# Wykład czwarty, piąty

## RÓŻNICZKOWANIE ODWZOROWAŃ

Niech $X$ i $Y$ będą przestrzeniami unormowanymi (wymiaru skończonego) i niech $T\colon X \supset U \to Y$ będzie odwzorowaniem, gdzie $U$ jest otwartym podzbiorem $V$.

**Definicja 1.** Odwzorowanie $T$ jest *różniczkowalne* w $x_0 \in U$, jeżeli istnieje odwzorowanie liniowe i ciągłe $F \in L(X;Y)$ takie, że odwzorowanie

$$r(x_0;h) = T(x_0+h) - T(x_0) - Fh$$

ma własnośc

$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{\| r(x_0;h) \|}{\| h \|} = 0.$$

Odwzorowanie $F$ nazywamy *pochodną mocną* lub *pochodną Frécheta* odwzorowania $T$ w punkcie $x_0$ i oznaczamy $T'(x_0)$. Odwzorowanie $r(x_0;h)$ nazywamy *resztą*.

**Twierdzenie 1.** *Pochodna odwzorowania w punkcie jest wyznaczona jednoznacznie.*

DOWÓD. Załóżmy, że odwzorowania $F$ i $F'$ należą do $L(X;Y)$ i że odpowiednie odwzorowania $r(x_0;\cdot)$, $r'(x_0;\cdot)$ spełniają warunek reszty. Mamy wówczas

$$Fh - F'h = r'(x_0;h) - r(x_0;h),$$

i dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że spełniona jest nierówność

$$\left\| (F - F')\left(\frac{h}{\| h \|}\right) \right\| = \frac{\| r'(x_0;h) - r(x_0;h) \|}{\| h \|} < \epsilon$$

dla $\| h \| < \delta$. Z dowolności $\epsilon$ wynika, że $(F - F')(v) = 0$ dla wektorów o długości jeden, a więc i dla wszystkich $v \in X$. $\square$

Oczywistym wnioskiem z definicji różniczkowalności jest

**Twierdzenie 2.** *Odwzorowanie różniczkowalne w $x_0$ jest ciągłe w $x_0$.*

DOWÓD. Reszta jest odwzorowaniem ciągłym w zerze. $F$ jest odwzorowaniem liniowym, wiec ciągłym. Zatem $h \mapsto T(x_0+h)$ jest też odwzorowaniem ciągłym w zerze. Stąd $T$ jest ciągłe w $x_0$. $\square$

## FORMALNE PRAWA RÓŻNICZKOWANIA

(1) Jeżeli odwzorowania $S, T\colon X \supset U \to Y$ są różniczkowalne w $x_0 \in U$ i $a, b \in \mathbb{R}$, to odwzorowanie $aT + bS$ też jest różniczkowalne w $x_0$ i

$$(aT + bS)'(x_0) = aT'(x_0) + bT'(x_0).$$

(2) Jeżeli $T\colon X \supset U \to Y$, $S\colon Y \supset O \to Z$, $T$ jest różniczkowalne w $x_0$ i $S$ jest różniczkowalne w $T(x_0) \in O$, to $S \circ T$ jest różniczkowalne w $x_0$ i

$$(S \circ T)'(x_0) = S'(T(x_0)) \circ T'(x_0).$$

(3) Dwóch odwzorowań na ogół nie możemy mnożyc, ale zawsze możemy pomnożyc odwzorowanie przez funkcję o wartościach rzeczywistych:

$$(fT)(x) = f(x)T(x),$$

gdzie $f\colon U \to \mathbb{R}$, $T\colon X \supset U \to Y$. Jeżeli $f, T$ są różniczkowalne w $x_0 \in U$, to $fT$ też jest różniczkowalna w $x_0$ i

$$(fT)'(x_0) = f'(x_0)T(x_0) + f(x_0)T'(x_0),$$

tzn.

$$(fT)'(x_0)h = (f'(x_0)h)T(x_0) + f(x_0)(T'(x_0)h).$$

Jeżeli $T$ jest różniczkowalne w każdym punkcie $x \in U$, to odwzorowanie

$$T' \colon U \to L(X;Y) \colon x \mapsto T'(x)$$

nazywamy *pochodną* odwzorowania $T$. Jeżeli odwzorowanie $T'$ jest ciągłe, to mówimy, że odwzorowanie $T$ jest *różniczkowalne w sposób ciągły.*

POCHODNE KIERUNKOWE

W definicji pochodnej odwzorowania mowa jest o istnieniu odwzorowania $F \in L(X;Y)$. Na ogół sprawdzanie, że coś istnieje nie jest zadaniem prostym. Sytuacja byłaby znacznie prostsza, gdybyśmy mogli wskazac jednego możliwego kandydata na pochodną w punkcie. Okazuje się, że jest to możliwe.

**Definicja 2.** *Pochodną kierunkową* odwzorowania $T$ w punkcie $x_0 \in U$ i w kierunku $h \in X$ nazywamy granicę

$$\lim_{t \to 0} \frac{T(x_0 + th) - T(x_0)}{t}, \ t \in \mathbb{R}$$

i oznaczamy ją $\nabla_h T(x_0)$.

**Twierdzenie 3.** *Jeżeli odwzorowanie $T$ jest różniczkowalne w $x_0$, to w punkcie tym ma pochodną kierunkową dla każdego $h \in V$ (we wszystkich kierunkach) i*

$$\nabla_h T(x_0) = T'(x_0)h.$$

DOWÓD. Mamy

$$T(x_0 + th) - T(x_0) = T'(x_0)(th) + r(x_0; th) = tT'(x_0)(h) + r(x_0; th)$$

i stąd

$$\frac{T(x_0 + th) - T(x_0)}{t} = T'(x_0)h + \frac{r(x_0; th)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} T'(x_0)h. \ \square$$

Nie jest prawdziwe twierdzenie, że z istnienia pochodnych kierunkowych wynika różniczkowalnośc. Fakt ten ilustruje poniższy przykład.

Niech $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane będzie wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \\ x\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

Mamy

$$\nabla_{(h_1, h_2)} T((0, 0)) = h_1 \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 + h_2^2},$$

więc pochodna kierunkowa nie jest liniowa ze względu na $h$, zatem nie może byc równa wartości pochodnej dla przyrostu $h$.

Niech $T$ będzie różniczkowalne w $x_0 \in U \subset X$. Niech $e = (e_1, \ldots, e_n)$ będzie bazą w $X$ zaś $f = (f_1, \ldots, f_m)$ bazą w $Y$. Mamy $T(x) = \sum_{i=1}^m T^i(x) f_i$ i podobnie, $r(x; h) = \sum_{i=1}^m r^i(x; h) f_i$, $T'(x_0)h = F^i(h) f_i$. Łatwo sprawdzic, że

$$T^i(x_0 + h) - T^i(x_0) - F^i h$$

jest resztą dla każdego $i$ wtedy i tylko wtedy, gdy resztą jest

$$T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h.$$

Zatem odwzorowanie $T$ jest różniczkowalne wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $T^i$ są różniczkowalne. Mamy też równośc $F^i = T^{i'}$. Z kolei

$$T^{i'}(x_0)(\sum_{i=1}^n h^i e_i) = \sum_{i=1}^n h^i \nabla_{e_i} T^i(x_0).$$

Zatem oznaczając

$$\frac{\partial T^i}{\partial x_j} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{e_j} T^i,$$

mamy
$$T'(x_0)h = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(h^j\nabla_{e_j}T^i)f_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(h^j\frac{\partial T^i}{\partial x_j}\right)f_i.$$
Dostajemy stąd reprezentację macierzową pochodnej $T'(x_0)$ w wybranych bazach
$$[T']_e^f = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T^m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$
Macierz pochodnej odwzorowania nazywana jest *macierzą Jacobiego.*

Widac stąd, że dla znalezienia jedynego kandydata na pochodną wystarczy zróżniczkować $n \cdot m$ funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Niech $T\colon X \supset U \to Y$ będzie odwzorowaniem i niech $x_0 \in U$.

**Definicja 3.** Jeżeli odwzorowanie $T$ ma w $x_0$ pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach i przyporządkowanie
$$V \ni e \to \nabla_e T(x_0) \in W \qquad (*)$$
jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym, to mówimy że odwzorowanie $T$ jest *słabo różniczkowalne* w $x_0$. Odwzorowanie $(*)$ nazywamy *słabą pochodną* (*pochodną Gateaux*) w punkcie $x_0$ i oznaczamy je $\nabla T(x_0)$.

Oczywiście odwzorowanie rózniczkowalne mocno jest różniczkowalne słabo i zachodzi równośc $\nabla T(x_0) = T'(x_0)$. Jak pokazuje poniższy przykład, wynikanie w drugą stronę nie zachodzi. Rozpatrzmy funkcję $f$ na $\mathbb{R}^2$ daną wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}.$$
Łatwo sprawdzic, że $\nabla_e f((0,0)) = 0$ dla każdego $e$, czyli funkcja $f$ jest w zerze słabo różniczkowalna. Z drugiej jednak strony $r(0;(h,h^2)) = \dfrac{h^5}{2h^4} = h$, zatem $r(0;\cdot)$ nie jest resztą. Funkcja $f$ nie jest różniczkowalna mimo, że ma w zerze, a nawet w każdym punkcie, słabą pochodną. Co więcej, funkcja słabo różniczkowalna w punkcie nie musi byc ciągła w tym punkcie. Przykładem jest funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{dla } y \neq x^2 \\ 1 & \text{dla } y = x^2,\ x \neq 0, \end{cases}$$
która posiada w zerze pochodną słabą równą zero, ale nie jest ciągła w zerze.

## TWIERDZENIA O WARTOŚCI ŚREDNIEJ

Twierdzenie o wartości średniej rachunku różniczkowego (twierdzenie Lagrange'a) mówi, że wartość średnia funkcji różniczkowalnej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest równa pochodnej funkcji $f$ w pewnym punkcie odcinka $]a,b[$:
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \qquad (**)$$
Analogcznie sfomułowane twierdzenie dla funkcji o warościach w $\mathbb{R}^2$ nie jest prawdziwe. Niech bowiem $f = (f_1, f_2)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, to stosując twierdzenie Lagrange'a do $f_1$ i $f_2$ mamy
$$\frac{f_1(b)-f_1(a)}{b-a} = f_1'(c_1), \quad \frac{f_2(b)-f_2(a)}{b-a} = f_2'(c_2).$$
Na ogół $c_1 \neq c_2$, nie istnieje więc $c$ takie, że zachodzi wzór $(**)$. Jako przykład weźmy $a = 0, b = 1,\ f_1(x) = x^2$ i $f_2(x) = x^3$. Tutaj $c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{3}$.

Pokażemy, że mimo to istnieje odpowiednie twierdzenie o wartości średniej dla odwzorowań. Zamiast równości pojawią się jednak tylko pewne szacowania.

Rozpatrzmy odwzorowanie określone na odcinku domkniętym w $\mathbb{R}$,

$$f\colon I = [a, b] \to W.$$

**Twierdzenie 4.** *Załóżmy, że odwzorowanie $f$ jest ciągłe na $[a, b]$ i różniczkowalne na $]a, b[$. Niech $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkowalną na $]a, b[$. Jeżeli $\| f'(t) \| \leqslant \varphi'(t)$ dla $t \in ]a, b[$, to*

$$\| f(a) - f(b) \| \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

**Wniosek.** Jeżeli $\| f'(t) \| \leqslant M$, to biorąc $\varphi(t) = M(t - a)$ dostajemy

$$\| f(a) - f(b) \| \leqslant M(b - a). \quad (***)$$

Wynikają z tego wniosku dwa ważne twierdzenia.

**Twierdzenie 5.** (Pierwsze twierdzenie o wartości średniej) *Niech $T\colon V \supset U \to W$ i niech $T$ będzie słabo różniczkowalne na $U \supset I = \{x; x = x_0 + th,\ t \in ]0, 1[\}$ i ciągłe na $\bar{I}$. Wówczas*

$$\| T(x_0 + h) - T(x_0) \| \leqslant \| h \| \sup_{0<t<1} \| \nabla T(x_0 + th) \|$$

DOWÓD. Zdefiniujmy odwzorowanie $f\colon [0, 1] \to W$ wzorem

$$f(t) = T(x_0 + th).$$

Spełnia ono założenia Stwierdzenia 4 i

$$f'(t) = \nabla_h T(x_0 + th).$$

Kładąc w $(***)$

$$M = \sup_{0<t<1} \| \nabla_h T(x_0 + th) \|,$$

dostajemy nierównośc

$$\| T(x_0 + h) - T(x_0) \| \leqslant \sup_{0<t<1} \| \nabla_h T(x_0 + th) \| \leqslant \| h \| \sup_{0<t<1} \| \nabla T(x_0 + th) \|. \quad \square$$

**Twierdzenie 6.** (Drugie twierdzenie o wartości średniej) *Niech będą spełnione założenia pierwszego twierdzenia o wartości średniej i niech $F \in L(V; W)$. Wówczas*

$$\| T(x_0 + h) - T(x_0) - Fh \| \leqslant \| h \| \sup_{0<t<1} \| \nabla T(x_0 + th) - F \|$$

DOWÓD. Zdefiniujmy odwzorowanie $S\colon U \to W$ wzorem

$$S(x) = T(x) - Fx.$$

$S$ spełnia założenia pierwszego twierdzenia o wartości średniej i

$$\nabla S(x) = \nabla T(x) - F.$$

Z tezy pierwszego twierdzenia wynika teza drugiego twierdzenia. $\square$