Wykład szósty, siódmy i ósmy

RÓŻNICZKOWANIE ODWZOROWAŃ cd

Z Drugiego Twierdzenia o Wartości Średniej wynika inne, bardzo ważne twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Jeżeli T jest słabo różniczkowalne na U i słaba pochodna*

$$U \ni x \to \nabla T(x) \in L(V;W)$$

jest ciągła, to T jest różniczkowalna w sposób ciągły na U.

DOWÓD. Z Drugiego Twierdzenia o Wartości Średniej mamy, kładąc $F = \nabla T(x_0)$,

$$\| T(x_0+h) - T(x_0) - \nabla T(x_0)h \| \leqslant \| h \| \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \| \nabla T(x_0+th) - \nabla T(x_0) \| .$$

Stąd i z ciągłości słabej pochodnej lewa strona jest resztą. □
Dla wymiaru skończonego rzecz się bardzo upraszcza.

Twierdzenie 2. *Niech będzie $T\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$. Jeżeli dla każdej pary (i,j) istnieje pochodna $\dfrac{\partial T^i}{\partial x_j}$ i jest ciągła, to odwzorowanie T jest różniczkowalne w sposób ciągły na U.*

DOWÓD. W skrypcie. □

Zwróćmy uwagę na fakt, że nie zakładaliśmy liniowej zależności pochodnej kierunkowej od kierunku. Zależność taka jest kosekwencją ciągłości pochodnych $\dfrac{\partial T^i}{\partial x_j}$.

Załóżmy, że $X = X_1 \times X_2$ (iloczyn kartezjański przestrzeni Banacha) i niech $T\colon X \supset U \to Y$. Dla wygody przyjmijmy, że $U = U_1 \times U_2$.

Definicja 1. *Pochodną cząstkową* T w punkcie $(x_0, y_0) \in U$ w kierunku podprzestrzeni X_1 nazywamy pochodną w x_0 odwzorowania

$$X_1 \supset U_1 \to X\colon x \mapsto T(x, y_0).$$

Oznaczamy ją $T'_{X_1}(x_0, y_0)$.

Podobnie definiujemy pochodną cząstkową w kierunku X_2. Oczywiste jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Jeżeli odwzorowanie T jest różniczkowalne w (x_0, y_0), to ma tam pochodne cząstkowe i*

$$T'(x_0,y_0)(h_1,h_2) = T'_{X_1}(x_0,y_0)h_1 + T'_{X_2}(x_0,y_0)h_2.$$

Z kolei poniższe twierdzenie jest odpowiednikiem Twierdzenia 2.

Twierdzenie 4. *Odwzorowanie T jest różniczkowalne w sposób ciągły na U wtedy i tylko wtedy, kiedy istnieją pochodne cząstkowe T'_{X_i}, $i = 1, 2$ i są ciągłe na U.*

ODWZOROWANIA WIELOLINIOWE

Niech $V_1, \ldots, V_k$ będą przestrzeniami wektorowymi z normą.

Definicja 2. Odwzorowanie

$$F\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$$

nazywamy *k-liniowym*, jeżeli dla każdego i

$$F(v_1, \cdots, av_i + bv'_i, \cdots, v_k) = aF(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + bF(v_1, \cdots, v'_i, \cdots, v_k)$$

tzn. F jest liniowe ze względu na każdy z argumentów.

Oczywistym jest, że odwzorowania k-liniowe z $V_1 \times \cdots \times V_k$ do W tworzą przestrzeń wektorową (podprzestrzeń przestrzeni wektorowej wszystkich odwzorowań na $V_1 \times \cdots \times V_k$ o wartościach w W). Przestrzeń ciągłych odwzorowań k-liniowych oznaczamy $L(V_1, \ldots, V_k; W)$. W przypadku $V_1 = \cdots = V_k = V$ będziemy również pisać $L_k(V; W)$.

Twierdzenie 5. *Następujące warunki są równoważne dla odwzorowania k-liniowego $F\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$:*

1. *F jest odwzorowaniem ciągłym,*
2. *F jest ciągłe w zerze,*
3. *F jest odwzorowaniem ograniczonym, tzn. istnieje liczba $a > 0$ taka, że dla wszystkich ciągów $(v_1, \dots, v_k)$ zachodzi nierówność*

$$\| F(v_1, \dots, v_k) \| \leqslant a \| v_1 \| \cdots \| v_k \| .$$

DOWÓD.
$1 \Rightarrow 2$ Oczywiste.
$2 \Rightarrow 3$ Ciągłość w zerze oznacza, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\| h_i \| < \delta, i = 1, \dots, k \implies \| F(h_1, \dots, h_k) \| < \epsilon.$$

Zatem dla dowolnych h_i mamy

$$\| F(h_1, \dots, h_k) \| = \left\| F\left(\frac{\delta}{2 \| h_1 \|} h_1, \dots, \frac{\delta}{2 \| h_k \|} h_k\right) \right\| \left(\frac{2}{\delta}\right)^k \| h_1 \| \cdots \| h_k \| \leqslant$$

$$\leqslant \epsilon \left(\frac{2}{\delta}\right)^k \| h_1 \| \cdots \| h_k \| .$$

$3 \Rightarrow 1$ Mamy z wieloliniowości

(1) $$F(v_1 + h_1, \dots, v_k + h_k) - F(v_1, \dots, v_k) =$$
$$= \sum_{l=1}^{k} F(v_1, \dots, v_{l-1}, h_l, v_{l+1} + h_{l+1}, \cdots, v_k + h_k)$$

i dalej proste szacowanie korzystające z ograniczoności odwzorowania F. □

Podobnie jak dla odwzorowań liniowych i ciągłych wprowadzamy normę odwzorowania wieloliniowego i ciągłego:

$$\| F \| = \inf\{a; \| F(v_1, \dots, v_k) \| \leqslant a \| v_1 \| \cdots \| v_k \|\} = \sup_{\| v_i \| = 1} \| F(v_1, \dots, v_k) \|$$

Twierdzenie 6. *Odwzorowania wieloliniowe i ciągłe są różniczkowalne i dla $F \in L(V_1, \dots, V_k; W)$ zachodzi wzór*

$$F'(v)h = \sum_i F(v_1, \dots, v_{i-1}, h_i, v_{i+1}, \dots, v_k).$$

DOWÓD. Dla $k = 2$:

$$F(v_1 + h_1, v_2 + h_2) - F(v_1, v_2) - F(v_1, h_2) - F(h_1, v_2) = F(h_1, h_2),$$

ale

$$\| F(h_1, h_2) \| \leqslant \| F \| \| h_1 \| \| h_2 \| \leqslant \| F \| (\| h_1 \| + \| h_2 \|)^2.$$

Odwzorowanie $(h_1, h_2) \to F(h_1, h_2)$ jest więc resztą. □

Odwzorowania wieloliniowe można utożsamiać z iteracją odwzorowań liniowych. Dokładniej, istnieje naturalne odwzorowanie

$$\Phi\colon L(V_1; L(V_2; \dots; L(V_k; W) \cdots)) \to L(V_1, \dots, V_k; W)$$

zadane wzorem

$$\Phi(F)(v_1, v_2, \dots, v_k) = (\cdots ((F v_1) v_2) \dots v_{k-1}) v_k.$$

Twierdzenie 7. *Odzorowanie Φ jest izomorfizmem izometrycznym, to znaczy jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych i $\| \Phi(F) \| = \| F \|$.*

DOWÓD. Dla $k = 2$.

Oczywistym jest, że odwzorowanie Φ jest liniowe. Niech $T \in L(V_1, V_2; W)$.
Definiujemy $F \in L(V_1; L(V_2; W))$ wzorem

$$F(v_1) v_2 = T(v_1, v_2).$$

Mamy $\Phi(F) = T$, zatem Φ jest surjekcją. Dowodzimy teraz izometryczności (z której wynika injektywność i ciągłość).

$$(2)\quad \| \Phi(F) \| = \sup_{\| v_i \|=1} \| \Phi(F)(v_1, v_2) \| = \sup_{\| v_1 \|=1} \sup_{\| v_2 \|=1} \| F(v_1)v_2 \|$$
$$= \sup_{\| v_1 \|=1} \| F(v_1) \| = \| F \| . \square$$

POCHODNE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Ponieważ pochodna w punkcie, pochodna kierunkowa w punkcie i pochodna cząstkowa w punkcie są elementami przestrzeni unormowanej (odwzorowań w pierwszym i trzecim przypadku) możemy zdefiniować pochodne wyższych rzędów indukcyjnie. Dla przykładu: Jeżeli odwzorowanie $T \colon X \supset U \to Y$ jest różniczkowalne na całym U i odwzorowanie

$$T' \colon U \to L(X;Y) \colon x \mapsto T'(x)$$

jest różniczkowalne w x_0, to $(T')'(x_0) \in L(X; L(X;Y))$ nazywamy drugą pochodną T w x_0 i oznaczamy $T''(x_0)$.

W ogólności, pochodna k-tego rzędu w punkcie x_0 jest elementem przestrzeni $L(X_1; L(X_2; \ldots ; L(X_k; Y) \cdots))$ $(X_1 = X_2 = \cdots = X_k = X)$ którą, jak już wiemy, możemy utożsamić z przestrzenią $L(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y)$.

Twierdzenie 8. *Druga pochodna w punkcie jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym, tzn.*

$$T''(x_0)(v, w) = T''(x_0)(w, v).$$

W przypadku $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ mamy proste kryterium ciągłej różniczkowalności rzędu k:

Twierdzenie 9. *Odwzorowanie $T \colon \mathbb{R}^n \supset U \to W$ jest k-krotnie różniczkowalne w sposób ciągły na U wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wszystkie pochodne*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} T$$

i są ciągłe.

TWIERDZENIE O RESZCIE I NIERÓWNOŚĆ TAYLORA

Uwaga! Dla uproszczenia notacji będziemy pisać h^k zamiast $(h, \ldots, h) \in V^k$.

Twierdzenie 10. *Niech $T \colon V \supset U \to W$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym $(p-1)$-krotnie na U i posiadającym p-tą pochodną w $x_0 \in U$. Wówczas*

$$r_p(x_0; h) = T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h - \cdots - \frac{1}{p!} T^{(p)}(x_0)(h, \ldots, h)$$

jest resztą p-tego rzędu, to znaczy

$$\frac{r_p(x_0; h)}{\| h \|^p} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

DOWÓD Indukcyjny ze względu na p.
Dla p=1 twierdzenie jest prawdziwe (definicja pochodnej).

Załóżmy prawdziwość twierdzenia dla $p-1$, $p > 1$. Możemy zdefiniować odwzorowanie $f \colon V \supset U' \to W$, na pewnym otoczeniu zera U':

$$f(h) = T(x_0 + h) - T(x_0) - T'(x_0)h - \cdots - \frac{1}{p!} T^{(p)}(x_0)h^p = r_p(x_0; h).$$

Odwzorowanie f jest p-krotnie różniczkowalne w $h = 0$ i

$$f'(h) = T'(x_0 + h) - T'(x_0) - T''(x_0)h - \cdots - \frac{1}{(p-1)!} T^{(p)}(x_0)h^{p-1}$$

(korzystamy ze wzoru na pochodną funkcji wieloliniowej i z faktu, że pochodne są odwzorowaniami wieloliniowymi symetrycznymi). Podobnie

$$f''(h) = T''(x_0+h) - T''(x_0) - T'''(x_0)h - \cdots - \frac{1}{(p-2)!}T^{(p)}(x_0)h^{p-2}$$

itd., aż do

$$f^{(p)}(h) = T^{(p)}(x_0+h) - T^{(p)}(x_0).$$

We wzorach tych wyrażenie $T^k(x)h^l$ oznacza odwzorowanie $(k-l)$-liniowe:

$$T^k(x)h^l(v_1,\ldots,v_{k-l}) = T^k(x)(h,\ldots,h,v_1\ldots,v_{k-l}).$$

Odwzorowanie f' jest $(p-1)$-krotnie różniczkowalne w zerze, więc z założenia indukcyjnego

$$\frac{1}{\|h\|^{p-1}}\left\| f'(h) - f'(0) - (f')'(0)h - \cdots \frac{1}{(p-1)!}(f')^{(p-1)}(0)h^{p-1}\right\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \qquad (*)$$

Ale $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ \ldots,\ f^{(p)}(0)=0$, więc $(*)$ wygląda tak:

$$\frac{1}{\|h\|^{p-1}}\|f'(h)\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Z tej własności i z pierwszego twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$(3)\quad \frac{1}{\|h\|^{p}}\|f(h)\| = \frac{1}{\|h\|^{p}}\|f(h)-f(0)\| \leqslant \frac{1}{\|h\|^{p}}\|h\| \sup_{0<s<1}\|f'(sh)\|$$

$$\leqslant \sup_{0<s<1}\frac{\|f'(sh)\|}{\|sh\|^{p-1}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

□

Uwaga: Istnienie rozkładu, jak w powyższym twierdzeniu, dla pewnego odwzorowania p-liniowego F (zamiast $T^{(p)}$) z własnością reszty nie gwarantuje istnienia p-tej pochodnej w x_0:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x=0 \\ x^{p+1}\sin\frac{1}{x^{p+1}} & \text{dla } x\neq 0 \end{cases}$$

jest funkcją rózniczkowalną i

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x=0 \\ (p+1)x^p\sin\frac{1}{x^{p+1}} - \frac{p+1}{x}\cos\frac{1}{x^{p+1}} & \text{dla } \ x\neq 0 \end{cases}$$

Funkcja f' nie jest ciągła w zerze, więc f nie ma drugiej pochodnej w zerze, ale

$$\frac{f(x)}{x^p} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Dla funkcji jednej zmiennej mieliśmy również wzory na resztę przy założeniu istnienia pochodnej wyższego rzędu – p-ta reszta wyrażała się poprzez pochodną $(p+1)$-go rzędu. Proste argumenty pokazują, że już w przypadku dwuwymiarowego W nie ma odpowiedników tych wzorów. Możemy jednak równości zastąpić szacowaniami, czego przykładem jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 11. *Niech $T\colon X\supset U\to Y$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym $(p-1)$-krotnie na U i posiadającym p-tą pochodną w $x_0\in U$. Wówczas*

$$r_p(x_0;h) = T(x_0+h) - T(x_0) - T'(x_0)h - \cdots - \frac{1}{p!}T^{(p)}(x_0)(h,\ldots,h)$$

jest resztą p-tego rzędu, to znaczy

$$\frac{r_p(x_0;h)}{\|h\|^p} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Załóżmy, że $T\colon X\supset U\to Y$ jest p-krotnie różniczkowalne i na $]x_0,x_0+h[\subset U$ istnieje pochodna rzędu $(p+1)$. Wówczas

$$\|r_p(x_0;h)\| \leqslant \frac{1}{(p+1)!}\|h\|^{p+1}\sup_{0<s<1}\left\|T^{(p+1)}(x_0+sh)\right\|.$$