Wykład dziewiąty i dziesiąty

EKSTREMA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Badanie funkcji wielu zmiennych jest znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku jednej zmiennej. Już dla dwóch zmiennych (np. $X = \mathbb{R}^2$) intuicje, które wypracowaliśmy analizując funkcje jednej zmiennej stają się zwodnicze i lepiej o nich zapomnieć. Zajmiemy się na początek problemem istnienia lokalnych ekstremów. Zobaczymy, jak bardzo wszystko się komplikuje, w porównaniu z przypadkiem jednej zmiennej, już dla dwóch zmiennych.

Rozpatrujemy funkcję określoną na otwartym podzbiorze U przestrzeni Banacha V

$$f\colon X \supset U \to \mathbb{R}.$$

Przypomnijmy, że funkcja f ma w $x_0 \in U$ minimum (maksimum) lokalne, jeżeli istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(x) \geqslant f(x_0)$ ($f(x) \leqslant f(x_0)$) dla każdego $x \in K(x_0, \delta)$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja f jest słabo różniczkowalna w x_0 i w punkcie tym posiada lokalne ekstremum, to $\nabla f(x_0) = 0$.*

DOWÓD. Dla każdego $h \in X$ funkcja

$$t \mapsto f(x_0 + th)$$

jest określona w otoczeniu zera, w zerze zaś jest różniczkowalna i ma tam ekstremum lokalne. Pochodna tej funkcji w zerze jest zatem zero, z drugiej zaś strony jest ona równa $\nabla f(x_0)h$. $\square$

Poniższy przykład pokazuje, że istnienie dla każdego h minimum (nawet ścisłego) w zerze funkcji $t \mapsto f(x_0 + th)$, nie gwarantuje istnienia minimum lokalnego funkcji f w punkcie x_0. Funkcja

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (x, y) \mapsto (y - x^2)(y - 3x^2)$$

przyjmuje dla $x = th_1,\ y = th_2$ wartość $t^2(h_2 - th_1^2)(h_2 - 3th_1^2)$ i jest dodatnia dla małych t. Jeżeli zaś $y = 2x^2$, to jej wartość wynosi $-x^4 < 0$.

Zanim przejdziemy do warunków dostatecznych istnienia ekstremum udowodnimy istotny fakt.

Twierdzenie 2. *Odwzorowanie k-liniowe, symetryczne, $F \in L_k(V; W)$ jest jednoznacznie wyznaczone przez swoje wartości na ciągach postaci $h^k = (h, h, \ldots, h)$.*

DOWÓD. W skrypcie. $\square$

Poniższe twierdzenie daje warunki dostateczne na istnienie ekstremum lokalnego.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że funkcja $f\colon X \supset U \to \mathbb{R}$ jest p-krotnie różniczkowalna w x_0 i $f^{(k)}(x_0) = 0$ dla $k = 1, \ldots, p-1$. Niech też $f^{(p)}(x_0) \neq 0$, wówczas*

(1) *jeżeli f ma w x_0 maksimum (minimum), to p jest parzyste i $f^{(p)}(x_0)h^p \leqslant 0$ ($f^{(p)}(x_0)h^p \geqslant 0$) dla każdego $h \in V$;*

(2) *jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f^{(p)}(x_0)h^p \leqslant -\delta < 0$ ($f^{(p)}(x_0)h^p \geqslant \delta > 0$) dla $\| h \| = 1$, to funkcja f ma w x_0 maksimum (minimum).*

W przypadku skończonego wymiaru przestrzeni X warunek $f^{(p)}h^p \geqslant \delta > 0$ upraszcza się, bo domknięta kula jednostkowa jest zbiorem zwartym i wystarcza, by $f^{(p)}h^p > 0$ dla $\| h \| = 1$. Jako δ możemy w tym przypadku przyjąć $\min_{\| h \|=1} f^{(p)}h^p$.

Dla $p = 2$ i wymiaru skończonego przestrzeni V warunek $f^{(2)}(h, h) > 0$ oznacza, że odpowiadająca drugiej pochodnej forma kwadratowa jest dodatnio określona. Istnieje proste kryterium (Sylvestera) dodatniej określoności form kwadratowych. Widać też istotną różnicę miedzy przypadkiem wymiaru jeden i wymiaru wyższego niż jeden. Dla wymiaru jeden zerowanie się pierwszej pochodnej w punkcie x_0 i warunek $f''(x_0) \neq 0$ oznacza, że w punkcie tym mamy ekstremum lokalne. W większym wymiarze nieosobliwość drugiej pochodnej (przy zerowaniu się pierwszej) nie gwarantuje istnienia ekstremum. Na ogół mamy do czynienia z *punktem siodłowym*: w pewnych kierunkach mamy minimum, a w innych maksimum.

ISTNIENIE ODWZOROWANIA UWIKŁANEGO

Niech G będzie odwzorowaniem

$$G\colon X \times Y \supset O \to Z.$$

Definicja 1. Mówimy, że odwzorowanie $T\colon X \supset U \to Y$ jest *zadane w sposób uwikłany* przez odwzorowanie G, jeżeli zadany jest jego wykres poprzez równanie $G(x, y) = 0$, tzn. $y = T(x)$ jest równoważne $G(x, y) = 0$.

Podstawą dowodu twierdzenie o istnieniu odwzorowania zadanego w sposób uwikłany (mówimy też – odwzorowania uwikłanego) jest zasada Banacha w wersji z parametrem:

Twierdzenie 4. *Niech Λ będzie przestrzenią topologiczną a (X, d) zupełną przestrzenią metryczną. Dane jest odwzorowania ciągłe $\varphi\colon \Lambda \times X \to X$ i liczba rzeczywista $q < 1$ taka, że dla każdego $\lambda \in \Lambda$*

$$d(\varphi(\lambda, x), \varphi(\lambda, y)) \leqslant qd(x, y).$$

Wówczas dla każdego $\lambda \in \Lambda$ istnieje jeden punkt stały $x(\lambda)$ odwzorowania $\varphi(\lambda, \cdot)$ i odwzorowanie

$$\lambda \mapsto x(\lambda)$$

jest ciągłe.

Możemy teraz udowodnić

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że odwzorowanie*

$$G\colon V \times W \supset O \to Z$$

jest różniczkowalne w sposób ciągły. Załóżmy też, że w punkcie $(x_0, y_0) \in O$, spełniającym warunek $G(x_0, y_0) = 0$ pochodna cząstkowa $G'_W(x_0, y_0)$ jest odwracalna.
Wówczas istnieje otwarte otoczenie $V \supset U \ni x_0$ i jedyne odwzorowanie ciągłe $T\colon U \to W$ takie, że $T(x_0) = y_0$ i $G(x, T(x)) = 0$. Ponadto T jest różniczkowalne w sposób ciągły i

$$T'(x) = -(G'_W(x, T(x)))^{-1} \circ G'_V(x, T(x)) \ .$$

DOWÓD. W skrypcie.
□

Ze wzoru na pochodną funkcji uwikłanej widać, że do odpowiedzi na pytania o wyższe pochodne potrzebna jest wiedza, że

(1) złożenie odwzorowań różniczkowalnych jest odwzorowaniem różniczkowalnym,
(2) odwzorowanie $(F, H) \mapsto F \circ H$ jest różniczkowalne,
(3) odwzorowanie $F \mapsto F^{-1}$ jest różniczkowalne

wynika stąd, że jeżeli G jest p-krotnie różniczkowalna, to T też jest p-krotnie różniczkowalna. Dwa pierwsze fakty są juz znane. Zajmijmy się trzecim.

Twierdzenie 6. *Odwzorowanie*

$$\Phi\colon L(V; W) \supset U \to L(W; V)\colon F \mapsto F^{-1}$$

jest różniczkowalne i

$$\Phi'(F)H = -F^{-1} \circ H \circ F^{-1}, \quad H \in L(V; W).$$

DOWÓD. Zauważmy najpierw, że jeżeli $S \in L(V) = L(V; V)$ i $\| S \| < 1$, to istnieje $(\mathrm{id} - S)^{-1}$. Istotnie, rozpatrzmy szereg

$$\mathrm{id} + S + S^2 \cdots + S^n + \cdots .$$

Jest on zbieżny w $L(V)$, bo

$$\left\| \sum_m^n S^i \right\| \leqslant \sum_m^n \| S \|^i \leqslant \sum_m^\infty \| S \|^i = \frac{\| S \|^m}{1 - \| S \|} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Korzystaliśmy tu z nierówności $\| S^i \| \leqslant \| S \|^i$. Prostym przeliczeniem sprawdzamy, że suma szeregu jest odwzorowaniem odwrotnym do $(\mathrm{id} - S)$. Dla odwzorowań H takich, że $\| H \| < \dfrac{1}{\| F^{-1} \|}$, mamy

$$(F+H)^{-1} - F^{-1} = ((\mathrm{id} + F^{-1}H)^{-1} - \mathrm{id})F^{-1}$$

i

$$(F+H)^{-1} - F^{-1} + F^{-1}HF^{-1} = ((\mathrm{id} + F^{-1}H)^{-1} - \mathrm{id} + F^{-1}H)F^{-1}.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} (1) \quad \left\| (F+H)^{-1} - F^{-1} + F^{-1}HF^{-1} \right\| &\leqslant \| F^{-1} \| \frac{\| F^{-1}H \|^2}{1 - \| F^{-1}H \|} \\ &\leqslant \| F^{-1} \| \frac{\| F^{-1} \|^2 \| H \|^2}{1 - \| F^{-1} \| \| H \|}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że wyrażenie po lewej stronie jest resztą. □

Następujące, bardzo ważne twierdzenie o lokalnej odwracalności jest prostym wnioskiem z twierdzenia o funkcji uwikłanej.

Twierdzenie 7. *Załóżmy, że odwzorowanie $T \colon X \supset U \to Y$ jest różniczkowalne w sposób ciągły w otoczeniu x_0 i $T'(x_0)$ jest izomorfizmem. Istnieje otoczenie $\widetilde{U} \subset U$ takie, że T obcięte do $\widetilde{U}$ jest odwracalne, odwzorowanie odwrotne T^{-1} jest różniczkowalne i*

$$(T^{-1})'(T(x)) = (T'(x))^{-1}.$$

DOWÓD Zdefiniujmy odwzorowanie:

$$G \colon U \times Y \to Y \colon (x, y) \mapsto T(x) - y.$$

Równanie $G(x, y) = 0$ jest równoważne równaniu $y = T(x)$, więc opisuje ono wykres odwzorowania T. Jeżeli zatem T^{-1} istnieje, to jego wykres jest opisany tym samym równaniem. Ponieważ

$$G'_X(x_0, y) = T'(x_0)$$

jest izomorfizmem, to z twierdzenia o funkcji uwikłanej istnieje otoczenie $O \ni y_0 = T(x_0)$ takie, że zbiór $\{X \times O \ni (x, y) \colon G(x, y) = 0\}$ jest wykresem odwzorowania $T^{-1} \colon O \to X$ i jego pochodna jest równa

$$(T^{-1})'(T(x)) = (T'(x))^{-1}.$$

□

Twierdzenie 8. (o stałym rzędzie) *Zakładamy, że wymiary przestrzeni X i Y są skończone i że odwzorowanie $S \colon X \supset U \to Y$ jest różniczkowalne w sposób ciągły, a rząd pochodnej jest stały. Wówczas dla każdego $x \in U$ istnieje otoczenie $\widetilde{U}$ takie, że $S(\widetilde{U})$ jest wykresem, to znaczy istnieją podprzestrzenie V, W przestrzeni Y takie, że $Y = V \oplus W$ i $S(\widetilde{U})$ jest wykresem odwzorowania $T \colon V \supset O \to W$, gdzie O jest rzutem $S(\widetilde{U})$ na V.*

Twierdzenia o funkcji uwikłanej i o stałym rzędzie dają narzędzia do sprawdzania, czy podzbiór iloczynu kartezjańskiego jest (lokalnie) wykresem odwzorowania.