

O "światopoglądzie wariacyjnym"

Paweł Urbański

urbanski@fuw.edu.pl

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski

Inaczej

- ✓ Podstawy rachunku wariacyjnego dla matematyków.

Inaczej

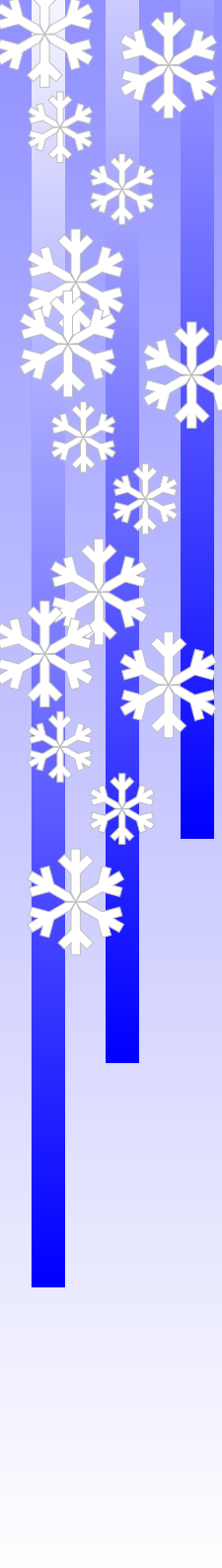
- ✓ Podstawy rachunku wariacyjnego dla matematyków.
- ✓ Podstawy zasad wariacyjnych dla fizyków.

Inaczej

- ✓ Podstawy rachunku wariacyjnego dla matematyków.
- ✓ Podstawy zasad wariacyjnych dla fizyków.
- ✓ O pochodzeniu zasad wariacyjnych dla darwinistów.

Nazwiska

- ✓ Włodzimierz M. Tulczyjew
(Camerino, Neapol),
- ✓ Franco Cardin (Padwa),
- ✓ Paweł Urbański (Warszawa).

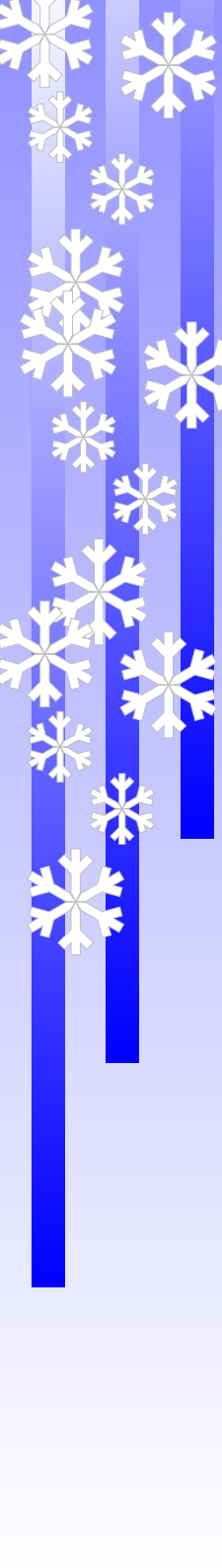


Podstawowa praca

Włodzimierz M. TULCZYJEW

"The Origin of Variational Principles"

Banach Center Publications 59, "Classical and
Quantum Integrability", Warszawa 2003

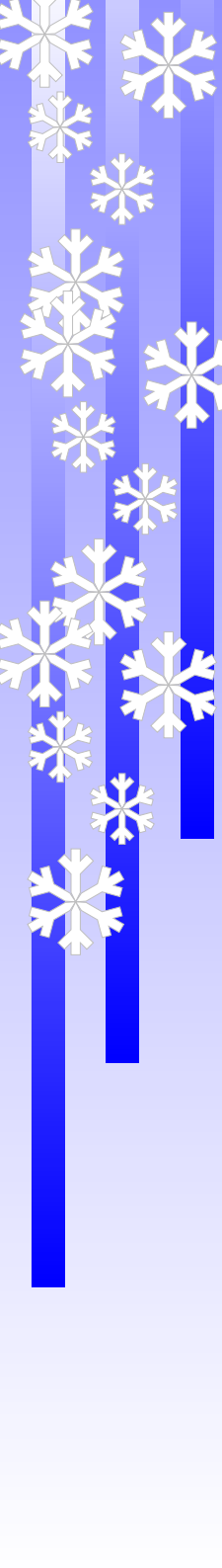


Cel wykładu

Dyskusja z pewnymi utartymi wyobrażeniami związanymi z rachunkiem wariacyjnym.

Historia

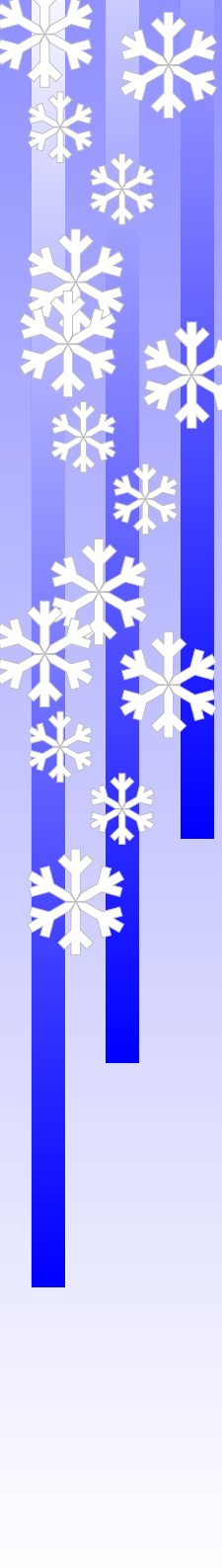
Galileusz: znaleźć taką krzywą łączącą punkty A i B , by czas staczania się po niej masy punktowej, pod wpływem siły ciężkości, był najkrótszy.



Historia

Galileusz: znaleźć taką krzywą łączącą punkty A i B , by czas staczania się po niej masy punktowej, pod wpływem siły ciężkości, był najkrótszy.

Galilei, Galileo (1564-1642) "Discorsi e dimostrazioni matematiche : intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali"
In Leida : Appresso gli Elsevirii, 1638.



Historia

Galileusz: znaleźć taką krzywą łączącą punkty A i B , by czas staczania się po niej masy punktowej, pod wpływem siły ciężkości, był najkrótszy.

Galilei, Galileo (1564-1642) "Discorsi e dimostrazioni matematiche : intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali"
In Leida : Appresso gli Elsevirii, 1638.

Brachistochrona od **brachos** - krótki i **chronos** -czas

Historia

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia minimum funkcjonału

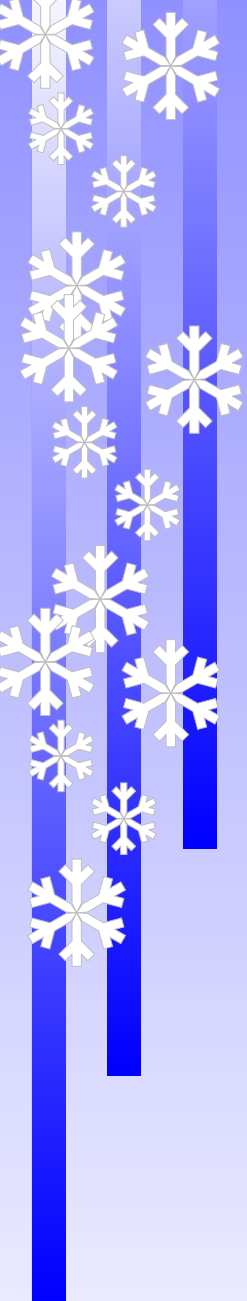
$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx$$

Historia

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia minimum funkcjonału

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{2gy(x)}} dx$$

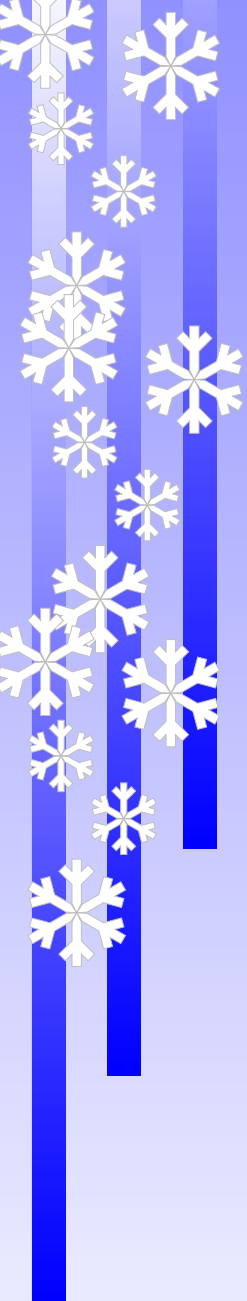
Rozwiązanie (Jakub Bernoulli, Leibniz, Newton):
szukana krzywa (brachistochrona) jest fragmentem
cykloidy.



Stąd dla matematyka

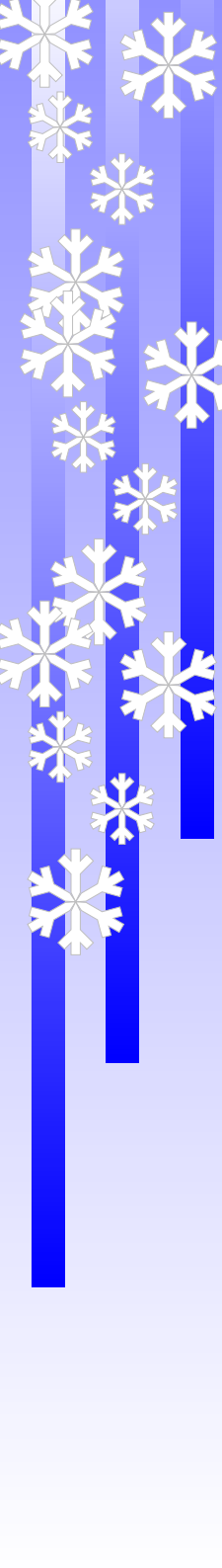
Rachunek wariacyjny -

dział matematyki, poświęcony
znajdowaniu ekstremów
funkcjonałów.



ale dla fizyka

Zasada wariacyjna - opisuje
położenie równowagi układu.



ale dla fizyka

Zasada wariacyjna - opisuje
położenie równowagi układu.

Wspólnym źródłem dla zasad wariacyjnych
fizyki jest znana ze statyki
zasada pracy wirtualnej.

Dlaczego statyka?

Statyka (w ogólności - mechanika) jest tym miejscem, gdzie kształtują się podstawowe intuicje fizyczne i ich artykulacja matematyczna,

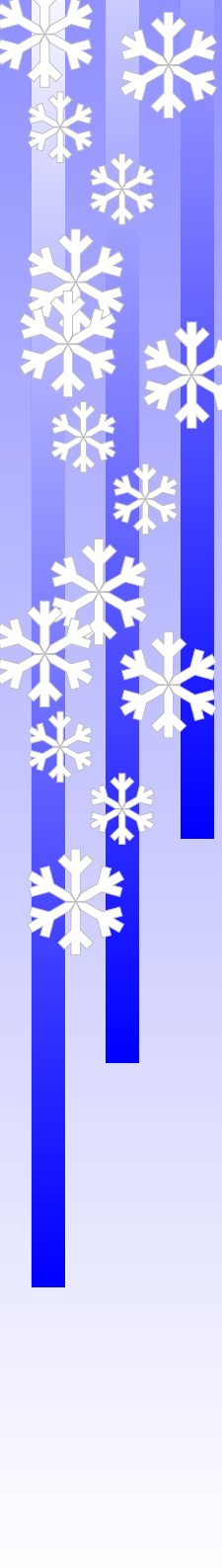
Dlaczego statyka?

Statyka (w ogólności - mechanika)
jest tym miejscem, gdzie kształtują
się podstawowe intuicje fizyczne i ich
artykulacja matematyczna,

a potem rozumujemy

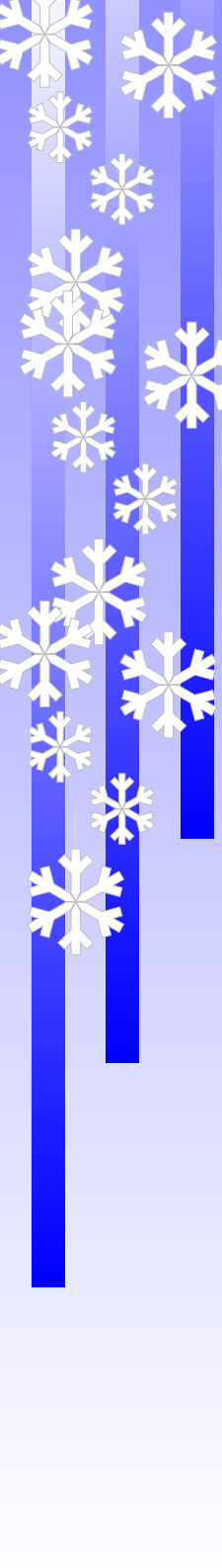
przez analogię

.



Zasada prac wirtualnych

Konfiguracja q_0 jest punktem równowagi, jeżeli każda próba wyprowadzenia z niej jest **kosztowna** - **przynajmniej na początku**



Zasada prac wirtualnych

Konfiguracja q_0 jest punktem równowagi, jeżeli każda próba wyprowadzenia z niej jest **kosztowna** - **przynajmniej na początku**

Ukryte założenia:

Zasada prac wirtualnych

Konfiguracja q_0 jest punktem równowagi, jeżeli każda próba wyprowadzenia z niej jest **kosztowna - przynajmniej na początku**

Ukryte założenia:

- ✓ możemy oddziaływać na układ zmieniając jego konfiguracje,

Zasada prac wirtualnych

Konfiguracja q_0 jest punktem równowagi, jeżeli każda próba wyprowadzenia z niej jest **kosztowna - przynajmniej na początku**

Ukryte założenia:

- ✓ możemy oddziaływać na układ zmieniając jego konfigurację,
- ✓ umiemy liczyć koszt (n.p. włożoną pracę) tego oddziaływania.

Składniki matematyczne

- ✓ - przestrzeń konfiguracji - **rozmaitość różniczkowa Q** ,

Składniki matematyczne

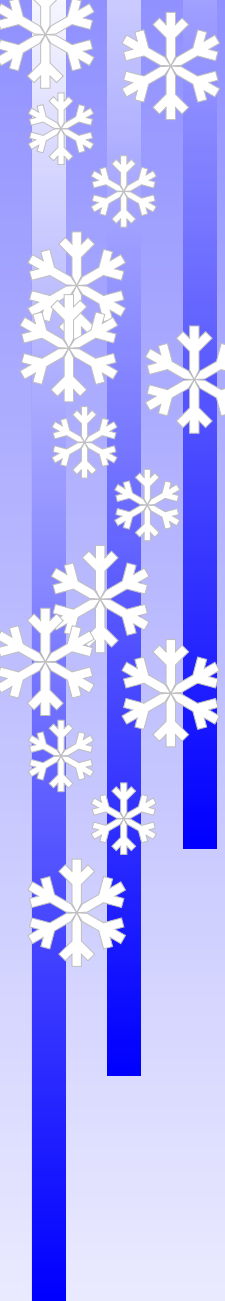
- ✓ - przestrzeń konfiguracji - **rozmaitość różniczkowa Q** ,
- ✓ procesy wirtualne - łuki z końcami w Q - **zorientowane 1-wymiarowe podrozmaitości z brzegiem**,

Składniki matematyczne

- ✓ - przestrzeń konfiguracji - **rozmaitość różniczkowa Q** ,
- ✓ procesy wirtualne - łuki z końcami w Q - **zorientowane 1-wymiarowe podrozmaitości z brzegiem**,
- ✓ rodzina dopuszczalnych procesów $\mathcal{C}$.

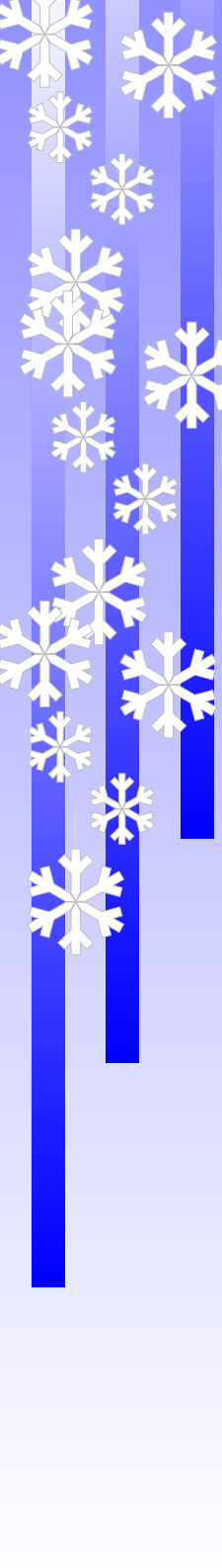
Składniki matematyczne

- ✓ - przestrzeń konfiguracji - **rozmaitość różniczkowa Q** ,
- ✓ procesy wirtualne - łuki z końcami w Q - **zorientowane 1-wymiarowe podrozmaitości z brzegiem**,
- ✓ rodzina dopuszczalnych procesów $\mathcal{C}$.
- ✓ koszt procesów $W : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$
- ✓ Zakładamy: addytywność procesów, kosztów, itp



Kryteria równowagi

Na każdym łuku wychodzącym z q_0 funkcja kosztu (pracy) jest niemalejąca w q_0 .



Kryteria równowagi

Na każdym łuku wychodzącym z q_0 funkcja kosztu (pracy) jest niemalejąca w q_0 .

Pierwsza nieznikająca pochodna funkcji kosztów jest dodatnia

Kryteria równowagi

Na każdym łuku wychodzącym z q_0 funkcja kosztu (pracy) jest niemalejąca w q_0 .

Pierwsza nieznikająca pochodna funkcji kosztów jest dodatnia

Kryterium rzędu k - badamy pochodne do rzędu k .
Standardowo $k = 1$.

Najprostszy przypadek

funkcja kosztu jest zadana przez dodatnio jednorodną funkcję na wektorach stycznych do Q :

$$\vartheta: TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vartheta(av) = a\vartheta(v), \quad \text{dla } a > 0.$$

Najprostszy przypadek

funkcja kosztu jest zadana przez dodatnio jednorodną funkcję na wektorach stycznych do Q :

$$\vartheta: TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vartheta(av) = a\vartheta(v), \quad \text{dla } a > 0.$$

Koszt procesu

$$W(c) = \int_c \vartheta.$$

Najprostszy przypadek

funkcja kosztu jest zadana przez dodatnio jednorodną funkcję na wektorach stycznych do Q :

$$\vartheta: TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vartheta(av) = a\vartheta(v), \quad \text{dla } a > 0.$$

Koszt procesu

$$W(c) = \int_c \vartheta.$$

Kryterium równowagi w punkcie q_0 :

$$\vartheta(v) \geq 0 \quad \text{dla } v \text{ zaczepionych w } q_0, \quad v \in T_{q_0}Q.$$

Przykłady

Układ **potencjalny**, opisany potencjałem

$$U: Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vartheta = dU, \quad \vartheta(v) = \langle dU, v \rangle = v(U)$$

Przykłady

Układ **potencjalny**, opisany potencjałem

$$U: Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vartheta = dU, \quad \vartheta(v) = \langle dU, v \rangle = v(U)$$

na przykład sprężynka $U(q) = \frac{k}{2} \|q - q_0\|^2$.

Przykłady

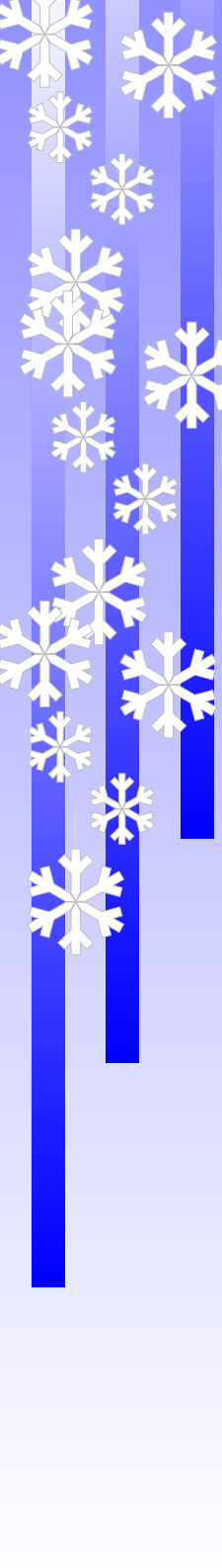
Układ **potencjalny**, opisany potencjałem

$$U: Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vartheta = dU, \quad \vartheta(v) = \langle dU, v \rangle = v(U)$$

na przykład sprężynka $U(q) = \frac{k}{2} \|q - q_0\|^2$.

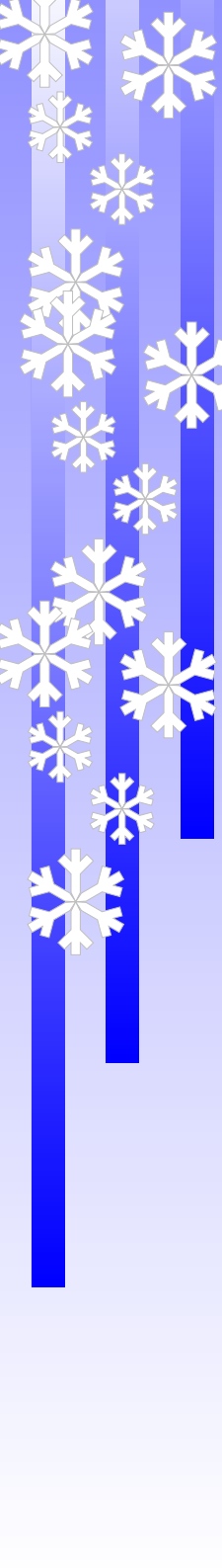
Niepotencjalny układ z tarciem

$$\vartheta(v) = \varrho \|v\|.$$



Podsumowanie pierwsze

Opis wariacyjny jest opisem układu z punktu widzenia jego oddziaływania z innymi układami:



Podsumowanie pierwsze

Opis wariacyjny jest opisem układu z punktu widzenia jego oddziaływania z innymi układami:

Dwa sprzężone układy (Q, ϑ_1) i (Q, ϑ_2) o tym samym Q opisywane są sumą $\vartheta_1 + \vartheta_2$

Podsumowanie pierwsze

Opis wariacyjny jest opisem układu z punktu widzenia jego oddziaływania z innymi układami:

Dwa sprzężone układy (Q, ϑ_1) i (Q, ϑ_2) o tym samym Q opisywane są sumą $\vartheta_1 + \vartheta_2$

w szczególności jeden z układów, np (Q, ϑ_2) może być potencjalny.

Podsumowanie pierwsze

Opis wariacyjny jest opisem układu z punktu widzenia jego oddziaływania z innymi układami:

Dwa sprzężone układy (Q, ϑ_1) i (Q, ϑ_2) o tym samym Q opisywane są sumą $\vartheta_1 + \vartheta_2$

w szczególności jeden z układów, np (Q, ϑ_2) może być potencjalny.

Układ potencjalny reprezentuje siłę - matematycznie kowektor, zaczepiony w jakimś punkcie: $f = -d_q U$.

Podsumowanie pierwsze

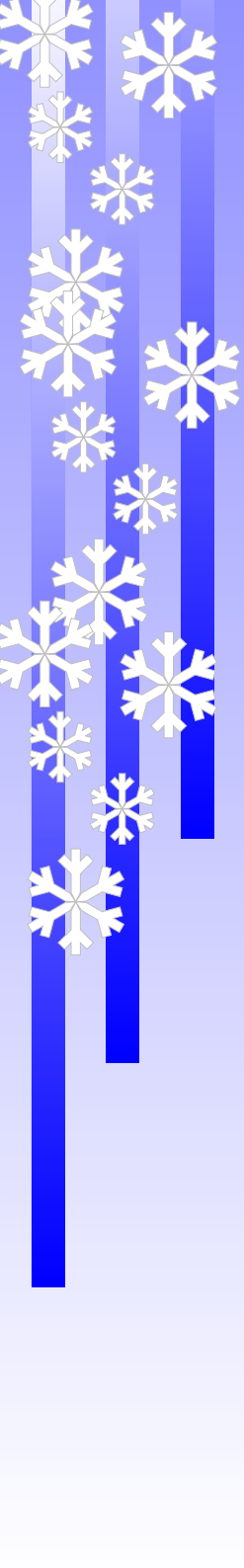
Opis wariacyjny jest opisem układu z punktu widzenia jego oddziaływania z innymi układami:

Dwa sprzężone układy (Q, ϑ_1) i (Q, ϑ_2) o tym samym Q opisywane są sumą $\vartheta_1 + \vartheta_2$

w szczególności jeden z układów, np (Q, ϑ_2) może być potencjalny.

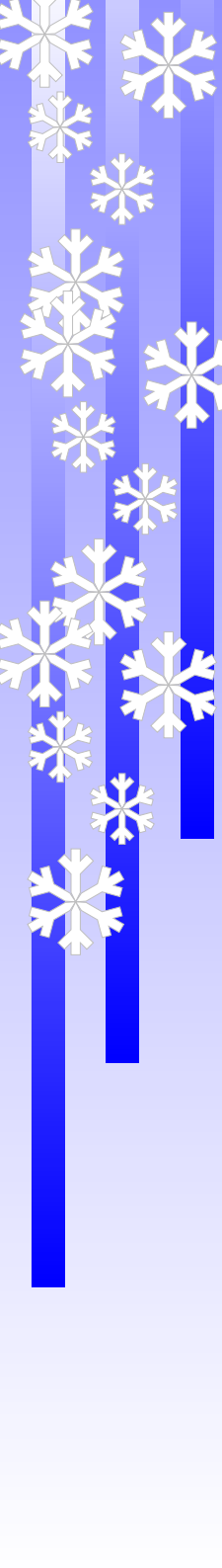
Układ potencjalny reprezentuje **siłę** - matematycznie kowektor, zaczepiony w jakimś punkcie: $f = -d_q U$.

q_0 jest punktem równowagi układu, jeżeli w tym punkcie jest w równowadze z siłą zero.



Transformacja Legendre'a

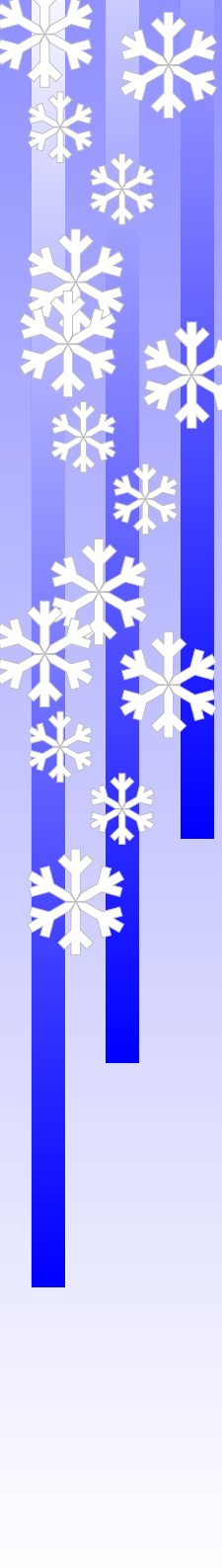
Opis dualny: lista sił, z którymi układ jest w równowadze



Transformacja Legendre'a

Opis dualny: lista sił, z którymi układ jest w równowadze

Zbiór S nazywany jest zbiorem **konstytutywnym** układu.

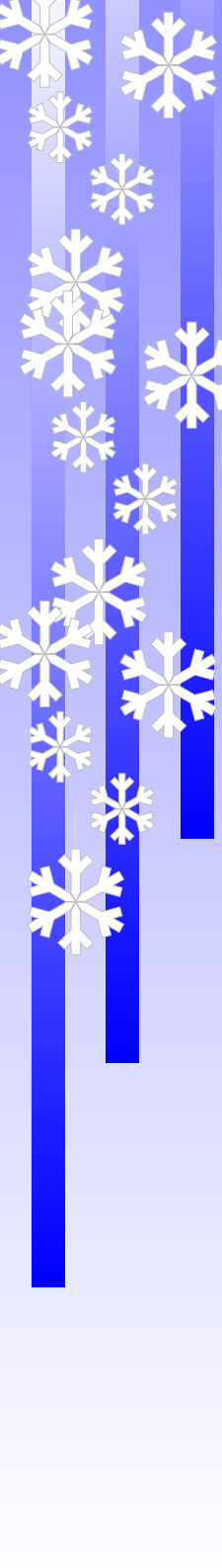


Transformacja Legendre'a

Opis dualny: lista sił, z którymi układ jest w równowadze

Zbiór S nazywany jest zbiorem **konstytutywnym** układu.

Matematycznie - transformacja Legendre'a analizy wypukłej.



Transformacja Legendre'a

Opis dualny: lista sił, z którymi układ jest w równowadze

Zbiór S nazywany jest zbiorem **konstytutywnym** układu.

Matematycznie - transformacja Legendre'a analizy wypukłej.

Kryterium równowagi: dwa układy są w równowadze w q_0 , jeżeli istnieją siły $f_1 \in S_1$, $f_2 \in S_2$, zaczepione w q_0 i bilansujące się: $f_1 + f_2 = 0$.

Przykłady

Układ potencjalny $\vartheta = dU$

$$S = \{(q, f) : f = kg(q - q_0)\}.$$

Przykłady

Układ potencjalny $\vartheta = dU$

$$S = \{(q, f) : f = kg(q - q_0)\}.$$

Układ z tarciem $\vartheta(v) = \varrho \|v\|$,

$$S = \{(q, f) : \|f\| \leq \varrho\}.$$

Więzy

Ograniczenia na procesy (przesunięcia wirtualne), na ogół w wersji infinitesimalnej

$$C^1 \subset TQ.$$

Więzy

Ograniczenia na procesy (przesunięcia wirtualne), na ogół w wersji infinitesimalnej

$$C^1 \subset TQ.$$

Wynikają z tego ograniczenia na konfiguracje

$$C^0 = \tau_Q(C^1) \subset Q.$$

Więzy

Ograniczenia na procesy (przesunięcia wirtualne), na ogół w wersji infinitesimalnej

$$C^1 \subset TQ.$$

Wynikają z tego ograniczenia na konfiguracje

$$C^0 = \tau_Q(C^1) \subset Q.$$

$C^1 = TC^0$, to więzy **holonomiczne**.

Więzy

Ograniczenia na procesy (przesunięcia wirtualne), na ogół w wersji infinitesimalnej

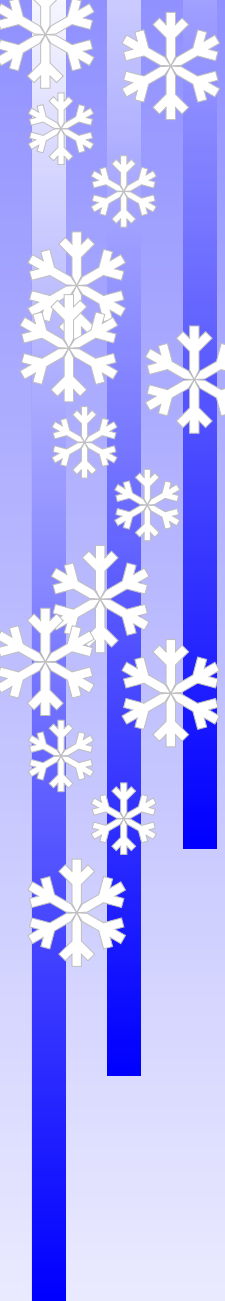
$$C^1 \subset TQ.$$

Wynikają z tego ograniczenia na konfiguracje

$$C^0 = \tau_Q(C^1) \subset Q.$$

$C^1 = TC^0$, to więzy **holonomiczne**.

$C^1 \subsetneq TC^0$, to więzy **nieholonomiczne**.



Możliwe dalsze dyskusje

- ✓ Rozpatrywać układy, dla których koszt procesu zależy (infinitesimalnie) nie tylko od jego kierunku, ale od jego kształtu, np. od krzywizny.

Możliwe dalsze dyskusje

- ✓ Rozpatrywać układy, dla których koszt procesu zależy (infinitesimalnie) nie tylko od jego kierunku, ale od jego kształtu, np. od krzywizny.
- ✓ Stosować kryteria równowagi wyższych rzędów.

Możliwe dalsze dyskusje

- ✓ Rozpatrywać układy, dla których koszt procesu zależy (infinitesimalnie) nie tylko od jego kierunku, ale od jego kształtu, np. od krzywizny.
- ✓ Stosować kryteria równowagi wyższych rzędów.

Prowadzi to do innych reprezentacji sił i do sił wyższego rzędu.

Możliwe dalsze dyskusje

- ✓ Rozpatrywać układy, dla których koszt procesu zależy (infinitesimalnie) nie tylko od jego kierunku, ale od jego kształtu, np. od krzywizny.
- ✓ Stosować kryteria równowagi wyższych rzędów.

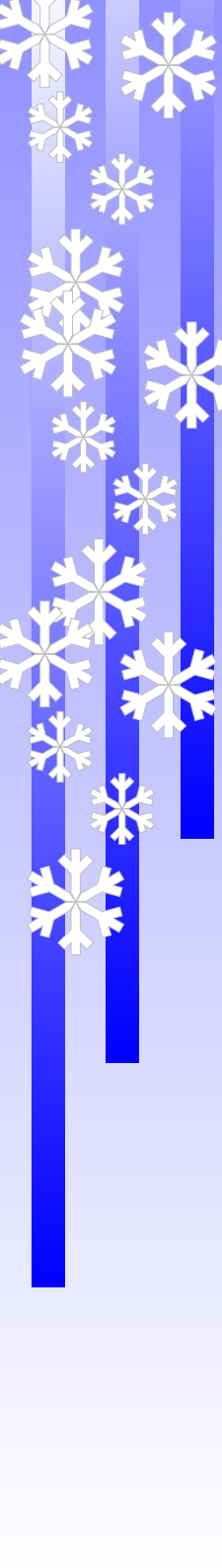
Prowadzi to do innych reprezentacji sił i do sił wyższego rzędu.

Stąd raczej **pracę**, a nie siłę należy przyjąć jako pojęcie pierwotne.

Podsumowanie drugie

Opis **wariacyjny** jest opisem oddziaływania z układem i układów między sobą.

.

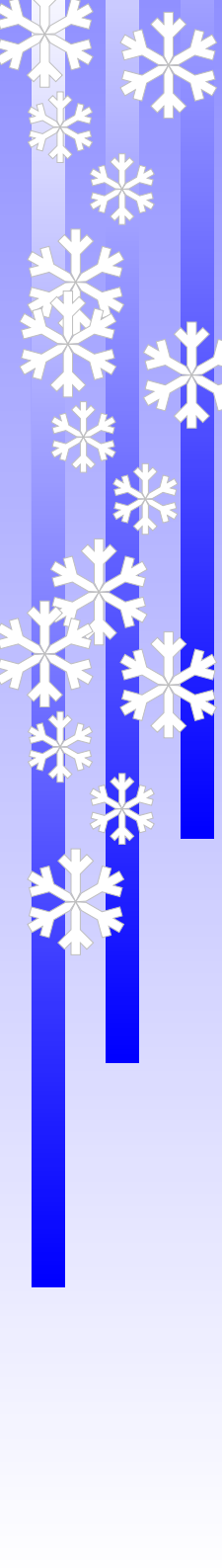


Podsumowanie drugie

Opis **wariacyjny** jest opisem oddziaływania z układem i układów między sobą.

Jest to przeciwieństwo opisu **obserwacyjnego**.

.

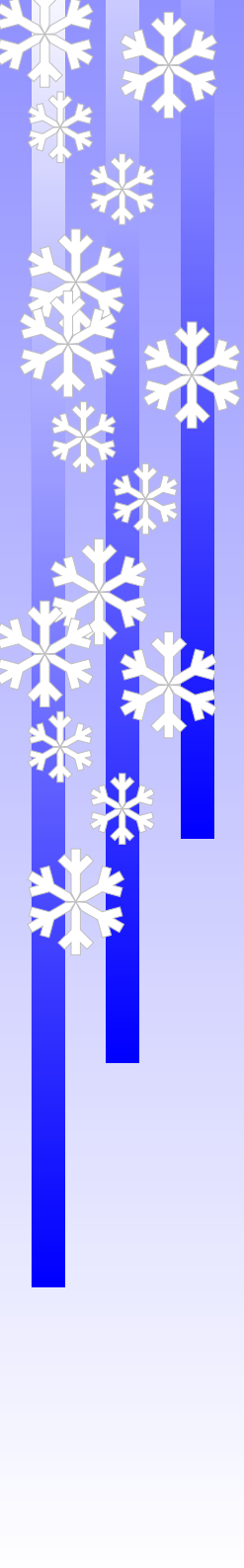


Podsumowanie drugie

Opis **wariacyjny** jest opisem oddziaływania z układem i układów między sobą.

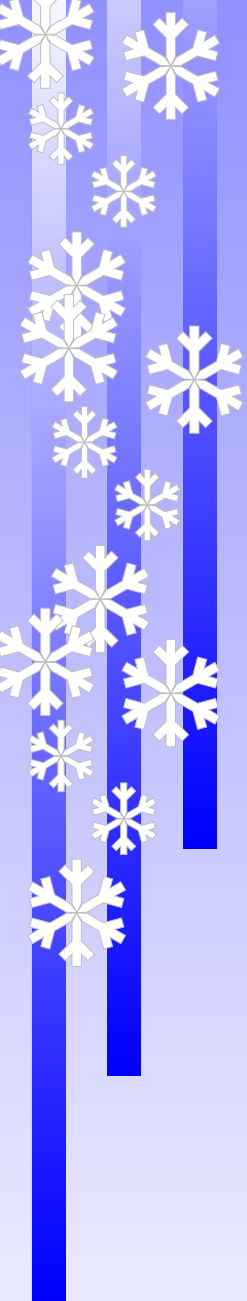
Jest to przeciwieństwo opisu **obserwacyjnego**.

Inaczej mówiąc, jest to opis **funkcjonalny**, w opozycji do opisu **morfologicznego**.



Dynamika

czyli statyka w czasoprzestrzeni (konfiguracje są
jednowymiarowymi obiektami w (czaso) przestrzeni
 M ,



Dynamika

czyli statyka w czasoprzestrzeni (konfiguracje są jednowymiarowymi obiektami w (czaso) przestrzeni M , sparametryzowanymi (na przykład czasem)).

Dynamika

czyli statyka w czasoprzestrzeni (konfiguracje są jednowymiarowymi obiektami w (czaso) przestrzeni M , sparametryzowanymi (na przykład czasem)).

Skończony odcinek parametrów - przestrzeń konfiguracji wymiary nieskończonego.

Dynamika

czyli statyka w czasoprzestrzeni (konfiguracje są jednowymiarowymi obiektami w (czaso) przestrzeni M , sparametryzowanymi (na przykład czasem)).

Skończony odcinek parametrów - przestrzeń konfiguracji wymiary nieskończonego.

Infinitezymalny odcinek parametrów - przestrzeń konfiguracji jest TM (położenia i prędkości).

Dynamika

czyli statyka w czasoprzestrzeni (konfiguracje są jednowymiarowymi obiektami w (czaso) przestrzeni M , sparametryzowanymi (na przykład czasem)).

Skończony odcinek parametrów - przestrzeń konfiguracji wymiary nieskończonego.

Infinitezymalny odcinek parametrów - przestrzeń konfiguracji jest TM (położenia i prędkości).

Układy **potencjalne**, tzn opisywane funkcją na konfiguracjach.

Działanie i siły

Potencjał = działanie,

Działanie i siły

Potencjał = działanie, działanie na konfiguracjach
infinitesimalnych - Lagranżjan

$$L: TM \rightarrow \mathbb{R}.$$

Działanie i siły

Potencjał = działanie, działanie na konfiguracjach
infinitesimalnych - Lagranżjan

$$L: TM \rightarrow \mathbb{R}.$$

Siła = różniczka potencjału (działania)

Działanie i siły

Potencjał = działanie, działanie na konfiguracjach
infinitesimalnych - Lagranżjan

$$L: TM \rightarrow \mathbb{R}.$$

Siła = różniczka potencjału (działania)
w punkcie $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ jest trójką

$$(p_a, f, p_b),$$

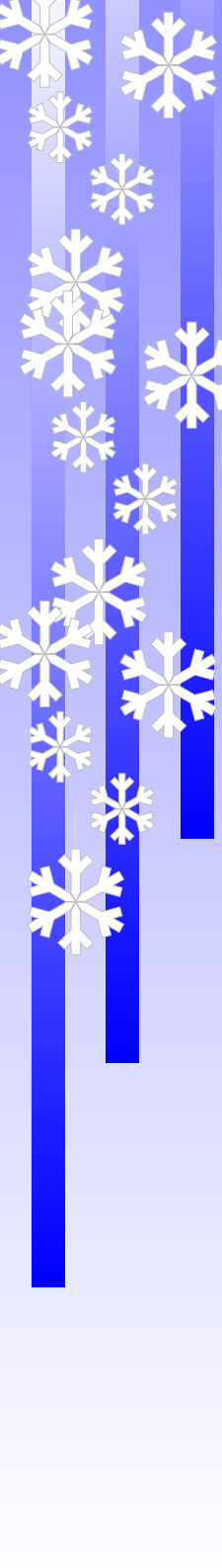
gdzie $p_a \in T_{\gamma(a)}M$, $p_b \in T_{\gamma(b)}M$, to pędy -
początkowy i końcowy, a f jest polem kowektorów
wzdłuż γ ,

$f = E(\gamma)$ – operator Eulera-Lagrange’a.

Działanie i siły cd

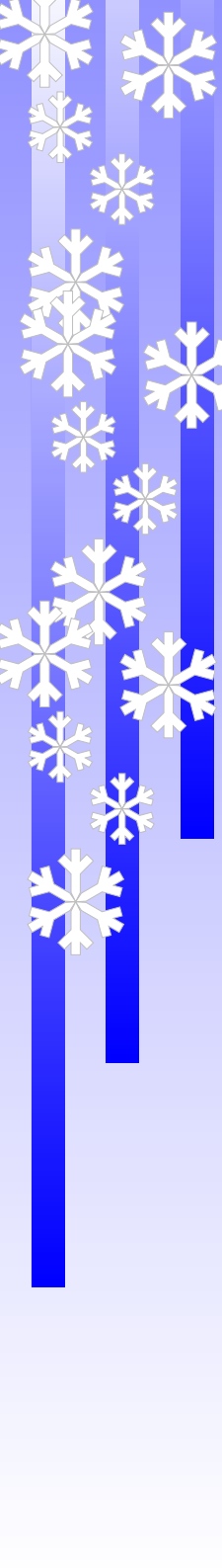
Składowa f reprezentuje siły pochodzące od układów "zewnętrznych",
a pędy są naprężeniami między przeszłością, przyszłością, a teraźniejszością.

Pęd to jest to z przeszłości ruchu, co jest istotne dla jego przyszłości



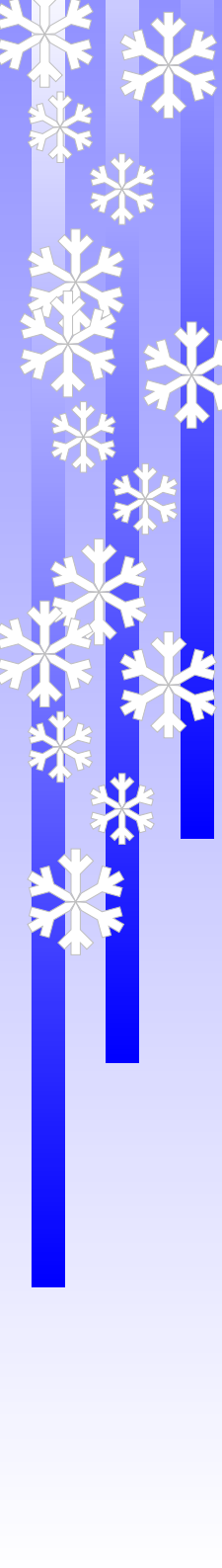
Co się zazwyczaj robi?

Zapomina się o brzegu, czyli o pędach i pozostaje tylko operator E-L.



Co się zazwyczaj robi?

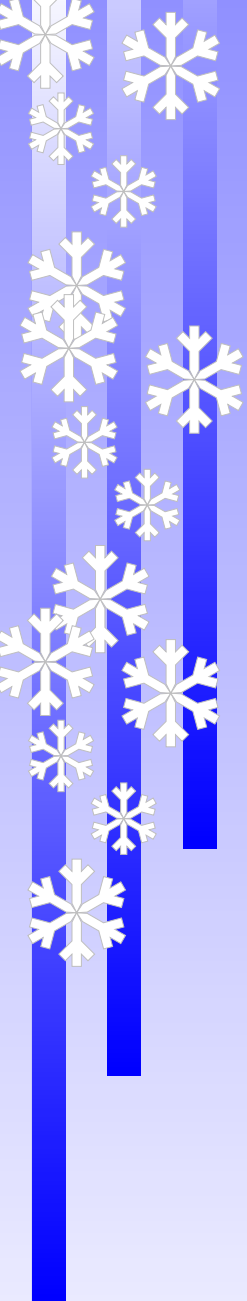
Zapomina się o brzegu, czyli o pędach i pozostaje tylko operator E-L. W dodatku kładzie się $f = 0$, czyli traktuje się układ jak izolowany!!



Co się zazwyczaj robi?

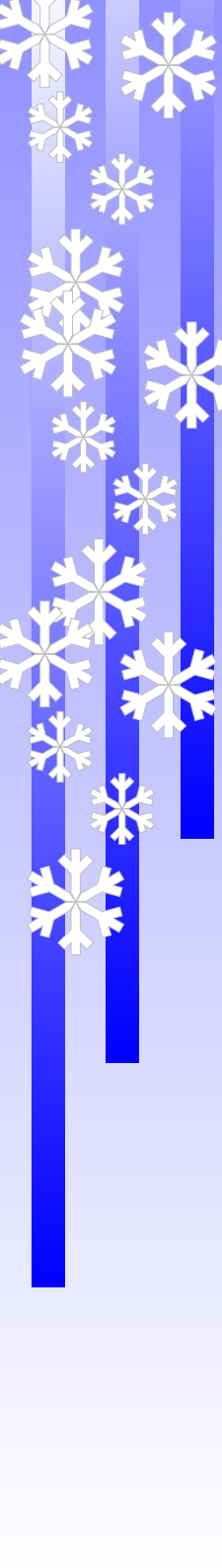
Zapomina się o brzegu, czyli o pędach i pozostaje tylko operator E-L. W dodatku kładzie się $f = 0$, czyli traktuje się układ jak izolowany!!

Zapomina się o wnętrzu odcinka $[a, b]$ (znowu układ izolowany!), a pozostawia tylko pędy.



Uwagi końcowe

Opis wariacyjny **nie** pasuje do układów izolowanych,

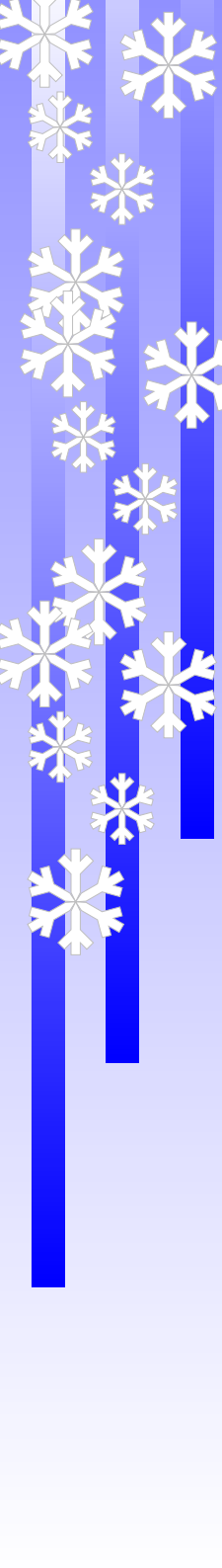


Uwagi końcowe

Opis wariacyjny **nie** pasuje do układów izolowanych,
jest opisem przez oddziaływanie (mechanika
kwantowa!!),

Uwagi końcowe

Opis wariacyjny **nie** pasuje do układów izolowanych,
jest opisem przez oddziaływanie (mechanika
kwantowa!!), nie ma w nim miejsca na **observable**,



Uwagi końcowe

Opis wariacyjny **nie** pasuje do układów izolowanych,
jest opisem przez oddziaływanie (mechanika
kwantowa!!), nie ma w nim miejsca na **observable**,
jest w opozycji do opisu **ewolucyjnego**, np.
hamiltonowskiego!