# Wykłady ostatnie

## CAŁKA LEBESGUE'A

Zasadnicza różnica koncepcyjna między całką Riemanna i całką Lebesgue'a polega na zamianie ról przestrzeni wartości i przestrzeni argumentów przy konstrukcji sum górnych i dolnych. W całce Riemanna suma górna (dolna) była związana z podziałem obszaru całkowania na przedziały, a otrzymywaliśmy ją sumując objętości przedziałów wymnożone przez supremum (infimum) wartości funkcji na tym przedziale. W całce Lebesgue'a dzielimy na odcinki przedział wartości funkcji, a sumę dolną dostajemy mnożąc wartość dolną odcinka podziału przez „objętość" przeciwobrazu tego odcinka. Problem polega na tym, że przeciwobraz ten może być bardzo odległy kształtem od przedziału. Musimy się więc nauczyć liczenia objętości takich zbiorów. Wprowadzona w poprzednim rozdziale miara Jordana nie jest tutaj odpowiednia. Tylko skończone sumy zbiorów J-mierzalnych są J-mierzalne i tylko dla skończonych rodzin zbiorów miara jest addytywna. Przełomowa idea w teorii Lebesgue'a polega na żądaniu, by przeliczalna suma zbiorów mierzalnych była zbiorem mierzalnym i by miara była przeliczalnie addytywna.

Rodzinę $\mathcal{P}$ podzbiorów przestrzeni $X$ nazywamy *$\sigma$ - algebrą*, jeżeli dla $A, B \in \mathcal{P}$

(1) $A \cup B \in \mathcal{P}$,
(2) $A \cap B \in \mathcal{P}$,
(3) $A \setminus B \in \mathcal{P}$,
(4) $X \in \mathcal{P}$.
(5) $\bigcup_n A_n \in \mathcal{P}$, gdzie $A_n \in \mathcal{P}, \ n = 1, 2, \ldots$.

(Własności te nie są niezależne, np. własność (2) wynika z pozostałych.)

Jeżeli spełnione sa tylko warunki 1-4, to mowimy o algebrze zbiorów.

Z definicji tej wynika, że zbiór pusty należy do algebry, skończone sumy i przecięcia zbiorów z algebry też należą do algebry. Jeżeli mamy $\sigma$-algebrę, to przecięcia przeliczalnych rodzin zbiorów z algebry należą do algebry.

W dalszym ciągu symbolem $A \sqcup B$ oznacząć będziemy sumę $A \cup B$ z warunkiem $A \cap B = \emptyset$, a symbolem $\overline{\mathbb{R}}_+$ oznaczać będziemy $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, \infty[ \cup \{+\infty\}$ z rozszerzonym działaniem dodawania:

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty, \quad (+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$$

Funkcję $\varphi \colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ na rodzinie zbiorów $\mathcal{P}$ nazywamy *addytywną*, jeżeli

$$\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B),$$

dla $A, B, A \sqcup B \in \mathcal{P}$. Funkcję addytywną nazywamy *$\sigma$-addytywną*, jeżeli

$$\varphi\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_1^{\infty} \varphi(A_n).$$

Symbol $\sqcup A_n$ oznacza, że zbiory $A_n$ są parami rozłączne, czyli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Funkcję $\sigma$-addytywną na $\sigma$-algebrze $\mathcal{P}$ nazywamy *miarą* na $\mathcal{P}$.

Naszym celem jest konstrukcja $\sigma$-algebry zbiorów, zawierającej przedziały, i miary na niej, która na przedziałach jest miarą Jordana.

## KONSTRUKCJA $\sigma$-ALGEBRY ZBIORÓW I MIARY.

Zaczynamy od zbiorów *elementarnych*, czyli zbiorów postaci $A = \bigsqcup_1^n D_i$, tzn. $A$ jest sumą rozłączną skończonej liczby przedziałów. Rodzinę wszystkich zbiorów elementarnych oznaczamy $\mathcal{E}$.

Miarę zbioru elementarnego $A = \bigsqcup_1^n D_i$ definiujemy wzorem

$$m(A) = \sum_{i=1}^{N} m(D_i).$$

Pokazuje się, że miara $m(A)$ nie zależy od przedstawienia zbioru jako sumy przedziałów i że jest $\sigma$-addytywna.

Następnym krokiem jest wprowadzenie *miary zewnętrznej* $\mu^*(E)$ dowolnego zbioru $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mu^*(E) = \inf_{(A_i)} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

gdzie inf bierze się po wszystkich ciągach $(A_i)$ otwartych zbiorów elementarnych takich, że $E \subset \bigcup_i A_i$.

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli $A \in \mathcal{E}$, to $\mu^*(A) = m(A)$.*

Ponadto, $\mu^*$ jest subaddytywną funkcją zbiorów, tzn.

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Wprowadzamy teraz 'odległość' między zbiorami:
*Odległością* między zbiorami $A$ i $B$ nazywamy liczbę

$$\rho(A,B) = \mu^*((A \setminus B) \cup (B \setminus A)).$$

Funkcja $\rho$ posiada następujące własności:
(1) $\rho(A,A) = 0$,
(2) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$ (symetria),
(3) $\rho(A,B) \leqslant \rho(A,C) + \rho(C,B)$ (nierówność trójkąta),
(4) $\rho(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leqslant \rho(A_1,B_1) + \rho(A_2,B_2)$,
(5) $\rho(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant \rho(A_1,B_1) + \rho(A_2,B_2)$,
(6) $\rho(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \leqslant \rho(A_1,B_1) + \rho(A_2,B_2)$.

Rodziną $\mathfrak{M}_F$ zbiorów *ograniczonych i mierzalnych w sensie Lebesgue'a* nazywamy domknięcie rodziny $\mathcal{E}$ w sensie odległości $\rho$, tzn.,

$$A \in \mathfrak{M}_F \text{ jeżeli istnieje ciąg } (A_n) \text{ taki, że } A_n \in \mathcal{E} \text{ i } \lim_{n\to\infty} \rho(A_n, A) = 0.$$

Rodziną $\mathfrak{M}$ podzbiorów $\mathbb{R}^m$, *mierzalnych w sensie Lebesgue'a*, nazywamy rodzinę przeliczalnych sum zbiorów ograniczonych i mierzalnych

$$\mathfrak{M} = \{A \colon A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathfrak{M}_F\}.$$

Miarę zewnętrzną $\mu^*$ ograniczoną do rodziny $\mathfrak{M}$ nazywamy *miarą Lebesgue'a* i oznaczamy $\mu$. Z definicji $\mathfrak{M}_F$ wynika że $\mu(A) < \infty$ dla $A \in \mathfrak{M}_F$.

**Twierdzenie 2.** *Rodzina $\mathfrak{M}$ jest $\sigma$-algebrą, a funkcja $\mu$ jest $\sigma -$ addytywna (jest więc miarą).*

**Twierdzenie 3.** *Niech $A \in \mathfrak{M}$, wówczas $A \in \mathfrak{M}_F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(A) < \infty$.*

**Twierdzenie 4.** *Niech będzie $T \colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$. Jeżeli dla każdej pary $(i,j)$ istnieje pochodna $\dfrac{\partial T^i}{\partial x_j}$ i jest ciągła, to odwzorowanie $T$ jest różniczkowalne w sposób ciągły na $U$.*

Poniżej wymienione sa najważniesze klasy zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.
(1) Zbiory otwarte są mierzalne.
(2) Zbiory domknięte są mierzalne.
(3) Zbiory borelowskie są mierzalne.
(4) Zbiory miary Lebesgue'a zero są mierzalne i ich miara jest równa zero.
(5) Zbiór, którego miara zewnętrzna jest zero jest mierzalny i jest miary Lebesgue'a zero.

## FUNKCJE MIERZALNE.

**Definicja 1.** Funkcję $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nazywamy *mierzalną* (w sensie Lebesgue'a), jeżeli dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in \mathbb{R}^m \colon f(x) > a\}$ jest mierzalny (w sensie Lebesgue'a).

Przykładem funkcji mierzalnej jest funkcja ciągła (przeciwobraz zbioru otwartego jest otwarty). Oczywiste też, że zbiór $E$ jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego funkcja charakterystyczna $\chi_E$ jest mierzalna.

**Twierdzenie 5.** *Jeżeli funkcja $f$ ma jedną z poniższych własności:*

- *dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x\colon f(x) \leqslant a\}$ jest mierzalny,*
- *dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x\colon f(x) \geqslant a\}$ jest mierzalny,*
- *dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x\colon f(x) < a\}$ jest mierzalny,*

*to jest mierzalna*

**Twierdzenie 6.** *Jeżeli funkcje $f_1, \ldots, f_k$ są mierzalne i $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem ciągłym, to*

$$h = F \circ (f_1, \ldots, f_k)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

*jest funkcją mierzalną.*

**Wnioski.** Jeżeli funkcje $f, g$ są mierzalne, to

(1) funkcja $|f|$ jest mierzalna,

(2) funkcje $f + g,\ f \cdot g,\ \dfrac{f}{g}$ są mierzalne,

(3) funkcja

$$f \cap g\colon x \mapsto \min(f(x), g(x))$$

jest mierzalna,

(4) funkcja

$$f \cup g\colon x \mapsto \max(f(x), g(x))$$

jest mierzalna.

(5) Jeżeli $\mu^*(\{x\colon f(x) \neq 0\}) = 0$, to funkcja $f$ jest mierzalna.

(6)

**Twierdzenie 7.** *Jeżeli $f$ jest mierzalna i $f = g$ p.w. (prawie wszędzie), tzn. $\mu^*(\{x\colon g(x) \neq f(x)\}) = 0$, to $g$ jest też mierzalna.*

## CAŁKA LEBESGUE'A

Niech $f$ będzie dodatnią funkcją mierzalną. Niech $\pi \in \Pi([0, \infty[)$ będzie podziałem zadanym przedziałami $[a_i, a_{i+i}[$, przy czym $a_0 = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Dla takiego podziału tworzymy sumę (dolną) $S(\pi, f)$:

$$S(\pi, f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(\{x\colon a_i \leqslant f(x) < a_{i+1}\}).$$

Oczywiste, że dla $\pi \succ \pi'$ mamy $S(\pi, f) \geqslant S(\pi', f)$.

**Definicja 2.** Funkcję $f \geqslant 0$ nazywamy *całkowalną wzgledem miary $\mu$ ( w sensie Lebesgue'a)*, jeżeli ciąg uogólniony $\pi \mapsto S(\pi, f)$ jest ograniczony (więc zbieżny). Granicę oznaczamy $\int f \mathsf{d}\mu$ i nazywamy *całką względem miary $\mu$* (*całką Lebesgue'a*) funkcji $f$.

Dowolną funkcję $f$ nazywamy całkowalną, jeżeli jej części - dodatnia $f^+$ i ujemna $f^-$ są całkowalne. Całkę definiujemy formułą

$$\int f \mathsf{d}\mu = \int f^+ \mathsf{d}\mu - \int f^- \mathsf{d}\mu.$$

**Definicja 3.** Funkcja $f$ jest *całkowalna na* zbiorze $E$, jeżeli funkcja $f \cdot \chi_E$ jest mierzalna i całkowalna. Całką z $f$ na zbiorze $E$ nazywać będziemy liczbę

$$\int_E f \mathsf{d}\mu = \int f \cdot \chi_E \mathsf{d}\mu$$

Rodzinę funkcji całkowalnych na $E$ względem miary $\mu$ oznaczać będziemy $\mathcal{L}(E, \mu)$ (dla całki Lebesgue'a również $\mathcal{L}(E)$).

Do całkowalności funkcji $f$ na $E$ wystarczy mierzalność, ograniczoność $f$ oraz ograniczoność (w sensie miary) zbioru $E$:

**Twierdzenie 8.** *Funkcja $f$ mierzalna i ograniczona na zbiorze $E$ miary skończonej ($\mu(E) < \infty$) jest całkowalna na $E$.*

**Twierdzenie 9.** *Jeżeli funkcja $f$ jest całkowalna, to odwzorowanie*

$$\mathfrak{M} \ni E \mapsto \int_E f \, d\mu$$

*jest $\sigma$-addytywne.*

**Wnioski.**

(1) Jeżeli funkcje $f, g$ są całkowalne na $E$ i $f \leqslant g$, to

$$\int_E f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \mathrm{d}\mu.$$

(2) Jeżeli $f$ jest nieujemną funkcją mierzalną i $f \leqslant g$, przy czym funkcja $g$ jest całkowalna, to funkcja $f$ też jest całkowalna.

(3) Jeżeli funkcja $f$ jest całkowalna na $A$ i $B$, to jest też całkowalna na $A \cup B$.

(4) Funkcja mierzalna $f$ jest całkowalna na $E$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $|f|$ jest całkowalna na $E$.

(5)

**Twierdzenie 10.** *Jeżeli $f, g$ są całkowalne na $E$, to $f + g$ jest całkowalna na $E$ i*

$$\int_E (f+g) d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

PODSTAWOWE TWIERDZENIA

Fundamentalnym twierdzeniem w teorii (i praktyce) całki Lebesgue'a jest twiedzenie o zbieżności majoryzowanej.

Mówimy, że ciąg funkcji $(f_n)$ jest zbieżny do funkcji $f$ *$\mu$-prawie wszędzie*,

$$f_n \xrightarrow{p.w.} f,$$

jeżeli

$$\mu(\{x \colon f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0.$$

Ogólnie mówimy, że jakaś własność *zachodzi prawie wszędzie* ($\mu$-prawie wszędzie), jeżeli nie zachodzi tylko na zbiorze miary zero.

**Twierdzenie 11.** *(Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej)*
*Niech $(f_n)$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych takich, że $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ i niech dla pewnej funkcji całkowalnej $g$ oraz dla każdego $n$ zachodzi prawie wszędzie nierówność $|f_n(x)| \leqslant g(x)$. Wówczas $f$ jest też całkowalna i*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

**Twierdzenie 12.** *(O ciagłości całki z parametrem.)*
*Niech $(A, \rho)$ będzie przestrzenią metryczną i niech*

$$f \colon A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

*będzie funkcją o następujących własnościach:*

(1) *funkcja $a \mapsto f(a, x)$ jest ciągła w $a_0$ dla prawie wszystkich $x$,*

(2) *dla wszystkich $a$ funkcje $x \mapsto f_a(x) = f(a, x)$ są całkowalne,*

(3) *istnieje funkcja całkowalna $g$ i otoczenie $O \ni a_0$ takie, że $|f(a, x)| \leqslant g(x)$ dla $a \in O$ i prawie wszystkich $x$.*

*Wówczas funkcja*

$$F \colon A \to \mathbb{R} \colon a \mapsto \int f_a d\mu$$

*jest ciągła w $a_0$*

**Twierdzenie 13.** (O różniczkowaniu pod znakiem całki.) *Niech $A$ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni unormowanej i niech $f \colon A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o następujących własnościach:*

(1) *funkcja $a \mapsto f(a, x)$ posiada ciągłą pochodną kierunkową w kierunku $e$ dla wszystkich $a$ i dla prawie wszystkich $x$,*

(2) *dla wszystkich $a$ funkcje $x \to f_a(x) = f(a, x)$ są całkowalne,*
(3) *istnieje funkcja całkowalna $g$ taka, że $|\nabla_e f(a, x)| \leqslant g(x)$ dla $a \in A$ i prawie wszystkich $x$.*

*Wówczas funkcja*

$$F\colon A \to \mathbb{R}\colon a \mapsto \int f_a \mathsf{d}\mu$$

*jest różniczkowalna w kierunku $e$, funkcje $\nabla_e f(a, \cdot)$ są całkowalne, i*

$$\nabla_e F(a) = \int \nabla_e f(a, \cdot) \mathsf{d}\mu.$$

**Twierdzenie 14.** (Fubiniego dla calki Lebesgue'a.) *Niech $f\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną, nieujemną lub całkowalną. Wówczas*

(1) *dla prawie każdego $y \in \mathbb{R}^n$ funkcja $\mathbb{R}^m \ni x \mapsto f(x, y)$ jest mierzalna,*
(2) *dla prawie każdego $x \in \mathbb{R}^m$ funkcja $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto f(x, y)$ jest mierzalna,*
(3) *funkcja $x \mapsto \int f(x, y) \mathsf{d}\mu_y$ jest mierzalna, określona prawie wszędzie,*
(4) *funkcja $y \mapsto \int f(x, y) \mathsf{d}\mu_x$ jest mierzalna, określona prawie wszędzie.*

*Ponadto*

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f \mathsf{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) \mathsf{d}\mu_y \right) \mathsf{d}\mu_x = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \mathsf{d}\mu_x \right) \mathsf{d}\mu_y,$$

*tzn. jeżeli istnieje jedna z tych całek, to istnieją pozostałe i są równe.*

**Twierdzenie 15.** (O zamianie zmiennych.) *Niech $\mathcal{O}$ i $\mathcal{O}'$ będą otwartymi podzbiorami w $\mathbb{R}^m$ i niech $\Psi\colon \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ będzie dyfeomorfizmem klasy $C^1$. Jeżeli* $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}$, *to*

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \mathsf{d}\mu = \int_{\mathcal{O}} f \mathsf{d}\mu = \int_{\mathcal{O}'} f \circ \Psi |\det \Psi'| \mathsf{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^m} f \circ \Psi |\det \Psi'| \mathsf{d}\mu,$$

*tzn. jeżeli istnieje jedna całka, to istnieją obie i są równe.*