Wykłady ....

EKSTREMA FUNKCJI NA POWIERZCHNI

Niech X będzie przestrzenią wektorową (nad ciałem liczb rzeczywistych) wymiaru skończonego. Zbiór $M \subset X$ jest *gładką powierzchnią*, jeżeli dla każdego punktu $p \in M$ istnieją podprzestrzenie wektorowe $V_p, W_p \subset X$ takie, że $X = V_p \oplus W_p$ (więc przestrzeń X można utożsamić z iloczynem kartezjańskim $V_p \times W_p$), oraz zbiory otwarte $O_V \subset V_p$, $O_W \subset W_p$ takie, że $p \in O_V \times O_W$ a zbiór $M \cap (O_V \times O_W)$ jest wykresem odwzorowania gładkiego (posiadajacego pochodne wszystkich rzędów)

$$\varphi_p \colon O_V \to O_W.$$

Innymi słowy: M jest powierzchnią, jeżeli lokalnie jest wykresem odwzorowania gladkiego. Jest oczywistym, że jeżeli $X = V_p \oplus W_p$ jest rozkładem o którym mówi definicja powierzchni, to dla $q \in O_V \times O_W$ możemy przyjąć $V_q = V_p$ oraz $W_q = V_p$. *Wymiarem powierzchni* nazywamy wymiar przestrzeni V.

Uwaga: jeżeli w definicji powierzchni warunek gładkości zastąpimy warunkiem k-krotnej różniczkowalności, to mówimy o powierzchni klasy C^k.

Możemy teraz przeformułować twierdzenie o funkcji uwikłanej w sposób następujący:

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że odwzorowanie*

$$G \colon X \supset U \to Y$$

między przestrzeniami wektorowymi wymiaru skończonego jest gładkie i że dla każdego $p \in U$, $G(p) = 0$ *pochodna* $G'(p)$ *jest surjekcją.*
Wówczas zbiór $M = G^{-1}(0) \subset U \subset X$ *jest powierzchnią wymiaru* $\dim X - \dim Y$.

DOWÓD. Dla wybranego $p \in M$ kładziemy $V_p = \ker G'(p)$ i W_p równe dowolnej podprzestrzeni dopełniającej V_p w X. Z twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika istnienie otoczeń $O_V \subset V_p, O_W \subset W_p$ i odwzorowania φ, o ktorych mowa w definicji powierzchni. $\square$

Teraz wersja 'geometryczna' twierdzenia o stałym rzędzie:

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że odwzorowanie* $S \colon Y \supset U \to X$ *jest gładkie, a rząd pochodnej jest stały, równy* m. *Wówczas dla każdego* $x \in U$ *istnieje otoczenie* $\widetilde{U}$ *takie, że* $S(\widetilde{U})$ *jest powierzchnią w* X *wymiaru* m.

Zwróćmy uwagę na istotną różnicę w znaczeniu tych twierdzeń. twierdzenie pierwsze mówi, że <u>cały</u> zbiór $M = G^{-1}(0)$ jest powierzchnią, natomiast twierdzenie drugie mówi tylko, że $S(\widetilde{U})$ jest powierzchnią. Mówimy, że $S(U)$ jest *lokalnie* powierzchnią. O tym, czy cały zbiór $S(U)$ jest powierzchnią decydują globalne, nie do uchwycenia poprzez analizę wyłącznie pochodnej, własności odwzorowania S (patrz przykłady poniżej).

Przykłady:

(1) Podzbiór otwarty $O \subset \mathbb{R}^n$ jest powierzchnią wymiaru n.
(2) Zbiór jednopunktowy $\{m\}$ jest powierzchnią wymiaru zero.
(3) Sfera S^2 w $\mathbb{R}^3$ jest powierzchnią. S^2 jest dana jako $\varphi^{-1}(0)$, gdzie

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1 \colon (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

Z twierdzenia o funkcji uwikłanej jest to powierzchnia.

(4) Rząd pochodnej odwzorowania

$$\varphi \colon]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

danego wzorem

$$\varphi(x, y) = ((1 + x \sin(\frac{1}{2}y)) \cos y, (1 + x \sin(\frac{1}{2}y)) \sin y, x \sin(\frac{1}{2}y))$$

jest w każdym punkcie równy 2. Jego obraz jest powierzchnią (lokalnie) na mocy twierdzenia o stałym rzędzie. Łatwo pokazać, że jest również powierzchnią globalnie. Powierzchnia ta nazywana jest *wstęgą Möbiusa*.

(5) Podzbiór $\mathbb{R}^2$ zadany równaniem $xy = 0$ nie jest powierzchnią. Jest to para przecinających się prostych (osi współrzędnych). Dla żadnego otoczenia zera (punkt przecięcia prostych) i dla żadnego rozkładu $\mathbb{R}^2$ na dwie podprzestrzenie (jednowymiarowe) przecinające się proste nie są wykresem odwzorowania.

(6) Rząd pochodnej odwzorowania
$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (\cos(t), \sin(2t))$$
jest w każdym punkcie równy 1, więc jego obraz jest lokalnie (względem argumentu t) powierzchnią. Ale przecięcie kuli $K(0, \epsilon)$ z $\varphi(\mathbb{R})$ składa się, dla $\epsilon < \frac{1}{2}$, z dwoch łuków, przecinających się w zerze. Argumenty jak w poprzednim przykładzie pokazują, że łuki te nie tworzą powierzchni.

Funkcję na powierzchni M, $f\colon M \to \mathbb{R}$ nazwiemy różniczkowalną, jeżeli jest obcięciem funkcji F, różniczkowalnej w otoczeniu M,
$$F\colon X \supset O \to \mathbb{R}, \quad O \supset M, \quad f = F|_M$$
Będziemy sie zajmować znajdowaniem i badaniem punktów podejrzanych o ekstrema dla funkcji f. W przypadku $M = O \subset X$ punkty podejrzane o ekstrema znajdujemy badając funkcję f na prostej $t \mapsto x_0 + tx$. Warunkiem koniecznym ekstremum funkcji f na tej prostej, w punkcie x_0, jest znikanie pochodnej, czyli $\nabla_x f(x_0) = 0$ dla wszystkich $x \in X$. Jeżeli M jest nie jest otwartym podzbiorem X (jak np. sfera w $\mathbb{R}^3$), to proste zaczynające się w $x_0 \in M$ nie leżą w M i powyższe rozumowanie trzeba zmodyfikować zastepując prosta dowolnymi krzywymi w M, tzn. odwzorowaniami różniczkowalnymi $\gamma\colon \mathbb{R} \supset I \to M \subset X$ z warunkiem $\gamma(0) = x_0$. Jeżeli funkcja f ma ekstremum w x_0, to pochodna funkcji $f \circ \gamma$ w $t = 0$ jest zero.

WEKTORY STYCZNE DO POWIERZCHNI

Definicja 1. Wektor $v \in X$ nazywamy *stycznym do powierzchni* $M \supset U$ *w punkcie* $p \in M$, jeżeli istnieje odwzorowanie $\gamma\colon \mathbb{R} \to M \subset X$ (czyli krzywa) takie, że $\gamma(0) = p$ i $\dot\gamma(o) = v$.

$\dot\gamma$ oznacza pochodną odwzorowania γ, interpretowaną jako wektor z X (pochodna, jako odwzorowanie liniowe z $\mathbb{R}$ do X jest zadana przez swoja wartość na jedynce). Zbiór wektorów stycznych do M w punkcie p oznaczamy $\mathsf{T}_p M$. Jest to podprzestrzeń wektorowa przestrzeni X. Jeżeli $f = F|_M$, to dla $v \in \mathsf{T}_p M$ mamy $F'(p)v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \gamma)(0)$ gdzie $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ i $\dot\gamma(0) = v$. Wynika stąd, że $F'(p)v$ zalezy tylko od wartości F na M, czyli od f. F' ograniczone do wektorów stycznych do M oznaczać będziemy $\mathrm{d}f$, a ograniczone do $\mathsf{T}_p M$ przez $\mathrm{d}_p f$.

Stąd warunek konieczny na ekstremum f w punkcie p jest taki: $\mathrm{d}_p f = 0$.

Jeżeli $M = G^{-1}(0)$ i G spełnia założenia twierdzenia o odwzorowaniach uwikłanych (wersja 'geometryczna') to mamy
$$\mathsf{T}_p M = \ker G'(p) = \{v \in X \colon G'(p)v = 0\}.$$

METODA MNOŻNIKÓW LAGRANGE'A

Aby znaleźć punktu podejrzane o ekstrema, należy więc, w pierwszej kolejności, znaleźć przestrzenie styczne i następnie obliczać $\mathrm{d}f$. Istnieje, całe szczęście, alternatywna metoda *mnożników Lagrange'a*

Twierdzenie 3. *Niech $M = G^{-1}(0)$, gdzie $G\colon X \to Y$ spełnia założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej w punkcie p (tzn. jej pochodna jest surjekcją w tym punkcie – mówimy też, że p jest punktem regularnym odwzorowania G). Jeżeli $d_p f = 0$, to istnieje odwzorowanie liniowe $\Lambda\colon Y \to \mathbb{R}$ takie, że*
$$d_p F = \Lambda \circ G'(p).$$

Λ nazywa się funkcjonałem (mnożnikiem) Lagrange'a. Z powyższego twierdzenia widać, że dla znalezienia miejsc podejrzanych o ekstrema można, zamiast funkcji f, badać miejsca zerowe pochodnej (różniczki) funkcji $F - \Lambda \circ G$ znajdujące się na powierzchni M (pochodna $\Lambda \circ G$ w q jest równa $\Lambda \circ G'(q)$). Mamy też warunek dostateczny istnienia ekstremum.

Twierdzenie 4. *Niech będą spełnione założenia poprzedniego twierdzenia i niech*

$$d_pF - \Lambda \circ G'(p) = 0.$$

Jeżeli dla $0 \neq h \in \mathsf{T}_pM$

$$(F''(p) - \Lambda \circ G''(p))(h, h) > 0 \ (< 0),$$

to w punkcie p *funkcja* f *ma minimum (maksimum) lokalne.*

DOWÓD. W skrypcie.

□