TWIERDZENIE COHENA O FAKTORYZACJI

Jan Kisyński

1. A = algebra unormowana , I = zbiór skierowany

ograniczona lewostronna jedność aproksymatywna jest to sieć (net) $(e_\iota)_{\iota\in I}$ elementów algebry A taka, że

$$\sup_{\iota\in I} \|e_\iota\|_A = M < \infty$$

$$\lim_{\iota} \|e_\iota a - a\|_A = 0$$

2. Przypuśćmy, że A jest przestrzenią liniową unormowaną, X jest przestrzenią Banacha i T jest algebraicznie liniowym odwzorowaniem A w $L(X)$.

Z twierdzenia Banacha-Steinhausa wynika, że jeśli

dla każdego $x \in X$ odwzorowanie $A \ni a \to T(a)x \in X$ jest ciągłe

to

odwzorowanie $A \ni a \to T(a) \in L(X)$ jest ciągłe w sensie topologii normowej w $L(X)$.

Wobec tego **ciągła reprezentacja algebry unormowanej A na przestrzeni Banacha X jest ciągłym homomorfizmem algebry unormowanej A w algebrę $L(X)$.**

3. LEMAT 1. *Jeśli* A *jest algebrą unormowaną z ograniczoną lewostronną jednością aproksymatywną* $(e_\iota)_{\iota\in I}$ *oraz* T *jest ciągła reprezentacją algebry* A *na przestrzeni Banacha* X *, to*

$\lim_\iota \|T(e_\iota)y - y\|_X = 0$ *dla każdego* $y \in \overline{span}\, T(A)X$.

Wobec tego

$$\overline{span}\, T(A)X = \overline{T(A)X} \quad ,$$

a więc $\overline{T(A)X}$ *jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni* X.

DOWÓD. Sieć operatorów $(T(e_\iota))_{\iota\in I}$ jest ograniczona w sensie normy $L(X)$ i jeśli $y \in T(A)X$, $y = T(a)x$, to $T(e_\iota)y - y = T(e_\iota a - a)x \to 0$ gdy $\iota \to \infty$. Wobec tego $T(e_\iota)y \to y$ dla każdego $y \in span\, T(A)X$ (skończone kombinacje liniowe) . Ponieważ sieć operatorów $(T(e_\iota))_{\iota\in I}$ jest ograniczona, więc także $T(e_\iota)y \to y$ dla każdego $y \in \overline{span}\, T(A)X$.

Moja świadomość była na poziomie powyższego Lematu, kiedy W.Chojnacki zwrócił mi uwagę na istnienie twierdzenia faktoryzacyjnego Cohena-Hewitta.

4. Twierdzenie Cohena-Hewitta powiada, że jeśli przy założeniach Lematu A jest algebrą Banacha , to $T(A)X = \overline{span}\, T(A)X$, t.j. $T(A)X$ jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni X. Twierdzenie C-H zawiera ponadto dodatkowe tezy dotyczące faktoryzacji elementu $y \in T(A)X$, t.j. dotyczące istnienia elementów $a \in A$ i $x \in X$ spełniających równość $y = T(a)x$ i mających jeszcze dodatkowe własności.

Przyciskany przez Chojnackiego przeanalizowałem szereg dowodów twierdzenia C-H i doszedłem do wniosku, że wszystkie one polegają w istocie na tym samym. To znaczy nikt istotnie nie zmienił głównej linii argumentacji Cohena, ani też tej argumentacji radykalnie nie uprościł. (Inna sprawa to klarowność.) Moje osiągnięcia polegają na uzyskaniu interesującej recenzji w Mathematical Reviews i na odkryciu istnienia twierdzenia Dixmiera i Malliavina o słabej faktoryzacji. Dla tego ostatniego, po odpowiednim (nie całkiem trywialnym) dostosowaniu, znalazłem zastosowanie w zakresie teorii półgrup-dystrybucji.

5. W Mathematical Reviews recenzent mojej pracy, matematyk australijski George A.Willis pisze o twierdzeniu Cohena : *The proof is difficult. One of the authors cited in the paper under review once remarked to me, "I used to think that I understood Cohen's factorization theorem but now I'm not so sure."*

6. <u>Twierdzenie Cohena.</u> *Załóżmy, że* A *jest algebrą Banacha z ograniczoną lewostronną jednością aproksymatywną* $(e_\iota)_{\iota\in I}$ *, oraz że* T *jest ciągłą reprezentacją algebry* A *na przestrzeni Banacha* X. *Wówczas* $T(A)X$ *jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni* X. *Ponadto dla każdego* $y \in T(A)X$ *i każdego* $\epsilon > 0$ *istnieją elementy* $a \in A$ *i* $x \in X$ *o następujących własnościach:*

(i) $y = T(a)x$,

(ii) $\|x - y\|_X \leq \epsilon$,

(iii) $x \in \overline{T(A)y}$,

(iv) *istnieje taki ciąg indeksów* $\iota_1, \iota_2, \dots$ *należących do zbioru skierowanego* I *i taki ciąg* $p_1, p_2, \dots$ *liczb ściśle dodatnich, że*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \quad i \quad a = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e_{\iota_n} .$$

[1] P.Cohen, *Factorization in group algebras* ,Duke Math. J. 26 (1959) 199-205 .

[2] J.Kisyński, *On Cohen's proof of the factorization theorem,* Ann.Polon.Math. 75.2 (2000) 177-192. MR 1821164 (2000b : 46082) .

Obszerna bibliografia podana jest w pracy [2] i jest uzupełniona w recenzji w Mathematical Reviews.

7. WNIOSEK OPARTY NA WARUNKU (iv). (Cohen). *Jeśli* G *jest grupą zwartą i* $y \in C(G)$ *jest funkcją ściśle dodatnią, to istnieją funkcja ściśle dodatnia* $x \in C(G)$ *i funkcja dodatnia* $a \in L^1(G)$ *takie, że* $\underset{G}{essinf}\, a > 0$ *oraz* $y = a * x$.

Cohen udowodnił, że nie można tu ścisłej dodatniości zastąpić przez nieujemność.

8. UNITYZACJA A_u ALGEBRY BANACHA A . Dowód twierdzenia Cohena oparty jest na unityzacji A_u algebry A . Unityzacja jest przy tym potrzebna również wtedy, gdy A jest algebrą z jednością (która w A_u przestaje być jednością) .

Unityzacja A_u algebry Banacha A jest to następująca algebra Banacha :

1. jako przestrzeń liniowa A_u jest sumą prostą $A_u = K + A$ przy czym K jest ciałem skalarów dla A ,
2. $\|\lambda + a\|_{A_u} = |\lambda| + \|a\|_A$ dla każdego $\lambda \in K$ i $a \in A$,
3. mnożenie w A_u jest określone przez wzór
   $(\lambda + a)(\mu + b) = \lambda\mu + (\mu a + \lambda b + ab)$, $\lambda, \mu \in K$, $a, b \in A$.

Jednością algebry Banacha A_u jest $1 = 1+0 \in K+A$. Reprezentacja T algebry A na przestrzeni Banacha X ma "kanoniczne" przedłużenie $\tilde{T}$ do reprezentacji algebry A_u na przestrzeni X określone przez wzór

$$\tilde{T}(\lambda + a)x = \lambda x + T(a)x \quad .$$

Przez ϕ i π oznaczamy projektory $\phi : A_u \to K$, $\pi : A_u \to A$ określone przez rozkład na sumę prostą $A_u = K+A$. Projektor ϕ jest funkcjonałem multiplikatywnym na A_u . Algebra A jest ideałem maksymalnym w algebrze A_u .

9. DOWÓD TWIERDZENIA COHENA . Niech $M = \sup_{\iota \in I} \|e_\iota\|_A$. Dowolnie ustalamy

$$\gamma \in \left]0 , \frac{1}{M+1}\right[\quad .$$

Dla $n=1 , 2,\ldots$ definiujemy

$$p_n = \gamma(1-\gamma)^{n-1} \quad .$$

Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \quad .$$

LEMAT 2. *Dla każdego* $y \in \overline{span}\, T(A)X$ *i każdego* $\epsilon > 0$ *istnieje ciąg indeksów* $\iota_1, \iota_2, \ldots$ *należących do zbioru skierowanego* I *taki, że ciąg* $a_0, a_1, \ldots$ *elementów algebry* A_u *określony wzorami* $a_0 = 1$,

$$a_n = (1-\gamma)^n + \gamma e_{\iota_1} + \gamma(1-\gamma) e_{\iota_2} + \ldots + \gamma(1-\gamma)^{n-1} e_{\iota_n}$$

$$= (1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_n) + p_1 e_{\iota_1} + p_2 e_{\iota_2} + \ldots + p_n e_{\iota_n} \quad dla \quad n = 1, 2, \ldots$$

ma następujące własności :

(1) $a_0, a_1, \ldots$ *są odwracalnymi elementami algebry* A_u ,

(2) $x_n := \tilde{T}(a_n^{-1})\, y \in \overline{T(A)\, y}$ *dla* $n = 0, 1, \ldots$, *przy czym* $x_0 = y$,

(3) $\| x_n - x_{n-1} \|_x \leq \dfrac{\epsilon}{2^n}$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$.

Z (1) i (3) wynika natychmiast, że

(4) $\| x_n - y \| \leq \sum_{k=1}^{n} \| x_k - x_{k-1} \| < \epsilon$

(5) $y = \tilde{T}(a_n)\, x_n$

TWIERDZENIE COHENA WYNIKA NATYCHMIAST Z LEMATU 2 .
WYSTARCZY ZAUWAŻYĆ , ŻE ISTNIEJĄ GRANICE

$$a := \lim_{n \to \infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e_{\iota_n} \in A$$

$$x := \lim_{n \to \infty} x_n = y + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) \in \overline{T(A)\, y} \quad ,$$

ORAZ SKORZYSTAĆ Z (5) , (4) i (2).

DOWÓD LEMATU 2. $a_0=1$ jest jednością algebry A_u, a więc jest jej elementem odwracalnym. Ponieważ $y\in\overline{span}\,T(A)X$, więc, na mocy Lematu 1, $x_0 = y = \lim_{\iota} T(e_\iota)y \in \overline{T(A)y}$. Ponadto wzór określający a_n równoważny jest temu, że

$$a_{n+1} = a_n + p_{n+1}(e_{\iota_{n+1}}-1) = a_n+\gamma(1-\gamma)^n(e_{\iota_{n+1}}-1) \quad \text{dla} \quad n=0,1,\dots \ .$$

Wobec powyższego dla dowowdu Lematu 2 wystarczy wykazać, że jeśli $n=0,1,\dots$ i $a_n \in A_u$ jest elementem odwracalnym takim, że $\phi(a_n) = (1-\gamma)^n$, to istnieje indeks $\iota \in I$, dla którego

I. element $a_{n+1} := a_n+\gamma(1-\gamma)^n(e_\iota-1)$ algebry A_u jest odwracalny,

II. $\phi(a_{n+1}) = (1-\gamma)^{n+1}$,

III. $x_{n+1} := \tilde{T}(a_{n+1}^{-1})y \in \overline{T(A)y}$,

IV. $\|x_{n+1}-x_n\|_x \leq \dfrac{\epsilon}{2^{n+1}}$, przy czym $x_n := \tilde{T}(a_n^{-1})y$.

Warunek II jest spełniony niezależnie od wyboru indeksu $\iota\in I$:

$$\phi(a_{n+1}) = \phi(a_n)-\gamma(1-\gamma)^n = (1-\gamma)^n-\gamma(1-\gamma)^n = (1-\gamma)^{n+1} \ .$$

Jeśli element a_{n+1} algebry A_u jest odwracalny, to

$x_{n+1} = \tilde{T}(a_{n+1}^{-1})y = \varphi(a_{n+1}^{-1})y+T(\pi a_{n+1}^{-1})y \in \overline{T(A)y}$ na mocy Lematu 1.

Pozostaje więc udowodnić, że istnieje $\iota\in I$, dla którego spełnione są warunki I i IV. W tym celu dla każdego $\iota\in I$ określony element b_ι algebry A_u za pomocą równości

$$b_\iota = \gamma(1-\gamma)^n(e_\iota-1)a_n^{-1} \ .$$

Wówczas dla elementu $a_{n+1} \in A_u$ określonego w I mamy

(6) $a_{n+1} = (1+b_\iota)a_n$.

Ponieważ $\phi(a_n) = (1-\gamma)^n$ i ϕ jest funkcjonałem multiplikatywnym, więc

(7) $b_\iota = \gamma(e_\iota - 1) + \gamma(1-\gamma)^n (e_\iota \pi a_n^{-1} - \pi a_n^{-1})$

i stąd

(8) $\|b_\iota\|_{A_u} \le \gamma(M+1) + \gamma(1-\gamma)^n \|e_\iota \pi a_n^{-1} - \pi a_n^{-1}\|_A$.

Przyjmijmy

$$\Theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma(M+1) \quad .$$

Ponieważ $\gamma(M+1) < 1$, więc $\gamma(M+1) < \Theta < 1$ i na mocy nierówności (8) istnieje $\iota_0 \in I$ takie, że jeśli $\iota \in I$ i $\iota > \iota_0$, to

(9) $\|b_\iota\|_{A_u} \le \Theta$.

Z odracalności a_n i z (1) poprzez zastosowanie szeregu C.Neumanna wynika, że jeśli $\iota > \iota_0$, to element a_{n+1} algebry A_u jest odwracalny i

$a_{n+1}^{-1} = a_n^{-1}(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-b_\iota)^k)$, a więc, wobec (9) ,

(10) $\|a_{n+1}^{-1}\|_{A_u} \le \|a_n^{-1}\|_{A_u} (1-\Theta)^{-1}$.

Dowód Lematu 2 będzie zakończony jeśli wykażemy istnienie $\iota_1 \in I$ takiego, że $\iota_1 > \iota_0$ i jeśli $\iota > \iota_1$, to warunek IV jest spełniony. W tym celu zauważmy, że jeśli $\iota > \iota_0$, to, wobec (7),

$$a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1} = a_{n+1}^{-1}(a_n - a_{n+1})a_n^{-1} = -a_{n+1}^{-1} b_\iota$$
$$= -\gamma a_{n+1}^{-1}(e_\iota - 1) - \gamma(1-\gamma)^n a_{n+1}^{-1}(e_\iota \pi a_n^{-1} - \pi a_n^{-1}) ,$$

a więc

$$x_{n+1} - x_n = -\gamma \tilde{T}(a_{n+1}^{-1})\left[T(e_\iota)y - y + (1-\gamma)^n T(e_\iota \pi a_n^{-1} - \pi a_n^{-1})y\right] .$$

Stąd i z nierówności (10) wynika, że jeśli $\iota > \iota_0$, to

(11) $$\|x_{n+1} - x_n\|_X \leq K\|T(e_\iota)y - y\|_X + L\|y\|_X \|e_\iota \pi a_n^{-1} - \pi a_n^{-1}\|_A$$

przy czym

$$K = \gamma \|\tilde{T}\|_{L(A_u;\, L(X))} \|a_n^{-1}\|_{A_u} (1-\Theta)^{-1} ,$$
$$L = (1-\gamma)^n K \|T\|_{L(A;\, L(X))} .$$

Z nierówności (11) na mocy Lematu 1 wynika istnienie takiego $\iota_1 \in I$, że $\iota_1 > \iota_0$ i jeśli $\iota > \iota_1$, to nierówność IV jest spełniona.