Wykłady ....

CAŁKOWANIE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Zaczniemy od konstrukcji całki na przedziale domkniętym. Konstrukcja ta jest, w gruncie rzeczy, powtórzeniem definicji całki na odcinku domkniętym w $\mathbb{R}^1$.

Przedziałem domkniętym w $\mathbb{R}^m$ nazywamy zbiór D postaci

$$D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m].$$

Przypomnijmy, że podziałem odcinka $I = [a, b]$ nazywamy rodzinę $(P_i)_{i=1}^n$ odcinków domkniętych takich, że

(1) $\cup_{i=1}^{n_\pi} P_i = I$,
(2) $\operatorname{Int} P_i \cap \operatorname{Int} P_j = \emptyset$ dla $i \neq j$.

Niech $\pi_i \in \Pi([a_i, b_i])$ będzie podziałem odcinka $[a_i, b_i]$ dla $i = 1, \ldots, m$. Ciąg $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ określa podział przedziału D, którego elementami są przedziały $P_1 \times \cdots \times P_m$, gdzie $P_i \in \pi_i$. Oznaczmy przez $\Pi(D)$ rodzinę takich podziałów. W $\Pi(D)$ wprowadzamy relację skierowania

$$\pi \succ \pi' \text{ jeżeli } \pi_i \succ \pi_i' \text{ dla każdego } i = 1, \ldots m.$$

Miarą $m(D)$ przedziału D nazywamy liczbę

$$m(D) = \prod_{i=1}^{m} |b_i - a_i|.$$

Dla ograniczonej funkcji $f\colon D \to \mathbb{R}$ i dla podziału $\pi = (D_k)$ definiujemy sumę górną i sumę dolną

$$\overline{S}(\pi, f) = \sum_k m(D_k) \sup_{x \in D_k} f(x)$$

$$\underline{S}(\pi, f) = \sum_k m(D_k) \inf_{x \in D_k} f(x).$$

Ciąg uogólniony $\pi \mapsto \overline{S}(\pi, f)$ jest malejący i ograniczony (podobnie jak w przypadku jednowymiarowym), więc zbieżny. Podobnie ciąg sum dolnych jest zbieżny. Granice tych ciągów

$$\overline{\int}_D f = \lim_{\succ} \overline{S}(\pi, f) = \inf_{\pi \in \Pi(D)} \overline{S}(\pi, f)$$

$$\underline{\int}_D f = \lim_{\succ} \underline{S}(\pi, f) = \sup_{\pi \in \Pi(D)} \underline{S}(\pi, f),$$

nazywamy odpowiednio całką górną i całką dolną.

Funkcję ograniczoną na D nazywamy *całkowalną w sensie Riemanna*, jeżeli

$$\overline{\int}_D f = \underline{\int}_D f =: \int_D f.$$

Zbiór funkcji całkowalnych na D oznaczamy $\mathcal{R}(D)$.

Twierdzenie 1. *Podstawowe własności całki Riemanna, wynikające bezpośrednio z definicji:*

(1) *Funkcja stała jest całkowalna i jeśli $f(x) = c$, to*

$$\int_D f = c \cdot m(D).$$

(2) *Jeśli $f \in \mathcal{R}(D)$ i $c \in \mathbb{R}$, to $cf \in \mathcal{R}(D)$ i*

$$\int_D (cf) = c \int_D f.$$

(3) *Jeśli $f, g \in \mathcal{R}(D)$, to $f + g \in \mathcal{R}(D)$ i*

$$\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g.$$

(4) *Jeśli* $f, g \in \mathcal{R}(D)$ *i* $f \leqslant g$, *to*

$$\int_D f \leqslant \int_D g.$$

DOWÓD. Dowody tych własności całki są powtórzeniem dowodów odpowiednich własności w przypadku całki na $I \subset \mathbb{R}$. $\square$

Użyteczna jest inna, równoważna definicjae całki Riemanna (odnosi się to także do przypadku $m = 1$). Zamiast sumy górnej i sumy dolnej bierzemy sumę

$$S(\pi, (\xi_i), f) = \sum_k m(D_k) f(\xi_k),$$

gdzie $\xi_i \in D_i$ jest dowolnym wyborem punktu. W zbiorze par $(\pi, (\xi_i))$ wprowadzamy relację

$$(\pi, (\xi_i)) \gtrdot (\pi', (\xi'_j)) \quad \text{jeżeli} \quad \pi \succ \pi'.$$

Całka jest granicą sum ze względu na tą relację. Istnienie tej granicy możemy przyjąć jako definicję całkowalności, a samą granicę jako definicję wartości całki. Taka definicja nie wymaga operowania supremum i infimum w zbiorze wartości funkcji podcałkowej, więc nadaje sie do definicji całki z funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha.

TWIERDZENIE LEBESGUE'A

W dalszym ciągu będzie mowa o własnościach całki, które można by dowodzić analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym. Jednak zamiast tego, posłużymy się ważnym twierdzeniem Lebesque'a o kryterium całkowalności.

Definicja 1. Zbiór $E \in \mathbb{R}^m$ ma *miarę Lebesque'a zero*, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje ciąg przedziałów $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ taki, że $E \subset \cup_i D_i$ i $\sum_i m(D_i) < \epsilon$.

Wnioski.

(1) Jeżeli E jest miary Lebesgue'a zero i $A \subset E$, to A jest też miary Lebesque'a zero.
(2) Jeżeli $E_i, i = 1, 2, \dots$ są miary Lebesgue'a zero i $A = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, to A jest też miary Lebesque'a zero.

DOWÓD. Dowodu wymaga tylko punkt drugi. Zbiór E_i jest miary Lebesgue'a zero, więc dla każdego $\epsilon > 0$ istnieją przedziały $D_{i,j}$ takie, że $E_i \subset \cup_j D_{i,j}$ i $\sum_j m(D_{i,j}) < \dfrac{\epsilon}{2^i}$. Oczywiście mamy $A \subset \cup_{i,j} D_{i,j}$ i

$$\sum_{i,j} m(D_{i,j}) = \sum_i \sum_j m(D_{i,j}) < \sum_i \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon.$$

A jest miary Lebesgue'a zero. $\square$

Przykład. Brzeg przedziału domkniętego jest miary Lebesgue'a zero.

Twierdzenie 2. *(Lebesgue'a) Niech* f *będzie funkcją ograniczoną na przedziale domkniętym* D. $f \in \mathcal{R}(D)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór punktów nieciągłości funkcji* f *jest miary Lebesgue'a zero.*

CAŁKA PO DOWOLNYM ZBIORZE OGRANICZONYM

Przypomnijmy definicję funkcji charakterystycznej χ_A zbioru $A \subset \mathbb{R}^m$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in A \\ 0, & \text{dla } x \notin A. \end{cases}$$

Definicja 2. Niech $A \subset D \subset \mathbb{R}^m$ i niech $f\colon D \to \mathbb{R}$. *Całkę* $\int_A$f z funkcji f po zbiorze A definiujemy wzorem (o ile prawa strona ma sens)

$$\int_A f = \int_D \chi_A f.$$

Jeżeli całka ma sens, to mówimy, że f jest *całkowalna na* A i piszemy $f \in \mathcal{R}(A)$.

Uwaga. Funkcja f nie musi być określona na całym D. Wystarczy, jeżeli jest określona na A. Wówczas kładziemy

$$\int_A f = \int_A \widetilde{f},$$

gdzie

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A. \end{cases}$$

Oczywiście $\chi_A \widetilde{f} = \widetilde{f}$.

Twierdzenie 3. *Niech $A \subset D$. Całka $\int_A f$ istnieje dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}(D)$ wtedy i tylko wtedy, gdy brzeg $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{Int} A$ jest miary Lebesgue'a zero.*

DOWÓD. Z definicji brzegu wynika, że zbiór ∂A jest równy zbiorowi punktów nieciągłości funkcji χ_A więc z istnienia całki z jedności wynika, że brzeg ma miarę Lebesgue'a zero. Z kolei zbiór punktów nieciągłości iloczynu $f\chi_A$ zawarty jest w sumie zbioru punktów nieciągłości f i zbioru punktów nieciągłosci χ_A. Suma dwóch zbiorów miary Lebesgue'a zero jest miary Lebesgue'a zero, więc zbiór punktów nieciągłości iloczynu $f\chi_A$ jest miary Lebesgue'a zero i z Twierdzenia Lebesgue'a wynika całkowalność $f\chi_A$. $\square$

Powyższe twierdzenie usprawiedliwia następującą definicję:

Definicja 3. Zbiór $A \subset D \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy *jordanowsko mierzalnym* (J-mierzalnym), jeżeli jego brzeg jest miary Lebesgue'a zero lub równoważnie, jeżeli jego funkcja charakterystyczna χ_A jest całkowalna na D w sensie Riemanna. Całkę $\int_D \chi_A$ nazywamy *miarą Jordana* zbioru A *i oznaczamy* $m(A)$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli zbiory A_1, A_2 są J-mierzalne, to*

(1) $A_1 \cap A_2$ *jest J-mierzalny,*
(2) $A_1 \cup A_2$ *jest J-mierzalny i jeśli* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, *to* $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$,
(3) $A_1 \setminus A_2$ *jest J-mierzalny i* $m(A_1 \setminus A_2) = m(A_1) - m(A_1 \cap A_2)$.

DOWÓD. Z definicji wnętrza zbioru (Int A jest największym zbiorem otwartym, zawartym w A) mamy $\mathfrak{Int}(A_1 \cup A_2) \supset \operatorname{Int}(A_1) \cup \operatorname{Int}(A_2)$ oraz $\operatorname{Int}(A_1 \cap A_2) = \operatorname{Int}(A_1) \cap \operatorname{Int}(A_2)$. Z kolei dla domknięć mamy relacje $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ oraz $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. Z definicji brzegu mamy więc

$$\partial(A_1 \cup A_2) \subset (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \setminus (\operatorname{Int}(A_1) \cup \operatorname{Int}(A_2)) \subset \partial(A_1) \cup \partial(A_2).$$

Podobnie

$$\begin{aligned} \partial(A_1 \cap A_2) &\subset (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \setminus (\operatorname{Int}(A_1) \cap \operatorname{Int}(A_2)) = \\ &= \big((\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \setminus \operatorname{Int}(A_1)\big) \cup \big((\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \setminus \operatorname{Int}(A_2)\big) \subset \partial(A_1) \cup \partial(A_2). \end{aligned}$$

Brzegi zbiorów $A_1 \cup A_2$ i $A_1 \cap A_2$ są więc miary Lebesgue'a zero. Udowodniliśmy dwa pierwsze punkty. Podobnie dostajemy mierzalność $A_1 \setminus A_2$.

Dla dowolnych zbiorów A_1 i A_2 mamy $\chi_{A_1} + \chi_{A_2} = \chi_{A_1 \cup A_2} + \chi_{A_1 \cap A_2}$. Jeżeli więc $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, to $\chi_{A_1 \cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2}$ i

$$m(A_1 \cup A_2) = \int_D (\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) = \int_D \chi_{A_1} + \int_D \chi_{A_2} = m(A_1) + m(A_2),$$

gdzie $D \supset A_1 \cup A_2$. W szczególności dostajemy

$$m(A_1 \setminus A_2) = m(A_1) - m(A_1 \cap A_2).$$

$\square$

Twierdzenie 5. *Jeżeli brzeg zbioru A jest lokalnie wykresem odwzorowania ciągłego, to A jest J-mierzalny.*

DOWÓD. Wystarczy pokazać, że jeżeli mamy odwzorowanie ciągłe
$$F\colon \mathbb{R}^{m-n} \supset D' \to R^n,$$
gdzie D' jest przedziałem domkniętym, to jego wykres jest miary Lebesgue'a zero. D' (zbiór domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}^{m-n}$) jest zbiorem zwartym, więc odwzorowanie F jest jednostajnie ciągłe. Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje zatem $\delta > 0$ takie, że dla każdego $x = (x_1, \dots, x_{n-m})$ mamy $F([x-\delta, x+\delta]) \subset [F(x)-\epsilon, F(x)+\epsilon]$, gdzie $[x-\delta, x+\delta] = [x_1-\delta, x_1+\delta] \times \cdots \times [x_{n-m}-\delta, x_{n-m}+\delta]$. Zatem wykres F nad przedziałem $[x-\delta, x+\delta]$ jest zawarty w przedziale $[x-\delta, x+\delta] \times [F(x)-\epsilon, F(x)+\epsilon]$, którego miara wynosi $(2\delta)^{m-n} \cdot (2\epsilon)^n$. Stąd wykres F zawarty jest w sumie przedziałów, których suma miar jest mniejsza od $m(D') \cdot (2\epsilon)^n$. $\square$
Możemy teraz wymienić najważniejsze własności całki Riemanna na zbiorach J-mierzalnych.

Twierdzenie 6. *Niech zbiory $A, A_1, A_2 \subset D \subset R^m$ będą J-mierzalne i niech $f, g \in \mathcal{R}(A)$. Wówczas*

(1) *Jeżeli $A_1 \subset A$, to $f \in \mathcal{R}(A_1)$.*
(2) *Jeżeli $\mathrm{m}(A) = 0$, to $\int_A f = 0$.*
(3) *Jeżeli $A = A_1 \cup A_2$ i wnętrza A_1 oraz A_2 nie mają wspólnego punktu, to*
$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$
(4) *Dla $c \in \mathbb{R}$ mamy*
$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g, \quad \int_A (cf) = c\int_A f.$$
(5) *$f \cdot g \in \mathcal{R}(A)$.*
(6) *Jeżeli $f \leqslant g$, to $\int_A f \leqslant \int_A g$.*
(7) *$|f| \in \mathcal{R}(A)$ i*
$$\left|\int_A f\right| \leqslant \int_A |f|.$$
(8) *Jeżeli $g \geqslant 0$, $m = \inf_{x\in A} f(x)$ i $M = \sup_{x\in A} f(x)$, to dla pewnego $\mu \in [m, M]$ mamy*
$$\int_A fg = \mu \int_A g.$$
Jeżeli ponadto funkcja f jest ciągła na D i zbiór A jest spójny, to istnieje punkt $\xi \in \bar{A}$ taki, że
$$\int_A fg = f(\xi)\int_A g.$$

DOWÓD. Niech tak jak poprzednio,
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dla } x \in A \\ 0, & \text{dla } x \notin A. \end{cases}$$

(1) Punkty nieciągłości funkcji $\widetilde{f}$ i χ_{A_1} tworzą zbiory miary Lebesgue'a zero. To samo można więc powiedzieć o ich iloczynie.
(2) Mamy $\inf_{x\in A} f(x)\chi_A \leqslant \chi_A \widetilde{f} \leqslant \sup_{x\in A} f(x)\chi_A$, a stąd
$$0 = \int_D \inf_{x\in A} f(x)\chi_A \leqslant \int_D \widetilde{f} \leqslant \int_D \sup_{x\in A} f(x)\chi_A = 0.$$
(3) Z założeń wynika, że $m(A_1 \cap A_2) = 0$, więc z poprzedniego punktu i z Twierdzenia 1
$$\int_{A_1} f + \int_{A_2} f = \int_D \widetilde{f}(\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) = \int_D \widetilde{f}\chi_{A_1\cup A_2} + \int_D \widetilde{f}\chi_{A_1\cap A_2} = \int_D \widetilde{f}\chi_{A_1\cup A_2}.$$
(4)
$$\int_A (f+g) = \int_D (\widetilde{f} + \widetilde{g}) = \int_D \widetilde{f} + \int_D \widetilde{g} = \int_A f + \int_A g.$$
Podobnie dowodzimy drugą równość.

(5) Punkty nieciągłości funkcji $\widetilde{f}$ i $\widetilde{g}$ tworzą zbiory miary Lebesgue'a zero. To samo można więc powiedzieć o ich iloczynie.
(6) Jeżeli $f \leqslant g$, to również $\widetilde{f} \leqslant \widetilde{g}$ i korzystamy z Twierdzenia 1.
(7) $\widetilde{|f|} = |\widetilde{f}|$, więc $\widetilde{|f|}$ jest całkowalna na D, a ponieważ $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, dostajemy z poprzedniego punktu żądaną nierówność.
(8) Mamy $mg \leqslant fg \leqslant Mg$, więc z poprzednio udowodnionych własności wynika, że

$$m \int_A g \leqslant \int_A fg \leqslant M \int_A g.$$

Jeżeli $c = \int_A g = 0$, to z nierówności tej $\int_A fg = 0$ i żądana równość zachodzi dla dowolnego μ. Jeżeli $c \neq 0$, to kładąc $\mu = \frac{1}{c} \int_A fg$ dostajemy tezę. W przypadku funkcji ciągłej (na całym D) jej kresy są osiągane w $\bar{A}$. Ze spójności A (więc i $\bar{A}$) oraz z własności Darboux wynika istnienie ξ.

□

TWIERDZENIE FUBINIEGO I O ZAMIANIE ZMIENNYCH

Rozpatrywane dotychczas własności całki Riemanna nie przybliżają nas do praktyki liczenia całek wielokrotnych. Można z powodzeniem przyjąć tezę, że potrafimy liczyć jedynie całki na R^1 oraz sprowadzające się do nich. Dowodzone poniżej twierdzenie pokazuje, jak liczenie całek wielokrotnych sprowadza się do liczenia wielokrotnego całek jednokrotnych (mówi się o *całce iterowanej*).

Twierdzenie 7. *(Fubiniego) Niech $D_1 \subset \mathbb{R}^m$, $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ będą przedziałami i niech $D = D_1 \times D_2$. Dla funkcji $f \in \mathcal{R}(D)$ zdefiniujmy funkcje $\varphi\colon D_1 \to \mathbb{R}$ i $\psi\colon D_1 \to \mathbb{R}$ wzorami*

$$\varphi(x) = \underline{\int}_{D_2} f(x, \cdot), \quad \psi(x) = \overline{\int}_{D_2} f(x, \cdot).$$

Wówczas $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(D_1)$ i

$$\int_D f = \int_{D_1} \varphi = \int_{D_1} \psi.$$

W ten sposób liczenie całek wielokrotnych sprowadza się do liczenia całek iterowanych. Musimy jednak z góry wiedzieć, że całka istnieje, tzn. że funkcja f jest całkowalna.

Twierdzenie 8. *(o zamianie zmiennych) Niech $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ będą ograniczonymi obszarami w $\mathbb{R}^m$, niech $K \subset \mathcal{O}$ będzie dziedziną skończoną a odwzorowanie $\Psi\colon \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ diffeomorfizmem klasy C^1. Wówczas dla funkcji ciągłej $f\colon K \to \mathbb{R}$ mamy*

$$\int_K f = \int_{K'} f \circ \Psi \cdot |\det \Psi'|,$$

gdzie $K' = \Psi^{-1}(K)$.

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

Całka niewłaściwa (na zbiorze niezwartym) w przypadku wielowymiarowym różni się istotnie od omawianego w semestrze pierwszym przypadku jednowymiarowego.

Niech U będzie obszarem niezwartym. Rodzina obszarów zwartych K, zawartych w U jest skierowana relacją zawierania. Przypuśćmy, że funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest całkowalna na każdym K. Możemy zdefiniować całkę po U jako granicę ciągu uogólnionego

$$K \mapsto \int_K f.$$

Różnica między przypadkiem jedno- i wielowymiarowym polega na tym, że w przypadku jednowymiarowym ograniczaliśmy się do specjalnych zbiorów zwartych – przedziałów domkniętych. Rezultatem takiego ograniczenia ciągu uogólnionego jest istnienie funkcji całkowalnych na przedziale niezwartym, których wartości bezwzględne nie są całkowalne. W przypadku wielowymiarowym ograniczenie ciągu do przedziałów zwartych nie jest możliwe (nie można nimi na ogół wyczerpać obszaru niezwartego). W efekcie całkowalność funkcji pociąga za sobą jej bezwzględną całkowalność.

To samo mielibyśmy w przypadku jednowymiarowym, gdyby brać granicę całek ze wzgledu nie tylko na przedziały zwarte, ale i na sumy skończone przedziałów zwartych.