Lagrange, Hamilton i kwantowa próżnia relatywistyczna

Adam Bednorz

Instytut Fizyki Teoretycznej
Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

2012-12-13

Równania Lagrange'a

$q(t)$ – możliwa trajektoria czasowa, $\dot{q} = dq/dt$

Lagranżjan $L(q, \dot{q}, t)$

Działanie

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\ L$$

Ekstremum S, ustalone $q(t_0)$ i $q(t_1)$ $\rightarrow$ rzeczywista trajektoria $q(t)$

Równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Wiele stopni swobody

$q_1, \ldots q_n$, $L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

Ogólnie $L = T - V$
Nierelatywistycznie (masy m_k), bez więzów

$$T = \sum_k m_k \dot{q}_k^2/2, \quad V = V(q)$$

Energia kinetyczna T
Elektrodynamika
Q – ładunek, A^0 – potencjał skalarny, $\vec{A}$ – wektorowy:
$T = mv^2/2$, $V = QA^0 - Q\vec{v} \cdot \vec{A}$, $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$

Relatywistycznie ($c = 1$)

czas własny $d\tau = dt/\gamma = dt\sqrt{1 - v^2}$
τ – niezmiennik relatywistyczny

$$T = m\sqrt{1 - v^2} = md\tau/dt$$

$\int dt\ T = \int md\tau$
Elektrodynamika

$$S = \int dt\ L = \int md\tau - Q \int dx \cdot A$$

$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$
$t = x^0,\ b_{1,2,3} = -b^{1,2,3},\ b^0 = b_0$
Działanie niezmiennicze!
Energia kinetyczna m^2/T

Równania Hamiltona

Transformacja Legendre'a

$$p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$$

$$H = H(q, p) = \sum_k \dot{q}_k p_k - L$$

Odwracalność

$$\dot{q}_k = \partial H / \partial p_k, \quad L = \sum_k \dot{q}_k p_k - H$$

Równania ruchu

$$\dot{q}_k = \partial H / \partial p_k, \quad \dot{p}_k = -\partial H / \partial q_k$$

H – stała ruchu, jeśli $L = L(q, \dot{q})$ (nie zależy jawnie od czasu)

Nawias Poissona

$$\{A, B\} = \sum_k \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial B}{\partial q_k} \frac{\partial A}{\partial p_k}$$

Przestrzeń fazowa

$d\Gamma = dq_1 dp_1 \cdots dq_n dp_n$
Ruch nieściśliwy (twierdzenie Liouville'a)

$$\mathrm{Div}(\dot{q}, \dot{p}) = \sum_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} = \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} = 0$$

Entropia: $-\int d\Gamma \rho \ln \rho$ stała mikroskopowo!

Stany Gibbsa – maksymalizacja entropii, ustalone $\langle H \rangle$, $\langle N \rangle$, ...

$$\rho \propto \exp(-\beta H + \beta \mu N + \dots)$$

$\beta = 1/kT$

Niezmienniczość relatywistyczna d^3xd^3p

Dowód (van Kampen 1968): d^4x i d^4p są niezmienicze

$$\int d^4x\ \delta(\tau - \tau_a) = \int d^4x\ \delta(t - t_a)/(d\tau/dt)$$

$$\int d^4p\ \delta_+(p \cdot p - m^2) = \int d^4p\ \delta(p^0 - p_a^0)/2p^0$$

ale $d\tau/dt = \sqrt{1 - v^2} = m/p^0$, $p^0 = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} + m^2}$

Teoria pola

$\phi(x) = \phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$

$$2L = \int d^3x(\partial\phi \cdot \partial\phi - m^2\phi^2 - \lambda\phi^4)$$

$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$

$$S = \int d^4x \mathscr{L}, \quad 2\mathscr{L} = \partial\phi \cdot \partial\phi - m^2\phi^2 - \lambda\phi^4$$

$\mathscr{L}$ niezmiennicze relatywistycznie
$\pi = \partial_0\phi$

$$H = \int d^3x[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 + \lambda\phi^4]/2$$

Mechanika kwantowa ($\hbar = 1$)

$$\{A, B\} \to [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Kwantyzacja kanoniczna

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_k] = i$$

pozostałe zerowe

$$\hat{H} = H(\hat{q}, \hat{p})$$

problemy przy $H = q^2 p^2$

Ewolucja – równanie Schrödingera

$$i d|\psi\rangle / dt = \hat{H}|\psi\rangle$$

Macierz gęstości

$$i d\hat{\rho}/dt = [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

Obraz Heisenberga

$$-i d\hat{A}/dt = [\hat{H}, \hat{A}]$$

Pytania kwantowe

$$\langle \hat{A}_n(t_n) \dots \hat{A}_1(t_1) \rangle = \mathrm{Tr} \hat{A}_n(t_n) \dots \hat{A}(t_1) \hat{\rho}$$

$\hat{H}$ hermitowski $\rightarrow$ ewolucja unitarna
Entropia: $-\mathrm{Tr}\hat{\rho} \ln \hat{\rho}$, stała mikroskopowo
Stany Gibbsa, maksymalizacja entropii

$$\hat{\rho} \propto \exp(-\beta \hat{H} + \beta \mu \hat{N} + \dots)$$

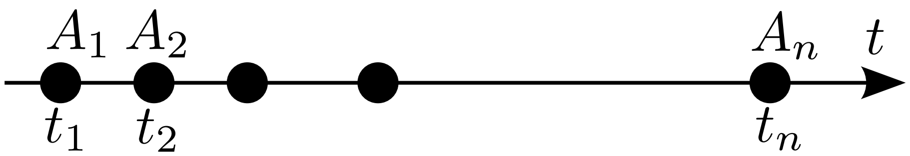
Feynman 1948 (rozpraszanie, macierz S, amplitudy, in-out)

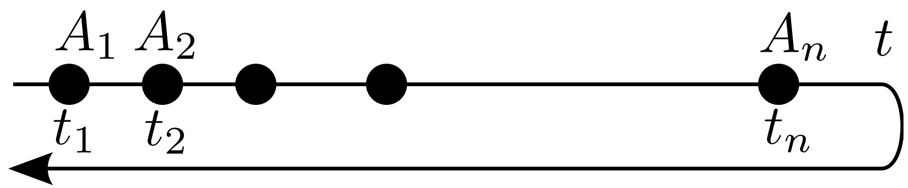
$$\langle \hat{A}_n(t_n)\ldots\hat{A}_1(t_1)\rangle$$

$t_n > \cdots > t_1$

$$\mathrm{Tr} e^{i\hat{H}t_n}\hat{A}_n e^{i\hat{H}(t_{n-1}-t_n)}\hat{A}_{n-1}\cdots\hat{A}_1 e^{-i\hat{H}t_1}\hat{\rho}$$

Kontur Feynmana



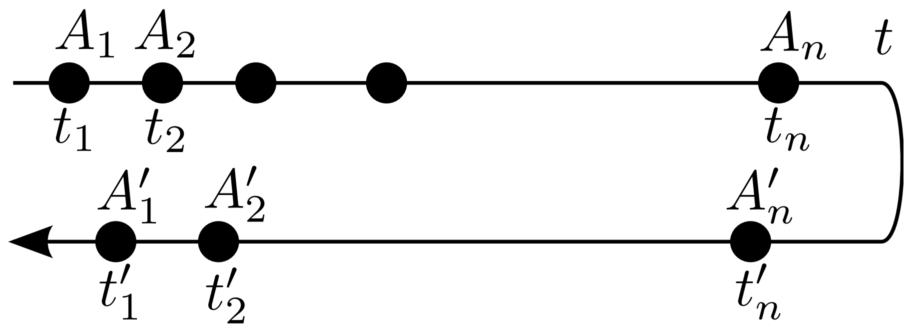


Schwinger 1961 i Kiełdysz 1964, in-in

$$\langle \hat{A}'_n(t'_1)\dots\hat{A}'_1(t'_n)\hat{A}_n(t_n)\dots\hat{A}_1(t_1)\rangle$$

$t_n > \cdots > t_1,\ t'_n > \cdots > t'_1$

Kontur Schwingera-Kiełdysza

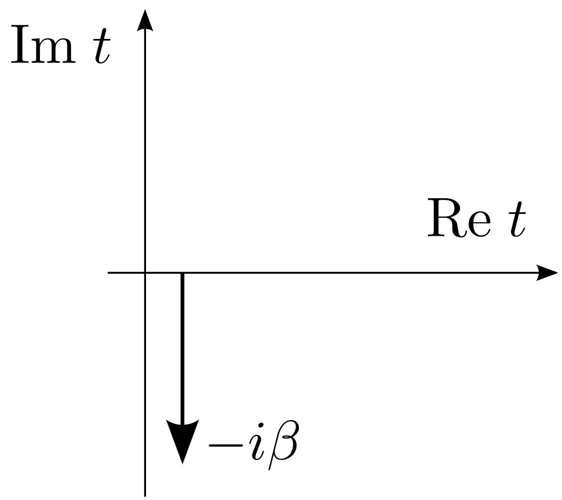


Matsubara 1955

$$\hat{\rho} \propto e^{-\beta \hat{H}}$$

$t = -i\beta$

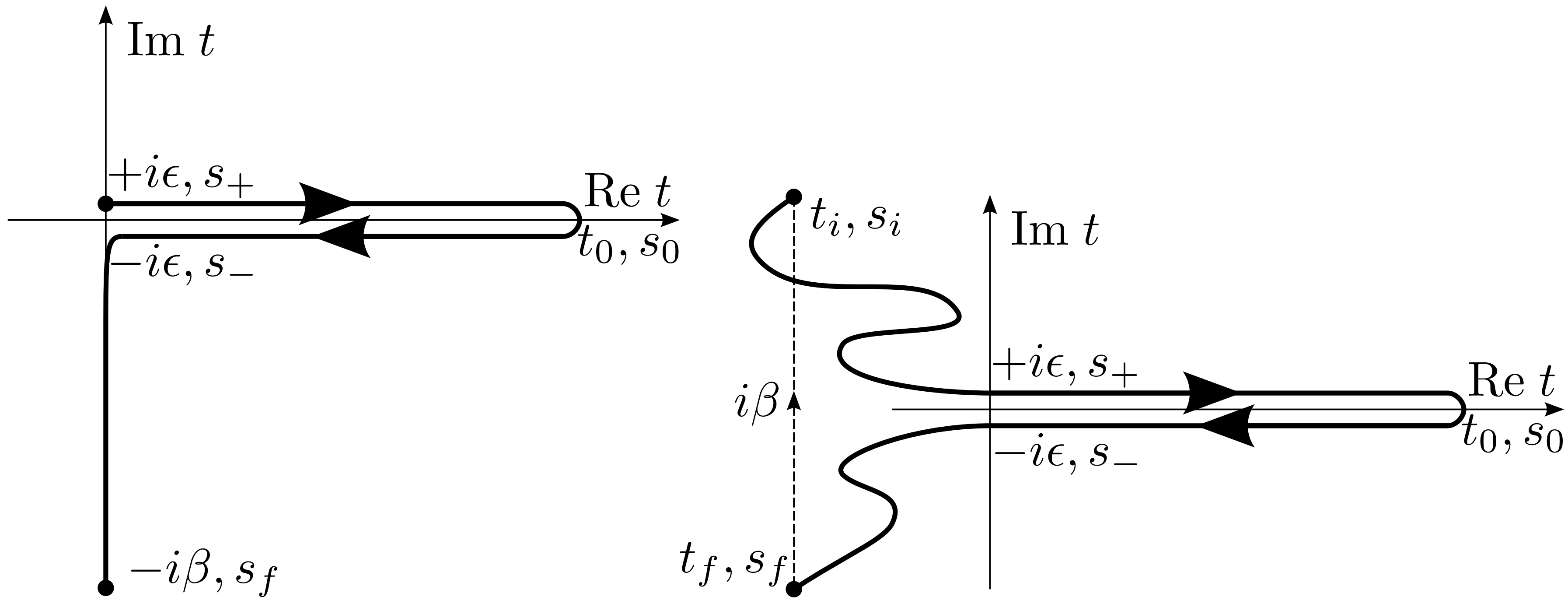
Kontur Matsubary



Kadanoff i Baym 1962

$t(s)$, $t \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$, $dt = (dt/ds)ds$, $\partial/\partial t = (dt/ds)^{-1}\partial/\partial s$
$\delta(t-t') = \delta(s-s')/(dt/ds)$, $\theta(t-t') = \theta(s-s')$

$$\langle \hat{A}'_n(t'_1)\ldots\hat{A}'_1(t'_n)\hat{A}_n(t_n)\ldots\hat{A}_1(t_1)\rangle_\beta = \mathrm{Tr}\mathcal{T}_s e^{-i\int dt\hat{H}}\hat{A}'_1\ldots\hat{A}'_n\hat{A}_n\ldots\hat{A}_1$$



Niezmienniczość relatywistyczna

$\beta < \infty \rightarrow$ narzuca układ odniesienia

czterowektor $\beta = (\beta, 0, 0, 0)$

Skalar $\beta^{\mu} P_{\mu}$ $\qquad$ $P = (H, \vec{P})$ - czteropęd

Próżnia: $\beta \rightarrow \infty$, $\hat{\rho} \rightarrow |0\rangle\langle 0|$

Aksjomat Wightmana 1956
$\langle \hat{A}_n(x_n) \ldots \hat{A}_1(x_1) \rangle_0$ jest niezmiennicze relatywistycznie

generatory boostów J^{01}, J^{02}, J^{03} (pozostałe – obroty)

$$J^{\mu\nu} = x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu}$$

Teorie swobodne

Dla lagranżjanów biliniowych

$$\hat{H} = \int d^3p\, p\, p^0\, \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$$

Prożnia $|0\rangle$: $\hat{a}|0\rangle = 0$

Pole skalarne

$$\hat{a}_p = \int d^3x (\sqrt{p^0}\hat{\phi}(x) + i\hat{\pi}(x)/\sqrt{p^0}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}/4\pi^{3/2}$$

$p \cdot p = m^2 \to$ wzory na korelacje

Niezmienniczość dowodzi się bezpośrednim rachunkiem

Całki po trajektoriach

Feynman

$$\langle q|e^{-it\hat{H}}|q'\rangle = \int_{q(0)=q'}^{q(t)=q} Dq\ e^{iLt}$$

t może byc zespolone!

$$\langle \hat{A}'_n(x'_1)\dots\hat{A}'_1(x'_n)\hat{A}_n(x_n)\dots\hat{A}_1(x_1)\rangle_\beta =$$

$$\int D\phi\ e^{i\int d^4x \mathscr{L}}\ A'_n(x'_n)\dots A'_1(x'_1)A_n(x_n)\dots A_1(x_1)$$

Funkcje Greena

$$G(x,x') = \langle \phi(x)\phi(x')\rangle = \int D\phi\, e^{i\int d^4x \mathscr{L}}\, \phi(x)\phi(x')$$

$$\delta(x-x') = \int D\phi\, e^{i\int d^4x \mathscr{L}}\, \delta(x-x') = \int D\phi\, e^{i\int d^4y \mathscr{L}}\, \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x')}$$

$$= -\int D\phi\, e^{i\int d^4y \mathscr{L}} \int id^4y \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta\phi(x)}\phi(x')$$

$$2\mathscr{L} = \partial\phi(y)\cdot\partial\phi(y) - m^2\phi^2(y)$$

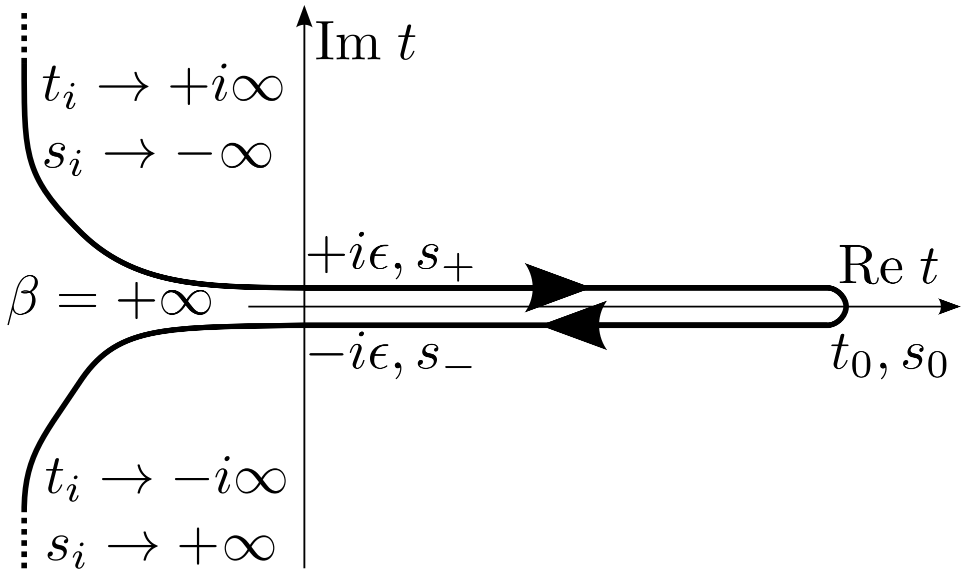
$$-\int id^4y \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\phi(x)} = i\partial\cdot\partial\phi(x) + im^2\phi(x)$$

$$\delta(x-x') = i(\partial\cdot\partial + m^2)G(x,x')$$

$$G(x,x') = \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3} \sum_{\pm} \mp \frac{e^{\pm ip^\mu |x-x'|_\mu}}{1-e^{\pm\beta p^0}}$$

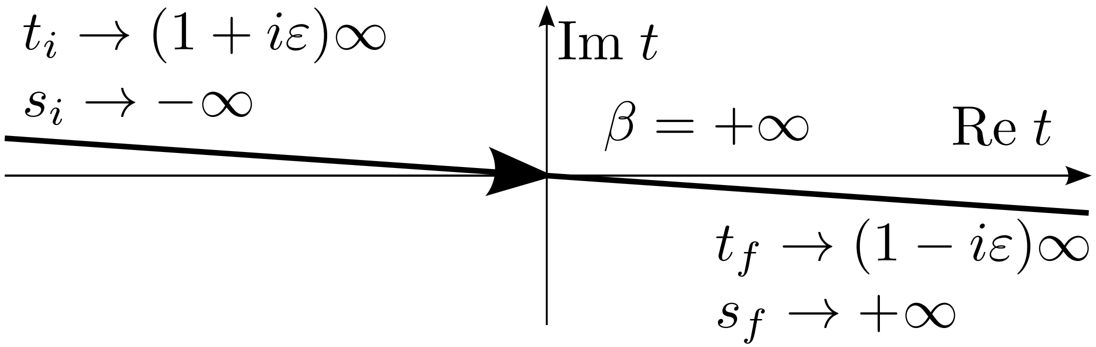
$$|x-x'|^{1,2,3} = (x-x')^{1,2,3}$$
$$|x-x'|^0 = \theta(x^0-x'^0)(x^0-x'^0) + \theta(x'^0-x^0)(x'^0-x^0)$$

Zerowa temperatura



A.B. arxiv:1209.0209

Przypadek Feynmana, amplitudy



Podsumowanie

Lagrange

- niezmienniczość relatywistyczna dynamiki
- kwantowo – całki po trajektoriach
- kwantowa próżnia niezmiennicza
- zastosowanie: kwantowy oscylator harmoniczny

Hamilton

- fizyka statystyczna
- kwantowo: operatory, komutatory
- entropia
- zastosowanie: kwantowa studnia, atom wodoru

Kadanoff-Baym $\rightarrow$ łamanie symetrii czasu