że

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \text{ taka, że } \quad \| \, v \, \| \leqslant \delta \Rightarrow \| \, Fv \, \|' \leqslant \epsilon.$$

Mamy stąd dla dowolnego $v \neq 0$ i $a = \dfrac{\epsilon}{\delta}$

$$\| \, Fv \, \|' = \left\| F\left(\frac{\delta v}{\| \, v \, \|}\right) \right\|' \frac{\| \, v \, \|}{\delta} \leqslant \frac{\epsilon}{\delta} \| \, v \, \| = a \, \| \, v \, \| \, .$$

(3)⇒(4) Niech $v_n \to v$. Mamy

$$\| \, Fv_n - Fv \, \|' = \| \, F(v_n - v) \, \|' \leqslant a \, \| \, v_n - v \, \| \to 0$$

(4)⇒(1) Jeżeli odwzorowanie F jest ciągłe, to przeprowadza ciągi zbieżne w ciągi zbieżne, a te są ograniczone. □

Twierdzenie 6. Odwzorowanie liniowe $F\colon V \to W$ przestrzeni unormowanych nazywamy *ograniczonym*, jeżeli istnieje $a > 0$ takie, że $\forall v \in V$ mamy $\| \, Fv \, \|' \leqslant a \, \| \, v \, \|$

Równoważnośc punktów (3) i (4) w Stwierdzeniu 5 można zatem sformułowac tak: *odwzorowanie liniowe między przestrzeniami unormowanymi jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczone.*

Z definicji liniowego odwzorowania ograniczonego dostajemy natychmiast

Twierdzenie 7. *Odwzorowanie liniowe przestrzeni z normą jest ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy obraz każdego zbioru ograniczonego jest ograniczony.*

Twierdzenie 8. *Każde odwzorowanie liniowe przestrzeni skończenie-wymiarowych jest ciągłe.*

DOWÓD.

Wiemy, że każde odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest zadane przez macierz i jest ciągłe. Ponieważ w przestrzeni skończenie-wymiarowej wszystkie normy są równoważne izomorfizm liniowy jest odwzorowaniem ciągłym. Korzystając z bazy w przestrzeniach argumentów i wartości przedstawiamy dowolne odwzorowanie liniowe jako złożenie izomorfizmów liniowych i odwzorowania liniowego $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. □

NORMA W PRZESTRZENI ODWZOROWAŃ

Uwaga! Od tego miejsca normy we wszystkich przestrzeniach będziemy oznaczac tym samym symbolem $\| \cdot \|$.

Wiadomo z algebry, że odwzorowania liniowe tworzą przestrzeń wektorową, a ponieważ działania algebraiczne w przestrzeni z normą są ciągłe, odwzorowania liniowe i ciągłe tworzą jej podprzestrzeń wektorową. Oznaczamy tą podprzestrzeń $L(V;W)$. Odwzorowania liniowe i ciągłe są ograniczone, więc poniższa definicja ma sens dla $F \in L(V;W)$:

$$\| \, F \, \| := \inf\{a : \forall v \ \ \| \, Fv \, \| \leqslant a \, \| \, v \, \|\}.$$

Bezpośrednio z tej definicji wynika

Twierdzenie 9. *Jeżeli $F \in L(V;W)$ i $H \in L(W;Z)$, to $H \circ F \in L(V;Z)$ i*

$$\| \, H \circ F \, \| \leqslant \| \, H \, \| \cdot \| \, F \, \| \, .$$

DOWÓD.

Mamy dla $v \in V$:

$$\| \, H \circ F(v) \, \| = \| \, H(F(v)) \, \| \leqslant \| \, H \, \| \cdot \| \, F(v) \, \| \leqslant \| \, H \, \| \cdot \| \, F \, \| \, \| \, v \, \| \, . \ \square$$

Twierdzenie 10. *Dla $F \in L(V;W)$ zachodzą równości*

$$\| \, F \, \| = \sup_{\| v \| \leqslant 1} \| \, Fv \, \| = \sup_{\| v \| < 1} \| \, Fv \, \| = \sup_{\| v \| = 1} \| \, Fv \, \| \, .$$

DOWÓD.
Domknięcie kuli otwartej jest kulą domkniętą, więc

$$\sup_{\| v \| \leqslant 1} \| Fv \| = \sup_{\| v \| < 1} \| Fv \| .$$

Oczywistym jest też, że

$$\sup_{\| v \| \leqslant 1} \| Fv \| = \sup_{\| v \| = 1} \| Fv \| .$$

Dla dowolnego $v \in V$ mamy $\| Fv \| \leqslant \| F \| \, \| v \|$ i stąd

$$\sup_{\| v \| = 1} \| Fv \| \leqslant \| F \| .$$

Z drugiej strony,

$$\| F(v) \| = \| v \| \left\| \frac{F(v)}{\| v \|} \right\| = \| v \| \left\| F\left(\frac{v}{\| v \|} \right) \right\| \leqslant \| v \| \sup_{\| w \| = 1} \| F(w) \| ,$$

stąd

$$\sup_{\| v \| = 1} \| Fv \| \geqslant \| F \|$$

i żądana równośc. $\square$

Twierdzenie 11. $(L(V;W), \| \cdot \|)$ *jest przestrzenią unormowaną.*

DOWÓD.
Sprawdzamy warunki, jakie musi spełniac norma

- Oczywiste, że $\| F \| \geqslant 0$.
- Z $\| F \| = 0$ wynika, że dla dowolnego wektora v mamy $\left\| \left(F \frac{v}{\| v \|} \right) \right\| = 0$, czyli $\| Fv \| = 0$. Zatem dla każdego v mamy $Fv = 0$. Inaczej mówiąc, $F = 0$.
- Mamy oczywisty ciąg równości

$$\begin{aligned} \| \lambda F \| &= \sup_{\| v \| = 1} \| (\lambda F) v \| = \sup_{\| v \| = 1} \| \lambda (Fv) \| = \\ &= |\lambda| \sup_{\| v \| = 1} \| Fv \| = |\lambda| \, \| F \| . \end{aligned}$$

- Nierównośc trójkąta:

$$\begin{aligned} \| F_1 + F_2 \| &= \sup_{\| v \| = 1} \| (F_1 + F_2) v \| \leqslant \sup_{\| v \| = 1} (\| F_1 v \| + \| F_2 v \|) \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\| v \| = 1} \| F_1 v \| + \sup_{\| v \| = 1} \| F_2 v \| = \| F_1 \| + \| F_2 \| . \ \square \end{aligned}$$