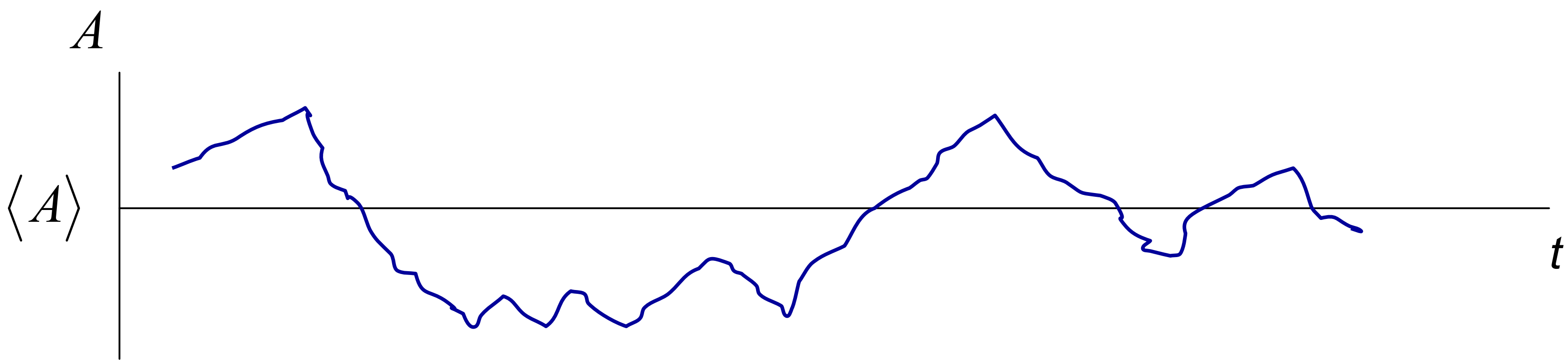
Zapomniane twierdzenie Nyquista

Bogdan Cichocki,
IFT UW

KMMF 01.03.12

Fluktuacje

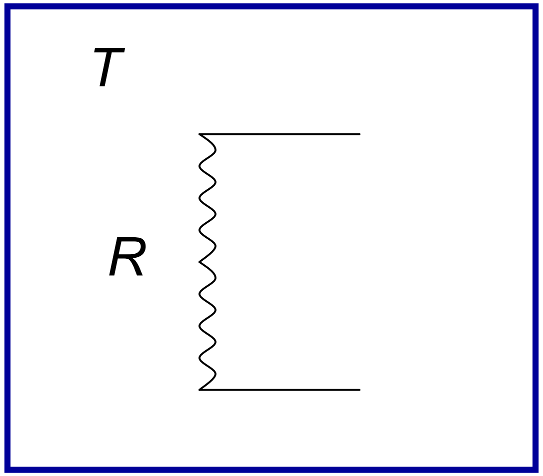


od łac. fluctuatio – drgania, falowanie,
nazwa wprowadzona przez Mariana Smoluchowskiego

Harry Nyquist (1889-1976)

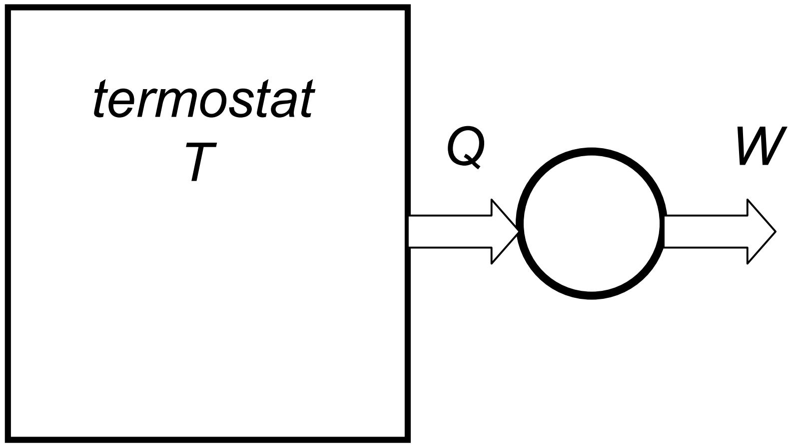
inżynier elektryk,

w latach 1917-54 pracownik laboratorium ATT (od 1934 r. lab. Bella)



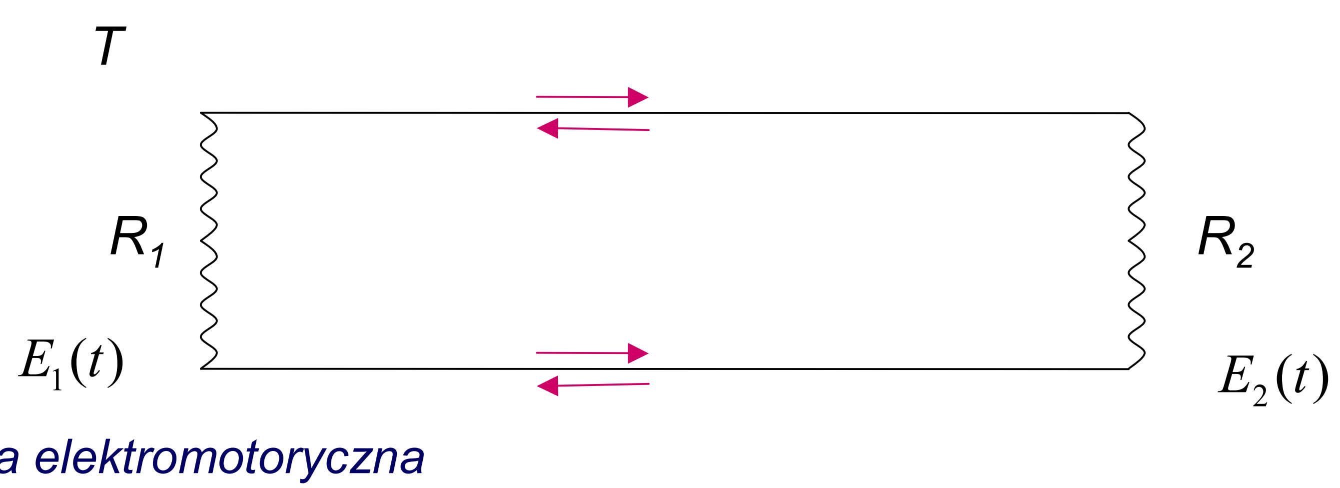
W 1926 r. J.B. Johnson odkrywa zjawisko szumów termicznych na oporniku i formułuje empiryczne prawo dotyczące zależności „intensywności" tych szumów od temperatury. O wyjaśnienie teoretyczne zjawiska prosi swojego kolegę z laboratorium ATT H. Nyquista, który wywiązuje się z postawionego zadania znakomicie. Praca Nyquista poprzedzona pracą Johnsona ukazuje się w Phys.Rev. ***32*** *(1928).*

Druga zasada termodynamiki

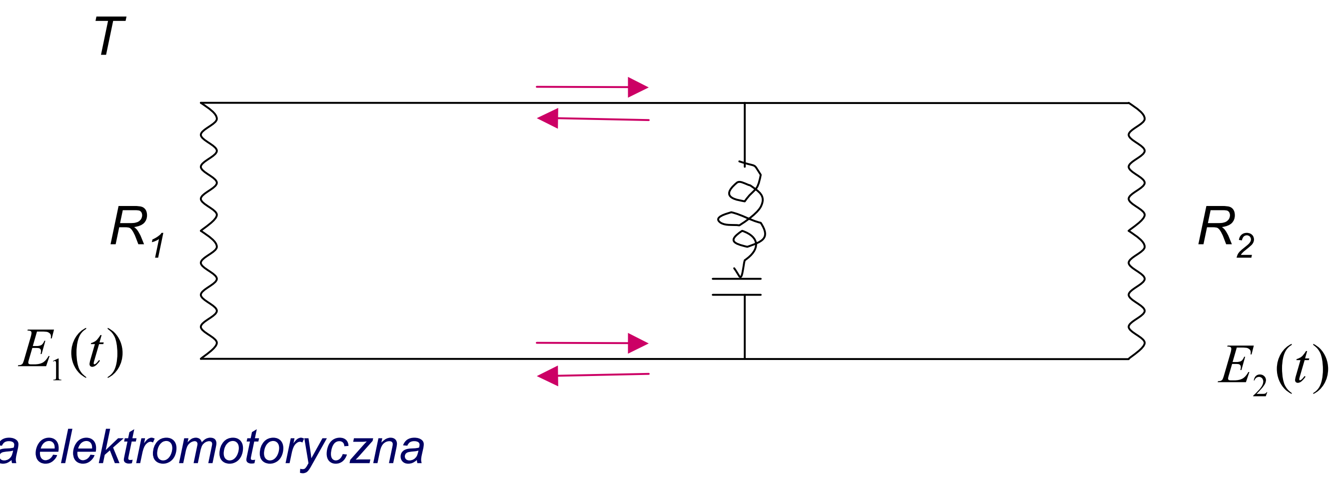


niemożliwość zbudowania
perpetuum mobile II rodzaju

H. Nyquist, Phys.Rev. *<u>32</u>,(1928),*

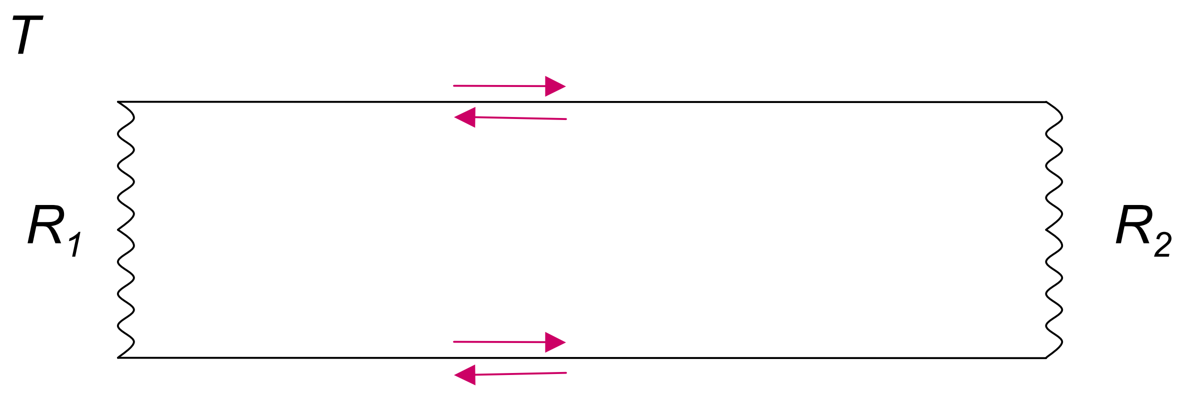


H. Nyquist, Phys.Rev. <u>32</u>,(1928),



Z analizy równowagi globalnej niewiele można wydedukować,
ale równowaga musi zachodzić w każdym przedziale częstości !!

$$x_{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{o}^{\tau} dt\ x(t)\ e^{i\omega t}, \qquad \tau \rightarrow +\infty$$

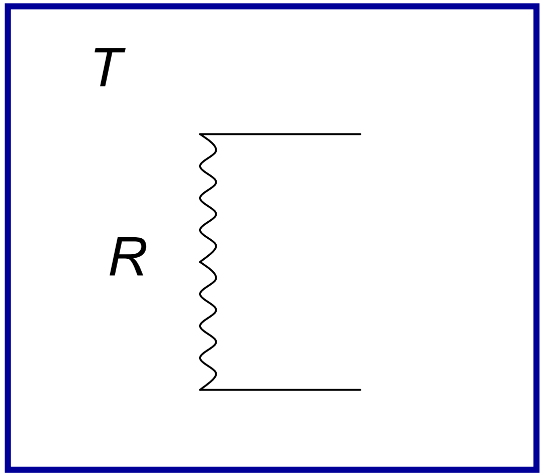


$E_{1,\omega}$, $I_{1,\omega} = E_{1,\omega}/(R_1 + R_2)$

$E_{2,\omega}$, $I_{2,\omega} = E_{2,\omega}/(R_1 + R_2)$

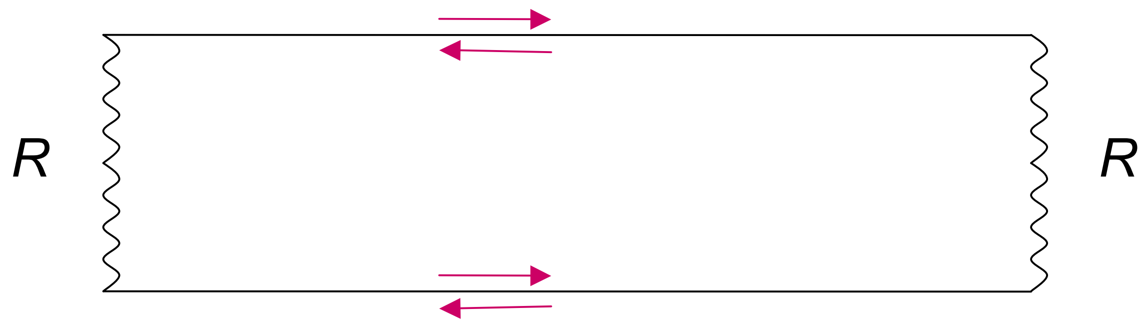
$$\frac{1}{2\pi}\left\langle \left|E_{2,\omega}\right|^2 \right\rangle \frac{R_1}{(R_1+R_2)^2}\,d\omega \;=\; \frac{1}{2\pi}\left\langle \left|E_{1,\omega}\right|^2 \right\rangle \frac{R_2}{(R_1+R_2)^2}\,d\omega$$

moc wydzielona na oporniku (1) od fluktuacji siły elektromotorycznej na oporniku (2) w przedziale (ω, ω+dω) *i* *vice versa*



$$\frac{\left\langle \left| E_\omega \right|^2 \right\rangle}{R} = f(\omega, T)$$

uniwersalna funkcja ω i T
niezależna od oporu R



średnia energia jednego modu (fali stojącej) – $k_B T$, zasada ekwipartycji energii

$$f(\omega, T) = 2k_B T$$

praca elementarna: $F \cdot X$

siła uogólniona, *przesunięcie uogólnione*

---

moc: $F \cdot J,\qquad J = \dot{X}$

strumień, prąd

---

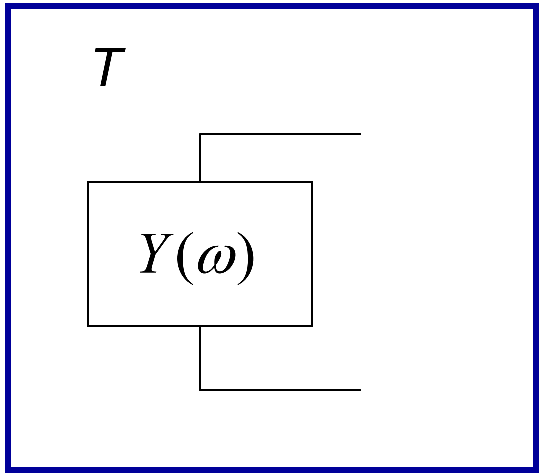
prawo makroskopowe:
(liniowe)

$$J(t) = J_\omega e^{i\omega t}, \qquad F(t) = F_\omega e^{i\omega t}$$

$$J_\omega = Y(\omega) F_\omega$$

admitancja

Przypadek ogólny



$$J_\omega = Y(\omega) F_\omega$$

$$Z(\omega) = Y^{-1}(\omega) = R_\omega + iX_\omega,$$

$$\boxed{\left\langle \left| F_\omega \right|^2 \right\rangle = 2k_B T \,\mathrm{Re}\, Z(\omega)}$$

$$\boxed{\left\langle \left| J_\omega \right|^2 \right\rangle = 2k_B T \,\mathrm{Re}\, Y(\omega)}$$

Twierdzenie Nyquista:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} dt \left\langle J(0) J(t) \right\rangle e^{i\omega t} = k_B T \; Y(\omega)}$$

wersja klasyczna

średnia energia oscylatora o częstotliwości ω

$$E_\beta(\hbar\omega) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\beta\omega) - 1}$$

wersja kwantowa

poziom opisu

makroskopowy

twierdzenie Nyquista

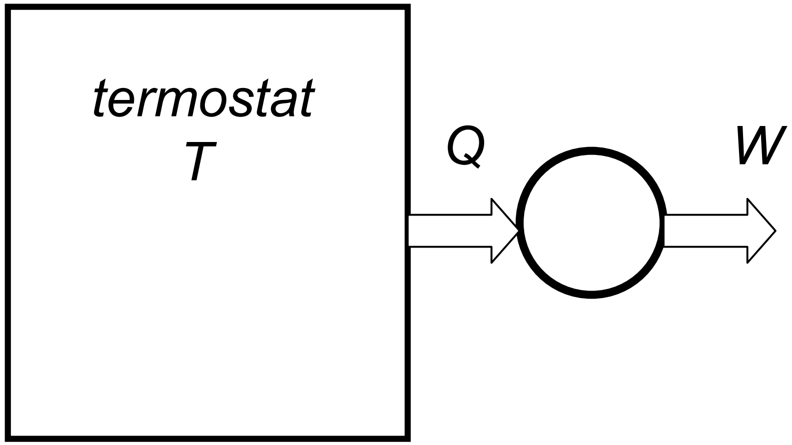
mezoskopowy

twierdzenie o fluktuacjach i dyssypacji
- Callen, Welton (1951)

$(t \leftrightarrow -t)$ **!!**

mikroskopowy

Druga zasada termodynamiki



niemożliwość zbudowania perpetuum mobile II rodzaju

$\Updownarrow$

niezmienniczość dynamiki mikroskopowej ze względu na zmianę $t \leftrightarrow -t$

Równanie Langevina bez pamięci

$$m\frac{du}{dt} = -\gamma u(t) + F(t)$$

siła stochastyczna

współczynnik oporu

$$\langle F(t) \rangle = 0,$$
$$\langle F(t_1)F(t_2) \rangle = \Gamma\,\delta(t_1 - t_2)$$

biały szum

$$\langle u^2(t \to +\infty) \rangle = k_B T / m,$$

ekwipartycja energii

$$\Downarrow$$

$$\Gamma = 2\gamma k_B T,$$

Równanie Langevina bez pamięci cd.

$$m\frac{du}{dt} = -\gamma u(t) + F(t)$$

jeżeli F(t) nie jest białym szumem to perpetuum mobile II rodzaju gotowe !!

$$u_\omega = Y(\omega)F_\omega, \qquad Y(\omega) = \frac{1}{im\omega + \gamma} \quad \Rightarrow \quad Z(\omega) = im\omega + \gamma$$

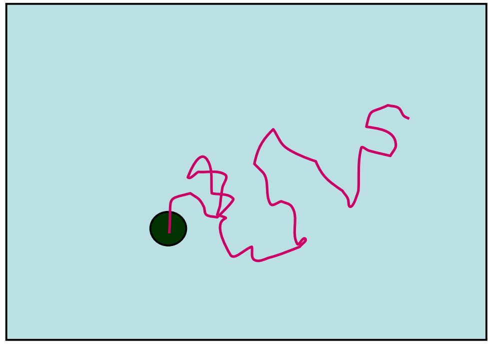
z tw. Nyquista

$$\left\langle \left|F_\omega\right|^2 \right\rangle = 2k_B T\gamma \quad \rightarrow \quad \left\langle F(t_1)F(t_2) \right\rangle = 2k_B T\gamma\delta(t_1 - t_2)$$

biały szum

Równanie Langevina bez pamięci – kryterium stosowalności

$$m\frac{du(t)}{dt} = -\gamma u(t) + F(t),$$



$$\frac{m_{atom}}{M} \ll 1$$

błąd !!!

$$\tau_B = \frac{\rho a^2}{\eta}$$ czas relaksacji prędkości cząstki Browna o gęstości ρ

$$\tau_\nu = \frac{\rho_c a^2}{\eta}$$ czas relaksacji procesów w płynie o gęstości ρ_c

$$\frac{\tau_\nu}{\tau_B} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_c}{\rho} \ll 1$$

ruchy Browna w gazach !!!
Lorentz (1911)

Stokes (1851) – problem siły oporu dla oscylującej kuli

$$F_{oporu}(t) = -\int_{-\infty}^{t} \gamma(t-t')u(t')\, dt'$$

$$\hat{\gamma}(\omega) = \int_{0}^{+\infty} \gamma(\mathrm{t})\, e^{i\omega t} dt,$$

$$\hat{\gamma}(\omega) = 6\pi\eta a\left(1+\alpha a+\frac{1}{9}(\alpha a)^2\right), \qquad \alpha = \left(\frac{i\omega\rho_c}{\eta}\right)^{1/2}$$

Równanie Langevina z pamięcią (wersja poprawna)

$$m\frac{du(t)}{dt} = -\int_{-\infty}^{t} \gamma(t-t')u(t')\,dt' + F(t), \qquad \langle F(t)\rangle = 0$$

Jest to związek pomiędzy u(t) i F(t) i nic więcej !!

Wyznaczenie ich własności wymaga odwołania się do tw. Nyquista (F-D)

$$Y(\omega) = \frac{1}{-im\omega + \hat{\gamma}(\omega)}, \qquad \int_{0}^{+\infty} \langle u(t)u(0)\rangle\, e^{i\omega t} dt = k_B T\ Y(\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$m\frac{d}{dt}\langle u(t)u(0)\rangle = -\int_{0}^{t} \gamma(t-t')\langle u(t')u(0)\rangle\, dt', \qquad \langle u^2(0)\rangle = k_B T/m$$

„Rewolucja” lat 60-tych XX wieku

$$\int_0^{+\infty} \langle u(t)u(0) \rangle \, e^{i\omega t} dt = k_B T \; Y(\omega), \qquad Y(\omega) = \frac{1}{-im\omega + \hat{\gamma}(\omega)}$$

przybliżenie $\qquad \hat{\gamma}(\omega) = \gamma \quad \Rightarrow \quad \langle u(t)u(0) \rangle \sim e^{-\frac{\gamma}{m}t}$

bez przybliżenia $\qquad \langle u(t)u(0) \rangle \sim t^{-3/2}$

Równanie Langevina z pamięcią (wersja naciągana)

$$m\frac{du(t)}{dt} = -\int_0^t \gamma(t-t')u(t')\,dt' + \overline{F}(t)$$ *Kubo*

$$\left\langle \overline{F}(t)u(0) \right\rangle = 0$$ *powołanie się na przyczynowość*

$$\downarrow$$

$$m\frac{d}{dt}\left\langle u(t)u(0)\right\rangle = -\int_0^t \gamma(t-t')\left\langle u(t')u(0)\right\rangle dt'$$ *tw. F-D !!*

Felderhof (1978):

$$\left\langle \overline{F}(t+\tau)u(t) \right\rangle = \int_0^t \gamma(|t'+\tau|)\left\langle u(t')u(0)\right\rangle dt', \qquad \tau$$ - *dowolne*

Podsumowanie

1. Występowanie fluktuacji nie może prowadzić do łamania II zasady termodynamiki – rozwinięcie tej konstatacji prowadzi do twierdzenia Nyquista.

2. W ramach teorii liniowej odpowiedzi twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia F-D i wyprowadzane jest po wykonaniu szeregu żmudnych przekształceń z wykorzystaniem niezmienniczości dynamiki mikroskopowej ze względu na odbicie t na –t. W związku z tym często twierdzenie F-D traktowane jest jako niezbyt głęboki wynik manipulacji matematycznych.

3. Tymczasem twierdzenie Nyquista (F-D) ma charakter podstawowy i wszelkie próby jego ignorowania, ominięcia lub modyfikacji kończą się tak samo boleśnie –

konstrukcją perpetuum mobile II rodzaju.