Geometryczne podstawy mechaniki analitycznej

Paweł Urbański
Division of Mathematical Methods in Physics
University of Warsaw
Hoża 74, 00-682 Warszawa

1. Trochę topologii.

Topologią na zbiorze M nazywamy rodzinę τ podzbiorów M o następujących własnościach:

(a) $\emptyset, M \in \tau$
(b) jeżeli $O_1, O_2 \in \tau$, to $O_1 \cap O_2 \in \tau$
(c) dla dowolnej rodziny $(O_\iota)_{\iota \in I}$ zbiorów należacych do τ ich suma $\bigcup_{\iota \in I} O_\iota \in \tau$.

Podzbiory należące do rodziny τ nazywamy zbiorami otwartymi. Zbiór M z ustaloną topologią τ nazywamy przestrzenią topologiczną.

1.1. Aksjomaty oddzielania. Ze względu na własności oddzielania wyróżnimy następujące klasy topologii:

T_1 Dla każdej pary różnych punktów $x, y \in M$ istnieje zbiór otwarty O taki, że $x \in O$ oraz $y \notin O$. W takiej przestrzeni zbiór jednopunktowy jest domknięty.

T_2 Dla każdej pary różnych punktów $x, y \in M$ istnieją zbiory otwarte O, U takie, że $x \in O$, $y \in U$ oraz $O \cap U = \emptyset$. Przestrzeń z topologią o tej własności nazywa się *przestrzenią Hausdorffa.*

T_3 Dla każdego punktu $x \in M$ oraz zbioru domkniętego $A \subset M$ takiego, że $x \notin A$ istnieją zbiory otwarte $O, U \subset M$ takie, że $x \in O$, $A \subset U$ oraz $O \cap U = \emptyset$. Zakłada się przy tym, że zbiór jednopunktowy jest domknięty (przestrzeń jest typu T_1). Przestrzeń z topologią z tymi własnościami nazywa się *przestrzenią regularną.*

T_4 Dla każdej pary rozłącznych zbiorów domkniętych $A, B \subset M$, $A \cap B = \emptyset$ istnieją rozłączne zbiory otwrte O, U takie, że $A \subset O$, $B \subset U$. Jak i poprzednio zakłada się, że zbiór jednopunktowy jest domknięty (przestrzeń jest typu T_1). Przestrzeń z topologią o tej własności nazywa się *przestrzenią normalną.*

Przestrzenie normalne są dla nas interesujące ze względu na poniższe podstawowe twierdzenie, ze względów historycznych nazywane lematem.

TWIERDZENIE 1 (LEMAT URYSOHNA). *Jeżeli A i B są domkniętymi zbiorami w przestrzeni normalnej M oraz $A \cap B = \emptyset$, to istnieje funkcja ciągła $f : M \to \mathbb{R}$ taka, że*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in B \\ 0 \text{ dla } x \in A \end{cases}$$

DOWÓD: (Szkic): Chcemy zbudować rodzinę zbiorów otwartych $\{U_w\}$, gdzie $w \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ i takich, że jeżeli $w < w'$, to $\overline{U}_w \subset U_{w'}$ oraz $A \subset U_0$, $B = M \setminus U_1$. Niech (w_n) będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych z przedziału $[0, 1]$ takim, że $w_1 = 0$ oraz $w_2 = 1$. Przestrzeń jest normalna, więc istnieją rozłączne zbiory otwarte $U \supset A$ i $O \supset B$. Kładziemy $U_0 = U$ i $U_1 = M \setminus B$. Mamy oczywiście $\overline{U}_0 \subset U_1$. Załóżmy teraz, że mamy już zbudowaną rodzinę $U_{w_0} \ldots U_{w_n}$. Wybierzmy z ciągu $w_0 \ldots w_n$ dwie liczby: liczbę w_l najbliższą w_{n+1} spośród mniejszych od niej i liczbę w_p najbliższą w_{n+1} spośród większych od niej. Mamy oczywiście $w_l < w_p$ i $\overline{U}_{w_l} \subset U_{w_p}$. Zbiory $\overline{U}_{w_l}$ i $M \setminus U_{w_p}$ są domknięte i rozłączne, więc z normalności przestrzeni istnieją rozłączne zbiory otwarte $U \supset \overline{U}_{w_l}$ i $O \supset (M \setminus U_{w_p})$. Wynika stąd, że $\overline{U} \subset U_{w_p}$. Kładziemy $U_{w_{n+1}} = U$.

Mając rodzinę (U_w) definiujemy funkcję $f \colon M \to [0, 1]$ wzorem

$$f(x) = \inf_{x \in U_w} w.$$

Pokazuje się, że funkcja f jest ciągła. ■

Twierdzenie 2 (Tietze–Urysohn). *Niech A będzie zbiorem domkniętym w przestrzeni normalnej M. Dla każdej funkcji ciągłej $f : A \to \mathbb{R}$ istnieje funkcja ciągła $\overline{f} : M \to \mathbb{R}$ taka, że $\overline{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A$.*

1.2. Przestrzenie parazwarte. Mówimy, że rodzina zbiorów otwartych $(O_\iota)_{\iota\in I}$ tworzy *pokrycie* M, jeżeli $\cup_{\iota\in I} O_\iota = M$. Mówimy, że pokrycie $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ jest *wpisane* w pokrycie $(O_\iota)_{\iota\in I}$ jeżeli dla każdego $\alpha \in A$ istnieje $\iota \in I$ takie, że $U_\alpha \subset O_\iota$.

Pokrycie $(O_\iota)_{\iota\in I}$ nazywamy *lokalnie skończonym*, jeżeli dla każdego $x \in M$ istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \cap O_\iota \neq \emptyset$ tylko dla skończonej liczby wskaźników.

Definicja 1. *Przestrzeń topologiczną Hausdorffa (M, τ) nazywamy parazwartą jeżeli w każde pokrycie otwarte przestrzeni można wpisać pokrycie lokalnie skończone.*

Pokazuje się, że każda przestrzeń parazwarta jest normalna.

2. Rozmaitości różniczkowe.

Niech M będzie przestrzenią topologiczną. *Mapą* w M nazywamy trójkę $c = (U, \varphi, m)$, gdzie U jest otwartym podzbiorem M, m jest nieujemną liczbą całkowitą i φ jest homeomorfizmem U na otwarty podzbiór $\varphi(U)$ w $\mathbb{R}^m$. Zbiór U jest nazywany *dziedziną* mapy c, a liczba m *wymiarem* mapy c.

Niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą w M i niech B będzie otwartym podzbiorem M, zawartym w U. Trójka $c|B = (B, \varphi|B, m)$ jest mapą w M nazywaną *obcięciem* mapy c do B.

Dwie mapy $c = (U, \varphi, m)$ and $c' = (U, \varphi', m')$ z tą samą dziedziną U są *zgodne* jeżeli dwa homeomorfizmy

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \varphi'(U) \tag{1}$$

i

$$\varphi \circ \varphi'^{-1} \colon \varphi'(U) \to \varphi(U) \tag{2}$$

są różniczkowalne. Różniczkowalne będzie zawsze oznaczać nieskończenie różniczkowalne, czyli klasy C^∞. Wymiary m i m' zgodnych map są równe. Dwie dowolne mapy $c = (U, \varphi, m)$ i $c' = (U', \varphi', m')$ nazywamy *zgodnymi* jeśli albo $U \cap U'$ jest zbiorem pustym albo obcięcia c i c' do $U \cap U'$ są zgodne. *Atlas* na M jest zbiorem parami zgodnych map takich, że ich dziedziny stanowią pokrycie M. Jeżeli każda mapa zgodna z mapami atlasu należy do tego atlasu, to mówimy, że atlas jezt *zupełny* lub *maksymalny*. Każdy atlas generuje atlas maksymalny.

Definicja 2. *Rozmaitością różniczkową* nazywamy topologiczną przestrzeń Hausdorffa M z atlasem maksymalnym. Elementy atlasu nazywamy *mapami* rozmaitości różniczkowej M. Rozmaitość różniczkową nazywać będziemy *czystą* o *wymiarze* m jeśli wszystkie jej mapy są wymiaru m.

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy tylko czyste rozmaitości.

Zbiór $\mathbb{R}^m$ posiada kanoniczną strukturę rozmaitości różniczkowej zdefiniowaną przez atlas zupełny generowany atlasem składającym się z jednej mapy $(\mathbb{R}^m, 1_{\mathbb{R}^m}, m)$.

Niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą rozmaitości M i niech $pr^\kappa \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ będzie kanonicznym rzutowaniem dla $\kappa = 1, \ldots, m$. Funkcje $x^\kappa = pr^\kappa|\varphi(U) \circ \varphi \colon U \to \mathbb{R}$ nazywamy *lokalnymi współrzędnymi* dla mapy c.

Niech η będzie odwzorowaniem z rozmaitości różniczkowej M do rozmaitości różniczkowej N i niech $c = (U, \varphi, m)$ oraz $d = (V, \psi, n)$ będą mapami odpowiednio M i N takimi, że $\eta(U) \subset V$. Odwzorowanie

$$\psi \circ \eta \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \psi(V) \tag{3}$$

nazywamy *lokalnym wyrażeniem* odwzorowania η w mapach c i d.

Definicja 3. Niech M i N będą rozmaitościami różniczkowymi. Odwzorowanie $\eta \colon M \to N$ nazywamy *różniczkowalnym* jeżeli wszystkie jego lokalne wyrażenia są różniczkowalne. *Dyfeomorfizm* jest bijektywnym odwzorowaniem różniczkowalnym z różniczkowalnym odwzorowaniem odwrotnym.

Zbiór odwzorowań różniczkowalnych z M do N jest oznaczany $C^\infty(N, M)$. Oczywistym jest, że złożenie odwzorowań różniczkowalnych rozmaitości jest odwzorowaniem różniczkowalnym.

Zbiór $C^\infty(\mathbb{R}, M)$ wszystkich funkcji różniczkowalnych na M jest przemienną algebrą łączną nad ciałem $\mathbb{R}$. Oznaczać ją będziemy $\mathcal{C}(M)$.

DEFINICJA 4. Niech U będzie otoczeniem punktu $q \in M$. Mówimy, że różniczkowalna funkcja $h: M \to \mathbb{R}$ *separuje* punkt q w zbiorze U jeżeli

(a) istnieje otoczenie V punktu q takie, że $h|V = 1$

oraz

(b) istnieje otwarty zbiór W taki, że $U \cup W = M$ i $h|W = 0$.

Równości $h|V = 1$ i $h|W = 0$ implikują, że zbiory V i W są rozłączne. Wynika stąd, że $V \subset U$, bo $U \cup W = M$.

Zauważmy, że jeżeli funkcja h separuje punkt q w otoczeniu U i f jest funkcją na M taką, że $f|U = 0$, wtedy $hf = 0$. Jeżeli U i U' są otoczeniami punktu q, $U \subset U'$ i funkcja h separuje q in U, to h separuje q w U'.

STWIERDZENIE 1. *Dla każdego otoczenia U punktu $q \in M$ istnieje nieujemna funkcja h separująca q w U.*

DOWÓD: Wiadomo, że funkcja

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &: t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \\ \exp(-t^{-1}) & \text{dla } t > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

Zauważmy, że

$$\gamma(\varepsilon - t) = \begin{cases} \exp((t-\varepsilon)^{-1}) > 0 & \text{dla } t < \varepsilon \\ 0 & \text{dla } t \geq \varepsilon \end{cases} \tag{5}$$

i

$$\gamma(t - \varepsilon/2) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq \varepsilon/2 \\ \exp((\varepsilon/2 - t)^{-1}) > 0 & \text{dla } t > \varepsilon/2. \end{cases} \tag{6}$$

Zatem

$$\gamma(\varepsilon - t) + \gamma(t - \varepsilon/2) > 0. \tag{7}$$

Wynika stąd, że funkcja

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon &: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ &: t \mapsto \frac{\gamma(\varepsilon - t)}{\gamma(\varepsilon - t) + \gamma(t - \varepsilon/2)} \end{aligned} \tag{8}$$

jest nieskończenie różniczkowalna. Mamy $\delta_\varepsilon(t) = 1$ dla $t < \varepsilon/2$ i $\delta_\varepsilon(t) = 0$ dla $t > \varepsilon$. W przedziale $[\varepsilon/2, \varepsilon]$ funkcja δ_ε maleje monotonicznie.

Niech U będzie dziedziną mapy $c = (U, \varphi, m)$ zawierającą punkt $q \in M$ i niech x^κ ($k = 1, \ldots, m$) będą lokalnymi współrzędnymi tej mapy. Niech ε będzie dodatnią liczbą taką, że domknięta kula

$$\overline{B(q^\kappa, \varepsilon)} = \left\{ (q'^\kappa) \in \mathbb{R}^m;\ \sum_{\kappa=1}^m (q'^\kappa - q^\kappa)^2 \leq \varepsilon^2 \right\} \tag{9}$$

jest zawarta w $\varphi(U)$. Niech V będzie przeciwobrazem $\varphi^{-1}(B(q^\kappa, \varepsilon/2))$ otwartej kuli

$$B(q^\kappa, \varepsilon/2) = \left\{ (q'^\kappa) \in \mathbb{R}^m;\ \sum_{\kappa=1}^m (q'^\kappa - q^\kappa)^2 \leq \varepsilon^2/4 \right\}. \tag{10}$$

Zbiór
$$W = M \setminus \varphi^{-1}\left(\overline{B(q^\kappa, \varepsilon)}\right) \tag{11}$$
jest otwarty i $U \cup W = M$. Funkcja

$$\begin{aligned} h\colon M &\to \mathbb{R} \\ : q' &\mapsto \begin{cases} \delta_\varepsilon\left(\sqrt{\sum_{\kappa=1}^m (x^\kappa(q') - x^\kappa(q))^2}\right) & \text{dla } q' \in U \\ 0 & \text{dla } q' \notin U \end{cases} \end{aligned}$$

jest nieskończenie różniczkowalna, $h|V = 1$ i $h|W = 0$. Zatem h separuje q w U. Jeżeli U nie jest dziedziną mapy, to funkcję h separującą q w U dostaniemy stosując powyższą konstrukcję do dowolnej dziedziny mapy, zawierającej q i zawartej w U. ■

Stwierdzenie 1. *Odwzorowanie $\Phi\colon M \to N$ jest różniczkowalne wtedy, gdy dla każdej funkcji różniczkowalnej $f \in \mathcal{C}(N)$ mamy*
$$\Phi^* f = f \circ \Phi \in \mathcal{C}(M).$$

Dowód: Jeżeli odwzorowanie Φ jest różniczkowalne i $f \in \mathcal{C}$, to $f \circ \Phi$ jest różniczkowalna, bo złożenie odwzorowań różniczkowalnych jest różniczkowalne.

Niech teraz $f \circ \Phi \in \mathcal{C}(M)$ dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}(N)$. Lokalne wyrażenie Φ
$$\psi \circ \eta \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \psi(V)$$
w mapach $c = (U, \varphi, m)$ oraz $d = (V, \psi, n)$ jest różniczkowalne, jeżeli jest różniczkowalne w każdym punkcie. Niech $q \in U$ i niech funkcja $h \in \mathcal{C}(N)$ separuje $\Phi(q)$ w V. Odwzorowanie $h\psi$ można przedłużyć zerem do odwzorowania gładkiego $\widetilde{\psi}$ na całym N. Na mocy założenia współrzędne tego odwzorowania są funkcjami gładkimi, zatem $\widetilde{\psi} \circ \Phi$ i $\widetilde{\psi} \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ są odwzorowaniami gładkimi. Ponieważ w otoczeniu $\varphi(q)$ odwzorowanie $\widetilde{\psi} \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ jest równe $\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$, więc to ostatnie jest różniczkowalne (gładkie) w $\varphi(q)$. ■

Warunek z definicji rozmaitości, że M jest przestrzenią Hausdorffa jest istotny. Nie wynika on z istnienia atlasu, co ilustruje poniższy przykład.

Niech:
$$\mathbb{R}^2 \supset B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0 \text{ lub } y = 1\}.$$
Topologia na B jest topologią z $\mathbb{R}^2$. W B wprowadzamy relację równoważności
$$\sim\colon (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \text{ i } ((y_1 = y_2) \text{ lub } (x_1 > 0)).$$
Wtedy $B/\sim$ nie jest Hausdorffa, bo każda para otoczeń punktów $A = (0,0)$ i $B = (0,1)$ ma niepuste przecięcie. W oczywisty sposób wprowadzamy na B lokalne układy współrzędnych.

2.1. Rozmaitości parazwarte. Rozkład jedności. Wśród rozmaitości różniczkowych szczególną rolę odgrywają rozmaitości parazwarte. Do tego stopnia, że na ogół żądanie parazwartości jest elementem definicji.

Przypomnijmy, że przestrzeń jest parazwarta, jeżeli w każde pokrycie (zbiorami otwartymi) można wpisać pokrycie lokalnie skończone.

Zauważmy teraz, że jeżeli dana jest funkcja gładka $h\colon M \to \mathbb{R}$ oraz zbiór otwarty $U \subset M$, to zbiór punktów które funkcja h separuje w U jest otwarty.

Stwierdzenie 2. *Niech M będzie rozmaitością parazwartą. Dla każdego pokrycia zbiorami otwartymi $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ istnieją wpisane weń pokrycie $(O_\iota)_{\iota \in I}$ oraz rodzina nieujemnych funkcji $(h_i)_{\iota \in I}$ takie, że*

a) *$(O_\alpha)_{\alpha \in A}$ jest pokryciem lokalnie skończonym,*
b) *$(V_\iota)_{\iota \in I}$ jest pokryciem M, gdzie V_ι jest niepustym zbiorem punktów separowanych w O_ι przez h_ι.*

Stwierdzenie to pozostawimy bez (niezbyt skomplikowanego) dowodu. Wynika z niego podstawowe dla zastosowań twierdzenie o istnieniu rozkładu jedności.

DEFINICJA 5. *Rozkładem jedności* na M nazywamy rodzinę funkcji (f_ι) taką, że

a) dla każdego punktu $q \in M$ istnieje otoczenie U takie, że tylko skończona liczba funkcji z tej rodziny jest różna od zera na U,
b) funcje f_ι są nieujemne,
c) $\sum_\iota f_\iota(q) = 1$ dla każdego $q \in M$.

Własność a) nazywa się *lokalną skończonością* rodziny

TWIERDZENIE 3. *Dla każdego pokrycia $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ rozmaitości parazwartej M istnieje rozkład jedności $(f_\iota)_{\iota\in I}$ taki, że dla każdego ι istnieje $\alpha(\iota) \in A$, że $\operatorname{supp} f_\iota \subset U_{\alpha(\iota)}$.*

DOWÓD: Ze Stwierdzenia 2 wynika istnienie lokalnie skończonej rodziny nieujemnych funkcji $(h_i)_{\iota\in I}$ takiej, że dla kazdego ι istnieje $\alpha \in A$ takie, że $\operatorname{supp} h_i \subset U_\alpha$ oraz że dla każdego $q \in M$ istnieje funkcja h_ι z tej rodziny dla której $h_\iota(q) = 1$. Wynika stąd, że $h = \sum_\iota h_\iota$ ma sens i jest dodatnią funkcją różniczkowalną. Teraz wystarczy położyć $f_\iota = \dfrac{h_\iota}{h}$. ■

Łatwo zauważyć, że z istnienia rozkładu jedności wpisanego w dowolne otoczenie wynika parazwartość. Zatem dla rozmaitości parazwartość jest równoważna istnieniu (dla każdego pokrycia) różniczkowalnego rozkładu jedności.

2.2. Rozpoznawanie parazwartości. Z faktu, że lokalnie M jest diffeomorficzne otoczeniu otwartemu w $\mathbb{R}^m$ wynika, że M jest przestrzenią lokalnie zwartą, tzn. każdy punkt posiada zwarte otoczenie. Ta własność pozwala łatwiej rozpoznawać rozmaitości parazwarte.

TWIERDZENIE 4. *Lokalnie zwarta przestrzeń M jest parazwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą $M = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$ przeliczalnej rodziny zbiorów zwartych.*

DEFINICJA 6. Mówimy, że pewna rodzina $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ zbiorów otwartych tworzy *bazę topologii*, gdy dowolny zbiór otwarty jest sumą zbiorów należących do tej rodziny.

PRZYKŁAD 1. Na przykład w $\mathbb{R}^n$ istnieje przeliczalna baza topologii. Jako zbiory bazowe bierzemy kule o środku w punkcie o współrzędnych wymiernych i o promieniu wymiernym.

TWIERDZENIE 5. *Dla rozmaitości M następujące warunki są równoważne*

(1) *M jest parazwarta,*
(2) *M posiada przeliczalną bazę topologii,*
(3) *M jest ośrodkowa, tzn. posiada przeliczalny zbiór gęsty,*
(4) *M jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów zwartych.*

Przykład spójnej rozmaitości nieparazwartej. Zdefiniujmy półprzestrzenie w $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

$$\mathbb{R}^2_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 0\}$$

oraz rodzinę odwzorowań

$$\begin{aligned} f_a\colon \mathbb{R}^2_+ &\to \mathbb{R}^2_+ \\ \colon (x,y) &\mapsto (a + yx, y). \end{aligned} \tag{12}$$

W zbiorze $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ wprowadzamy relację równoważności:

$$(x,y,a) \sim (x',y',a') \equiv \begin{cases} a = a',\ (x,y) = (x',y'), & \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2_- \\ f_a(x,y) = f_{a'}(x',y'), & \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \end{cases}. \tag{13}$$

Oznaczmy zbiór klas równoważności przez E. Mamy oczywiste utożsamienie

$$E = (\mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}) \cup \mathbb{R}^2_+. \tag{14}$$

Mamy naturalne odwzorowania włożenia

$$\begin{aligned} \varphi_a \colon \mathbb{R}^2 &\to E \\ \colon (x,y) &\mapsto \begin{cases} (x,y,a), & \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2_- \\ f_a(x,y), & \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \end{cases}. \end{aligned} \tag{15}$$

W E wprowadzamy topologię indukowaną odwzorowaniami φ_a, tzn. bazą otoczeń E są obrazy zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^2$ (wystarczy bazy). Łatwo zauważyć, że jako bazę otoczeń punktu (x,y,a), $(x,y) \in \mathbb{R}^2_-$, gdzie $y \neq 0$ możemy wziąć $(0 < r < -y)$

$$K_a((x,y),r) = \{(x',y',a) \colon (x'-x)^2 + (y'-y)^2 < r^2\},$$

jako bazę otoczeń $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ rodzinę kul w $\mathbb{R}^2$ o środku w (x,y) i promieniu $0 < r < y$, zaś bazę otoczeń punktu $(x,0,a)$ tworzą zbiory $S_a(x,r)$będące obrazami kwadratów $|x'-x| < r,\ |y| < r$:

$$S_a(x,r) = \{(x',y,a) \colon |x'-x| < r, 0 \geqslant y > -r\} \cup \{(x',y) \colon 0 < y < r,\ (x-r)y < x'-a < (x+r)y\}. \blacksquare \tag{16}$$

Każdy punkt E ma więc otoczenie homeomorficzne otoczeniu otwartemu w $\mathbb{R}^2$ i łatwo wprowadzić na E strukturę rozmaitości różniczkowej. Rozmaitość ta jest spójna. Ponieważ jednak dla każdego $b \neq a$ mamy $S_a(x,r) \not\ni (x',y',b)$, więc baza otoczeń wszystkich punktów $(x,0,a)$ jest nieprzeliczalna. Stąd E nie jest parazwarta.

Opisana powyżej rozmaitość nosi nazwę *rozmaitości Prüffera.*

UWAGA! OD TEJ CHWILI ZAKŁADAMY, ŻE WSZYSKIE ROZMAITOŚCI Z KTÓRYMI MAMY DO CZYNIENIA SĄ PARAZWARTE!!.

3. Podrozmaitości.

Niech S będzie podzbiorem rozmaitości różniczkowej M. Jeżeli dla każdego punktu $q_0 \in S$ istnieje otoczenie U tego punktu w M i mapa $c = (U, \varphi, m)$ z lokalnymi współrzędnymi x^κ $(\kappa = 1, \dots, m)$ takimi, że

$$S \cap U = \{q \in U;\ x^\kappa(q) = 0 \text{ for } \kappa = k+1, \dots, m\} \tag{17}$$

to S posiada jedyną strukturę rozmaitości różniczkowej taką, że funkcje x^κ $(\kappa = 1, \dots, k)$ obcięte do $S \cap U$ są lokalnymi współrzędnymi w S. Rozmaitość różniczkową S otrzymaną w ten sposób nazywamy *podrozmaitością* rozmaitości of M.

Kanoniczne włożenie $i^M{}_S \colon S \to M$ podrozmaitości S w M jest różniczkowalne. Jeżeli $\eta \colon M \to N$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym to obcięcie $\eta|S$ odwzorowania η do S jest różniczkowalne.

Niech W będzie otwrtym podzbiorem rozmaitości M i niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą w M. Jeżeli przecięcie $U \cap W$ nie jest puste, to obcięcie c do $U \cap W$ jest mapą w W. Biorąc z atlasu M wszystkie mapy $c = (U, \varphi, m)$ takie, że $U \cap W$ nie jest zbiorem pustym konstruujemy atlas W złożony z obcięć $c|U \cap W$. Zbiór W z atlasem maksymalnym generowanym przez ten atlas nazywamy *otwartą podrozmaitością* rozmaitości M.

Niech teraz S, S' będą podrozmaitościami M odpowiednio wymiaru k i l.

Definicja 7. Mówimy, że S, S' mają *czyste przecięcie* w $q_0 \in S \cap S'$ jeżeli istnieje układ współrzędnych, taki że $q_0 \in U$, $U \cap S = \{q \in M \colon x^{k+1}(q) = \cdots = x^m(q) = 0\}$ oraz $U \cap S' = \{q \in M \colon x^{p+1}(x) = \ \dots\ = \varphi^{m-l+p}(x) = 0\}$.

Jeżeli $p > k$, to $S \subset S'$, jeżeli $p \leqslant k$, to $U \cap (S \cap S') = \{q \in M \colon x^{p+1}(q) = \cdots = x^m(q) = 0\}$ więc z definicji czystego przecięcia wynika, że $S \cap S'$ jest podrozmaitością.

Definicja 8. Mówimy, że przecięcie podrozmaitości S, S' jest transwersalne w $q_0 \in S \cap S'$ jeżeli istnieje układ współrzędnych, taki że $U \cap S = \{q \in M : x^{k+1}(q) = \cdots = x^m(q) = 0\}$ oraz $U \cap S' = \{q \in M : x^1(q) = \cdots = x^{m-l}(q) = 0\}$ przy czym $k + l \geqslant m$

4. Iloczyn kartezjański rozmaitości.

Niech M_1 i M_2 będą rozmaitościami różniczkowymi. Jeżeli $c_1 = (U_1, \varphi_1, m_1)$ oraz $c_2 = (U_2, \varphi_2, m_2)$ są mapami odpowiednio w M_1 i w M_2, to *mapa produktowa* $c_1 \times c_2 = (U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2, m_1 + m_2)$ jest mapą w $M_1 \times M_2$. Mając atlasy M_1 i M_2 dostajemy w ten sposób atlas w $M_1 \times M_2$. Zbiór $M_1 \times M_2$ z tym atlasem tworzy rozmaitość różniczkową nazywaną *iloczynem (produktem) rozmaitości.* Niech x_1^κ $(\kappa = 1, \ldots, m_1)$ i x_2^i $(i = 1, \ldots, m_2)$ będą lokalnymi współrzędnymi odpowiednio map c_1 i c_2. Niech $pr_1 \colon U_1 \times U_2 \to U_1$ i $pr_2 \colon U_1 \times U_2 \to U_2$ będą kanonicznymi rzutowaniami. Funkcje $x_1^\kappa \circ pr_1$ i $x_2^i \circ pr_2$ tworzą układ współrzędnych mapy $c_1 \times c_2$. Ten układ współrzędnych oznaczamy (x_1^κ, x_2^i) $(\kappa = 1, \ldots, m_1;\ i = 1, \ldots, m_2)$.

Jeżeli $\eta_1 \colon M_1 \to N_1$ i $\eta_2 \colon M_2 \to N_2$ są odwzorowaniami różniczkowalnymi, to odwzorowanie
$\eta_1 \times \eta_2 \colon M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$ jest różniczkowalne.

5. Rozwłóknienia (Fibracje) różniczkowe.

Definicja 9. *Rozwłóknieniem różniczkowym* nazywamy surjektywne odwzorowanie różniczkowe $\pi \colon E \to M$ takie, że dla każdego punktu $q \in M$ istnieje otoczenie U punktu q w M, rozmaitość K oraz dyfeomorfizm $\psi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times K$ taki, że $pr_U \circ \psi = \pi | \pi^{-1}(U)$, gdzie $pr_U \colon U \times K \to U$ jest kanonicznym rzutowaniem.

Rozmaitość M nazywamy *bazą* rozwłóknienia $\pi \colon E \to M$. Rozmaitość E jest nazywana *przestrzenią (totalną)* rozwłóknienia zwanego też *wiązką włóknistą*. Zbiór $E_q = \pi^{-1}(q)$ jest nazywany *włóknem* π nad punktem $q \in M$. Rozwłóknienie ma *włókno typowe* K jeżeli wszystkie jego włókna są dyfeomorficzne tej samej rozmaitości K. Wymiar rozmaitości K jest nazywany *rzędem* rozwłóknienia.

Dyfeomorfizm $\psi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times K$ taki, że $pr_U \circ \psi = \pi | \pi^{-1}(U)$ jest nazywany *lokalną trywializacją* rozwłóknienia π. Jeżeli $U = M$, to ψ jest *globalną trywializacją* rozwłóknienia π. Rozwłóknienie różniczkowe $\pi \colon E \to M$ nazywamy *trywializowalnym* jeżeli dopuszcza globalną trywializację. Trywializacje nie są jednoznacznie wyznaczone. Jeżeli $\psi \colon E \to M \times K$ jest globalną trywializacją oraz $\eta \colon E \to E$ jest dyfeomorfizmmem takim, że $\pi \circ \eta = \pi$ to $\psi' = \psi \circ \eta$ też jest globalną trywializacją. *Trywialnym* rozwłóknieniem jest rozwłóknienie trywializowalne z wyróżnioną globalną trywializacją. Niech M i K będą rozmaitościami różniczkowymi. Kanoniczny rzut $\pi \colon M \times K \to M$ jest trywialnym rozwłóknieniem gdyż tożsamościowe odwzorowanie $1_{M \times K}$ jest wyróżnioną globalną trywializacją.

Definicja 10. *Morfizmem rozwłóknień* z rozwłóknienia $\pi \colon E \to M$ do rozwłóknienia $\rho \colon F \to N$ nazywamy parę (α, β) odwzorowań różniczkowalnych $\alpha \colon M \to N$ i $\beta \colon E \to F$ takich, że $\rho \circ \beta = \alpha \circ \pi$.

Morfizm rozwłóknień jest reprezentowany diagramem przemiennym

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi"'] & F \arrow[d, "\rho"] \\ M \arrow[r, "\alpha"] & N \end{tikzcd} \tag{18}$$

Niech $\pi \colon E \to M$ i $\rho \colon F \to M$ będą rozwłóknieniami z tą samą bazą M. Odwzorowanie różniczkowalne $\beta \colon E \to F$ takie, że t $\rho \circ \beta = \pi$ nazywać będziemy *M-morfizmem* z $\pi \colon E \to M$ do $\rho \colon F \to M$. M-morfizm jest reprezentowany diegramem przemiennym

$$
\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\beta} & F \\
{\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\
M & \xrightarrow{1_M} & M
\end{array} \tag{19}
$$

Niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą w M i niech $\psi: \pi^{-1}(U) \to U \times K$ będzie lokalną trywializacją rozwłóknienia $\pi: E \to M$ zaś $d = (V, \lambda, k)$ mapą wf K. Mapa

$$
e = (\psi^{-1}(U \times V), (\varphi \times \lambda) \circ (\psi|\psi^{-1}(U \times V)), m + k) \tag{20}
$$

jast nazywana *adaptowaną mapą* w E. Jeżeli x^κ $(\kappa = 1, \ldots, m)$ są lokalnymi współrzędnymi mapy c i y^A $(A = 1, \ldots, k)$ lokalnymi współrzędnymi mapy d, to funkcje

$$
\bar{x}^\kappa = x^\kappa \circ pr_U \circ (\psi|\psi^{-1}(U \times \ V)) \ (\kappa = 1, \ldots, m) \tag{21}
$$

i

$$
\bar{y}^A = y^A \circ pr_V \circ (\psi|\psi^{-1}(U \times \ V)) \ (A = 1, \ldots, k) \tag{22}
$$

są lokalnymi współrzędnymi adaptowanej mapy e, zwanymi *adaptowanymi współrzędnymi*. Te adaptowane współrzędne są zwykle oznaczane x^κ i y^A zamiast $\bar{x}^\kappa$ i $\bar{y}^A$.

DEFINICJA 11. *Różniczkowalnym cięciem* rozwłóknienia $\pi: E \to M$ nazywany różniczkowalne odwzorowanie $\sigma: M \to E$ takie, że $\pi \circ \sigma = 1_M$. Niech V będzie otwartą podrozmaitością M i niech ${i^M}_V: V \to M$ oznacza kanoniczne włożenie. Odwzorowanie różniczkowalne $\sigma: V \to E$ takie, że $\pi \circ \sigma = {i^M}_V$ jest nazywane *lokalnym cięciem* π nad V.

Zwróćmy uwagę na to, że cięcia lokalne zawsze istnieją. Przykładem twierdzenia o istnieniu cięć globalnych jest poniższe twierdzenie będące konsekwencją Twierdzenia 2 Tietze-Urysohna.

TWIERDZENIE 2 TIETZE-URYSHONA. *Jeżeli rozwłóknienie $\pi: E \to M$ ma włókno typowe $\mathbb{R}^k$ to ma cięcie globalne.*

Iloczyn kartezjański $\pi_1 \times \pi_2: E_1 \times E_2 \to M_1 \times M_2$ dwóch rozwłóknień $\pi_1: E_1 \to M_1$ i $\pi_2: E_2 \to M_2$ jest rozwłóknieniem zwanym *rozwłóknieniem produktowym*lub *iloczynem rozwłóknień*.

Niech $\pi_1: E_1 \to M$ oraz $\pi_2: E_2 \to M$ będą rozwłóknieniami z tą samą bazą M i niech $E_1 \times_M E_2$ oznacza zbiór

$$
E_1 \times_M E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2; \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}. \tag{23}
$$

Odwzorowanie

$$
\begin{aligned}
\pi_1 \times_M \pi_2: E_1 \times_M E_2 &\to M \\
: (e_1, e_2) &\mapsto \pi_1(e_1),
\end{aligned} \tag{24}
$$

jest rozwłóknieniem różniczkowalnym zwanym *iloczynem (produktem) włóknistym* rozwłóknień π_1 i π_2.

6. Rozwłóknienia wektorowe.

DEFINICJA 12. *Rozwłóknieniem wektorowym (wiązką wektorową)* jest rozwłóknienie różniczkowalne $\pi: E \to M$ takie, że każde włókno jest przestrzenią wektorową (nad $\mathbb{R}$). Ponadto dla każdego punktu $q_0 \in M$ istieje otoczenie U tego punktu, przestrzeń wektorowa K i lokalna trywializacja $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times K$ taka, że $pr_K \circ (\psi|E_q)$ jest liniowym odwzorowaniem dla każdego $q \in U$.

DEFINICJA 13. Morfizm rozwłóknień (α, β) z wiązki wektorowej $\pi: E \to M$ do wiązki wektorowej $\rho: F \to N$ nazywamy *morfizmem wiązek wektorowych* jeżeli dla każdego punktu $q \in M$, odwzorowanie $\beta|E_q: E_q \to F_{\alpha(q)}$ jest liniowe.

Iloczyn dwóch wiązek wektorowych jest wiązką wektorową. Iloczyn włóknisty wiązek wektorowych jest wiązką wektorową.

Cięcia wiązki wektorowej można dodawać i mnmożyć przez funkcje z $\mathcal{C}(M)$. Jeżeli σ, σ' są cięciami, to dodawanie i mnożenie przez funkcje definiujemy następująco:

$$(\sigma + \sigma')(q) = \sigma(q) + \sigma'(q)$$
dla $f \in \mathcal{C}(M) : (f\sigma)(q) = f(q) \cdot \sigma(q)$.

Działania te definiują w przestrzeni cięć globalnych strukturę przestrzeni wektorowej z mnożeniem przez elementy algebry $\mathcal{C}(M)$. Mówimy, przestrzeń cięć globalnych jest modułem nad algebrą funkcji gładkich na M.

7. Wektory styczne.

Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru m. Dla każdej liczby naturalnej $k \in \mathbb{N}$ konstruujemy rozmaitość różniczkową $\mathsf{T}^k M$ wymiaru $(k+1)m$ zwaną *k-tą wiązką wiązką styczną* rozmaitości M. Przestrzenią wiązki $\mathsf{T}^k M$ jest zbiór klas równoważności krzywych różniczkowalnych w M nazywanych *k-tymi wektorami stycznymi*. Dwie krzywe $\gamma: I \to M$ i $\gamma': I' \to M$ są równoważne, jeżeli

$$\mathrm{D}^l(f \circ \gamma')(0) = \mathrm{D}^l(f \circ \gamma)(0) \tag{25}$$

dla każdej funkcji różniczkowalnej $f: M \to \mathbb{R}$ i dla każdego $k \geqslant l \in \mathbb{N}$. Używamy tu symbolu D^l dla oznaczenia l-tej pochodnej funkcji. Zerowa pochodna funkcji jest samą funkcją. Zbiory I i I' są otwartymi otoczeniami zera w $0 \in \mathbb{R}$. Klasa równoważności krzywej $\gamma: I \to M$ jest oznaczana $\mathsf{t}^k\gamma(0)$. Zbiór $\mathsf{T}^0 M$ można utożsamić z samą rozmaitością M.

Dla każdego k definiujemy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau_k(M)\colon \mathsf{T}^k M &\to M \\ : \mathsf{t}^k\gamma(0) &\mapsto \gamma(0). \end{aligned} \tag{26}$$

Dla każdej pary liczb naturalnych k i k' takich, że $k' \leq k$ mamy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \tau^{k'}{}_k(M)\colon \mathsf{T}^k M &\to \mathsf{T}^{k'} M \\ : \mathsf{t}^k\gamma(0) &\mapsto \mathsf{t}^{k'}\gamma(0). \end{aligned} \tag{27}$$

Odwzorowania $\tau_k(M)\colon \mathsf{T}^k M \to M$ i $\tau^{k'}{}_k(M)\colon \mathsf{T}^k M \to \mathsf{T}^{k'} M$ spełniają relacje

$$\tau_k(M) = \tau_{k'}(M) \circ \tau^{k'}{}_k(M) \tag{28}$$

i

$$\tau^{k''}{}_k(M) = \tau^{k''}{}_{k'}(M) \circ \tau^{k'}{}_k(M) \tag{29}$$

dla $k'' \leqslant k' \leqslant k$.

Dla każdej krzywej $\gamma: I \to M$ definiujemy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathsf{t}^k\gamma\colon I &\to \mathsf{T}^k M \\ : s &\mapsto \mathsf{t}^k(\gamma(s+\cdot))(0) \end{aligned} \tag{30}$$

nazywane *k-tym stycznym przedłużeniem (prolongacją)* krzywej γ.

Niech M i N będą rozmaitościami różniczkowymi i niech $\varphi: M \to N$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. *k-tym stycznym odwzorowaniem* do φ nazywamy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathsf{T}^k\varphi\colon \mathsf{T}^k M &\to \mathsf{T}^k N \\ : \mathsf{t}^k\gamma(0) &\mapsto \mathsf{t}^k(\varphi \circ \gamma)(0). \end{aligned} \tag{31}$$

Jeżeli M, N i Q są rozmaitościami i $\varphi\colon M \to N$ and $\psi\colon N \to O$ są odwzorowaniami różniczkowalnymi, to

$$\mathsf{T}^k(\psi \circ \varphi) = \mathsf{T}^k\psi \circ \mathsf{T}^k\varphi. \tag{32}$$

Diagramy

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T}^k M & \xrightarrow{\mathsf{T}^k\varphi} & \mathsf{T}^k N \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_k(M)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_k(N)} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array} \tag{33}$$

i

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T}^k M & \xrightarrow{\mathsf{T}^k\varphi} & \mathsf{T}^k N \\ \downarrow{\scriptstyle \tau^{k'}{}_k(M)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau^{k'}{}_k(N)} \\ \mathsf{T}^{k'} M & \xrightarrow{\mathsf{T}^{k'}\varphi} & \mathsf{T}^{k'} N \end{array} \tag{34}$$

są przemienne.

Niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą w M. Oczywistym jest, że

$$\mathsf{T}^k U = \mathsf{T}^k_U M = \bigcup_{q \in U} \mathsf{T}^k_q M \tag{35}$$

i że

$$\mathsf{T}^k\varphi\colon \mathsf{T}^k_U M \to \mathsf{T}^k_{\varphi(U)}\mathbb{R}^m \tag{36}$$

jest bijekcją.

Stwierdzenie 3. *Dla każdego $x \in \varphi(U)$ istnieje kanoniczna bijekcja przestrzeni stycznej $\mathsf{T}^k_x O$ i przestrzeni $\mathbb{R}^{km}$.*

Dowód: Ustalmy $q \in \varphi(U)$. Dla każdego elementu $v = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{R}^{km} = (\mathbb{R}^m)^k$ zdefiniujemy krzywą γ_v wzorem (w otoczeniu p)

$$\gamma_v(t) = x + tv_1 + \frac{1}{2}t^2 v_2 + \cdots + \frac{1}{k!}t^k v_k.$$

Jeżeli funkcja $f^i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest i-tą współrzędną, to jak łatwo zauważyć

$$\mathrm{D}^l(f^i \circ \gamma_v)(0) = v^i_l,$$

gdzie v^i_l jest współrzędną wektora v_l w bazie kanonicznej. Wynika stąd, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^{km} \ni v \mapsto \mathsf{t}^k\gamma_v \in \mathsf{T}_x\varphi(U) \tag{37}$$

jest injekcją.

Wystarczy teraz wykazać surjektywność odwzorowania (37). Niech γ będzie krzywą w $\varphi(U)$ i niech $\gamma(0) = x$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że krzywa γ jest równoważna krzywej

$$t \mapsto x + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(0) + \frac{1}{2}t^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\gamma(0) + \cdots + \frac{1}{k!}t^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\gamma(0).$$

Krzywa ta jest postaci γ_v, gdzie $v = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(0), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(0), \ldots, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(0))$.

■

Mamy więc utożsamienie $\mathsf{T}^k\varphi(U)$ z $\varphi(U) \times \mathbb{R}^{km}$. Trójka $\mathsf{T}^k c = (\mathsf{T}^k_U, \mathsf{T}^k\varphi, m(k+1))$ jest mapą na $\mathsf{T}^k M$. Mapy tej postaci są zgodne i wprowadzają na $\mathsf{T}^k M$ strukturę rozmaitości. Odwzorowania $\tau_k(M)$ i ${\tau^{k'}}_k(M)$ są rozwłóknieniami różniczkowalnymi, a odwzorowania $\mathsf{T}^k\varphi\colon \mathsf{T}^k M \to \mathsf{T}^k N$ morfizmami rozwłóknień.

Niech $x^\kappa\colon U \to \mathbb{R}$ będą lokalnymi współrzędnymi na rozmaitości M. *Adaptowane współrzędne* $({x^{\kappa_0}}_0, {x^{\kappa_1}}_1, \ldots, {x^{\kappa_k}}_k)$ w $\mathsf{T}^k M$ są definiowane jako funkcje

$$\begin{aligned} {x^\kappa}_l\colon & \tau_k(M)^{-1}(U) \to \mathbb{R} \\ \colon & \mathsf{t}^k\gamma(0) \mapsto \mathrm{D}^l(x^\kappa \circ \gamma)(0) \end{aligned} \tag{38}$$

dla $l = 0, 1, \ldots, k$.

Ponieważ $\mathsf{T}^k M$ jest rozmaitością, możemy rozważać wektory styczne do niej.

Dla każdej pary k i k' mamy injektywne odwzorowanie

$$\begin{aligned} \lambda^{k',k}(M)\colon & \mathsf{T}^{k'+k} M \to \mathsf{T}^{k'}\mathsf{T}^k M \\ \colon & \mathsf{t}^{k+k'}\gamma(0) \mapsto \mathsf{t}^{k'}\mathsf{t}^k\gamma(0) \end{aligned} \tag{39}$$

i przemienny diagram

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}^{k'+k} M \arrow[r, "\mathsf{T}^{k'+k}\varphi"] \arrow[d, "\lambda^{k',k}(M)"] & \mathsf{T}^{k'+k} N \arrow[d, "\lambda^{k',k}(N)"] \\ \mathsf{T}^{k'}\mathsf{T}^k M \arrow[r, "\mathsf{T}^{k'}\mathsf{T}^k\varphi"] & \mathsf{T}^{k'}\mathsf{T}^k N \end{tikzcd} \tag{40}$$

dla odwzorowania $\varphi\colon M \to N$.

7.1. Równania różniczkowe.

DEFINICJA 14. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu k* na rozmaitości M nazywamy podzbiór D k-tej wiązki stycznej $\mathsf{T}^k M$. Krzywą $\gamma: I \to M$ nazwiemy *rozwiązaniem* równania $D \subset \mathsf{T}^k M$ jeśli $\mathsf{t}^k\gamma(s) \in D$ dla każdego $s \in I$. Równanie różniczkowe nazywamy *jawnym* jeżeli jest obrazem cięcia $X: U \to \mathsf{T}^k M$ rozwłóknienia $\tau^{k-1}{}_k(M): \mathsf{T}^k M \to \mathsf{T}^{k-1} M$ zdefiniowanego na otwartej podrozmaitości $U \subset \mathsf{T}^{k-1} M$.

Na ogół zakłada się, że równanie różniczkowe jest podrozmaitością $D \subset \mathsf{T}^k M$.

DEFINICJA 15. Równanie rózniczkowe $D \subset \mathsf{T}^k M$ nazywamy *całkowalnym w $v \in D$*, jeżeli jeżeli istnieje jego rozwiązanie $\gamma: I \to M$ takie, że $\mathsf{t}^k\gamma(0) = v$. Równanie różniczkowe D nazywamy *całkowalnym na podzbiorze $S \subset D$* jeżeli jest całkowalne w każdym punkcie $v \in S$. Równanie rózniczkowe D nazywamy *całkowalnym* jeżeli jest całkowalne w każdym $v \in D$.

Obraz $D \subset \mathsf{T}^1 M = \mathsf{T}M$ lokalnego pola wektorowego $X: U \to \mathsf{T}M$ jest przykładem całkowalnego równania różniczkowego pierwszego rzędu.

STWIERDZENIE 3. *Jawne równanie różniczkowe $D \subset \mathsf{T}M$ jest całkowalne.*

DOWÓD: Proszę zajrzeć do skryptu Analiza II. ■

Podobnie

STWIERDZENIE 4. *Jawne równanie różniczkowe $D \subset \mathsf{T}^k M$ jest całkowalne.*

DOWÓD: Jak wyżej. ■

STWIERDZENIE 5. *Każde rozwiązanie równania $D \subset \mathsf{T}^k M$ jest też rozwiązaniem równania $D' = \tau^{k'}{}_k(D)$ dla każdego $k' \leq k$.*

DOWÓD: Niech $\gamma: I \to M$ będzie rozwiązaniem równania D. Relacja $\mathsf{t}^k\gamma(s) \in D$ implikuje relację $\mathsf{t}^{k'}\gamma(s) \in D'$ gdyż $\mathsf{t}^{k'}\gamma(s) = \tau^{k'}{}_k(M)(\mathsf{t}^k\gamma(s))$. Zatem krzywa $\gamma: I \to M$ jest rozwiązaniem równania D'. ■

Wynika stąd

STWIERDZENIE 6. *Jeżeli równanie różniczkowe $D \subset \mathsf{T}^k M$ jest całkowalne, to równanie $D' = \tau^{k'}{}_k(D)$ jest też całkowalne dla każdego k'. Każde rozwiązanie D jest też rozwiązaniem D'.*

DOWÓD: Niech $v' \in D'$, to istnieje k-wektor v taki, że $v' = \tau^{k'}{}_k(v)$. Jeżeli D jest całkowalne, to istnieje rozwiązanie $\gamma: I \to M$ równania D takie, że $\mathsf{t}^k\gamma(0) = v$. Krzywa $\gamma: I \to M$ też jest rozwiązaniem D' i $\mathsf{t}^{k'}\gamma(0) = v'$. Zatem równanie D' jest całkowalne. ■

Poniżej podamy dość oczywiste, ale ważne warunki konieczne całkowalności równań. Zdefiniujmy najpierw *formalną prolongację* równania $S \subset \mathsf{T}^{k'} M$ do równania $\mathsf{T}^{k,k'} S \subset \mathsf{T}^{k+k'} M$ jako zbiór

$$\mathsf{T}^{k,k'} S = (\lambda^{k,k'}(M))^{-1}(\mathsf{T}^k S). \tag{41}$$

STWIERDZENIE 7. *Jeżeli równanie różniczkowe $D \subset \mathsf{T}^k M$ is całkowalne, to*

$$D \subset \mathsf{T}^{k-k',k}(\tau^{k'}{}_k(M)(D)) \tag{42}$$

dla każdego $k' \leq k$.

DOWÓD: Niech krzywa γ będzie rozwiązaniem równania D. Jest ona również rozwiązaniem równania $\tau^{k'}{}_k(D)$, czyli

$$\mathsf{t}^{k'}\gamma \subset \tau^{k'}{}_k(D)$$

i

$$\lambda^{k-k',k}(M)(\mathsf{t}^k\gamma) = \mathsf{t}^{k-k'}\mathsf{t}^{k'}\gamma \subset \mathsf{T}^{k-k'}(\tau^{k'}{}_k D).$$

■

STWIERDZENIE 8. *Jeżeli równanie różniczkowe $D \subset \mathsf{T}^k M$ jest całkowalne, to*

$$D \subset {\tau^k}_{k+k'}(\mathsf{T}^{k',k} D) \tag{43}$$

dla każdego k'.

DOWÓD: Niech krzywa γ będzie rozwiązaniem równania D. Jest ona również rozwiązaniem równania $\mathsf{T}^{k',k}(D)$. ■

8. Struktura wektorowa wiązki stycznej.

Zajmijmy się bliżej strukturą rozmaitości wektorów stycznych $\mathsf{T}M$. Kanoniczne rzutowanie oznaczać będziemy τ_M zamiast $\tau_1(M)$. W przestrzeni reprezentantów wektorów stycznych nie mamy struktury algebraicznej dodawania czy mnożenia przez liczbę. Zgodnie z (25) wektor styczny $\mathsf{t}\gamma(0)$ jest charakteryzowany odwzorowaniem

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(M) &\colon \to \mathbb{R} \\ &: f \mapsto D^1(f \circ \gamma)(0) \end{aligned} \tag{44}$$

można więc go traktować jako element przestrzeni wektorowej wszystkich funkcji rzeczywistych na $\mathcal{C}(M)$. Wektorowi zerowemu w tej przestrzeni odpowiadają wektory styczne reprezentowane krzywymi stałymi. Punkt zaczepienia wektora nie jest tu rozpoznawany. Jeżeli jednak mamy dwa różne od zera wektory zaczepione w różnych punktach, to określają one różne odwzorowania na funkcjach.

STWIERDZENIE 9. *Jeżeli v, w są róznymi od zera wektorami takimi, że $\tau_M(v) \neq \tau_M(w)$, to istnieje funkcja $f \in \mathcal{C}(M)$ taka, że $v(f) \neq w(f)$.*

DOWÓD: Ponieważ M jest przestrzenią Hausdorffa istnieją rozłączne otoczenia otwarte O_v, O_w punktów $\tau_M(v)$ i $\tau_M(w)$. Niech g będzie funkcją taką, że $v(g) \neq 0$ i niech funkcja h separuje $\tau_M(v)$ w O_v. Stąd $f = hg$ jest funkcją równą g w pewnym otoczeniu punktu $\tau_M(v)$ i równą zeru w otoczeniu O_w. Stąd $v(f) = v(g) \neq 0$ oraz $w(f) = 0$. ■

Dla trzech wektorów stycznych $u, v, w \in \mathsf{T}M$ równość

$$u = v + w,$$

w przestrzeni funkcji na $\mathcal{C}(M)$ oznacza, że każdej funkcji f

$$u(f) = v(f) + w(f).$$

Podobnie równość

$$u = av, \quad a \in \mathbb{R}$$

oznacza, że dla każdej funkcji f

$$u(f) = a(v(f)).$$

STWIERDZENIE 10. *Jeżeli trzy wektory u, v, w są różne od zera i są w relacji*

$$u = v + w,$$

to $\tau_M(u) = \tau_M(v) = \tau_M(w)$.

DOWÓD: Załóżmy, że $\tau_M(u) \neq \tau_M(v)$ i $\tau_M(u) \neq \tau_M(w)$. Niech O będzie otoczeniem punktu $\tau_M(u)$, nie zawierające v i w. Niech funkcja h separuje u w O. Mamy dla każdej funkcji f

$$u(f) = u(hf) = v(hf) + w(hf) = 0 \tag{45}$$

co jest sprzeczne z założeniem, że u jest różne od zera. Niech więc $\tau_M(u) = \tau_M(v)$ i $\tau_M(u) \neq \tau_M(w)$. Jak poprzednio bierzemy funkcję h separującą $\tau_M(w)$ w otoczeniu U rozłącznym z $\tau_M(u) = \tau_M(v)$. Teraz mamy dla każdej funkcji f

$$0 = u(hf) = v(hf) + w(hf) = w(hf) = w(f), \tag{46}$$

co jest sprzeczne z założeniem, że w jest różne od zera. ■

Wynika stąd, że wszystkie wektory styczne nie tworzą przestrzeni wektorowej, szanse taką mają wektory zaczepione w jednym punkcie.

Odwzorowanie styczne $\mathsf{T}\Phi\colon \mathsf{T}M \to \mathsf{T}N$ do odwzorowania różniczkowalnego $\Phi\colon M \to N$ zachowuje wprowadzone powyżej relacje algebraiczne między wektorami. Wynika to z faktu, że dla $v \in \mathsf{T}M$ i $f \in \mathcal{C}(N)$

$$\mathsf{T}\Phi(v)(f) = v(f \circ F).$$

Łatwo sprawdzić, że jeżeli $v = \mathsf{t}\gamma(0)$, to krzywa $t \mapsto \gamma(at)$ reprezentuje wektor av.

Niech teraz $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą na M. Wiemy, że $\mathsf{T}\varphi\colon \mathsf{T}_U M \to \mathsf{T}\varphi(U) = U \times \mathbb{R}^m$ jest dyfeomorfizmem rozwłóknień zachowującym relacje algebraiczne między wektorami. Niech $v, w \in \mathsf{T}_x\varphi(U)$ będą wektorami reprezentowanymi elementami $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^m$. Ich sumie w $\mathbb{R}^m$ odpowiada wektor u reprezentowany krzywą $t \mapsto x + t(\overline{v} + \overline{w})$. Oczywiste, że $u = v + w$, zatem struktura przestrzeni wektorowej w $\mathbb{R}^m$ jest zgodna ze strukturą algebraiczną $\mathsf{T}_x\varphi(U)$. Ta ostatnia jest więc przestrzenią wektorową, a stąd również $\mathsf{T}_pM, \varphi(p) = x$. Łatwo sprawdzić, że $\tau_M\colon \mathsf{T}M \to M$ jest wiązką wektorową.

Przy ustalonej mapie $c = (U, \varphi, m)$ z układem współrzednych (x^κ) bazie kanonicznej w $\mathbb{R}^m$ odpowiada baza w każdej przestrzeni stycznej T_qM. Wektory tej bazy oznaczać będziemy $\dfrac{\partial}{\partial x^\kappa}$ lub ∂_κ.

Adaptowane współrzędne wprowadzone wzorami (38) w $\mathsf{T}M$ oznaczać będziemy $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda)$. Łatwo zauważyć, że dla $v \in \mathsf{T}_U M$ mamy

$$v = \dot{x}^\kappa(v)\frac{\partial}{\partial x^\kappa}. \tag{47}$$

Działanie dodawania w wiązce stycznej scharakteryzowane jest w lokalnym układzie współrzędnych wzorami

$$\begin{aligned} x^k(v + w) &= x_k(v) = x^k(w) \\ \dot{x}^\lambda(v + w) &= \dot{x}^\lambda(v) + \dot{x}^\lambda(w). \end{aligned} \tag{48}$$

UWAGA. Rozważania powyższe dotyczyły wektorów stycznych pierwszego rzędu. Przestrzenie wektorów stycznych wyższych rzędów <u>nie</u> posiadają struktury przestrzeni wektorowej.

9. Wektory styczne jako różniczkowania.

9.1. O różniczkowaniach. Rozpatrzmy dwie przestrzenie wektorowe $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ z mnożeniem (niekoniecznie przemiennym i niekoniecznie łącznym, zakładamy tylko rozdzielność mnożenia względem dodawania). Niech będzie dany homomorfizm

$$\alpha\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}.$$

Mówimy, że odwzorowanie liniowe

$$\mathrm{d}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

jest *różniczkowaniem względem* α jeżeli dla dowolnych $a, b \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{d}(ab) = \alpha(a)\mathrm{d}(b) + \mathrm{d}(a)\alpha(b) \tag{49}$$

Gdy $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ i $\alpha = id$ to mówimy o różniczkowaniu w $\mathcal{A}$.

Przykład 2. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą łączną. Zdefiniujmy komutator

$$[a, b] = ab - ba. \tag{50}$$

Dla każdego $a \in \mathcal{A}$ odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_a \colon & \mathcal{A} \to \mathcal{A} \\ \colon & b \mapsto [a, b] \end{aligned} \tag{51}$$

jest różniczkowaniem. Istotnie, mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_a(bc) &= a(bc) - (bc)a = (ab)c - (ba)c + b(ac) - b(ca) \\ &= [a, b]c + b[a, c] \\ &= \mathrm{d}_a(b)c + b\mathrm{d}_a(c) \end{aligned} \tag{52}$$

Rozpatrzmy teraz dwa różniczkowania $\mathrm{d}, \mathrm{d}' \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ względem homomorfizmu $\alpha \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Mamy

$$\begin{aligned} (\mathrm{d} + \mathrm{d}')(ab) &= \mathrm{d}(ab) + \mathrm{d}'(ab) \\ &= \alpha(a)\mathrm{d}(b) + \mathrm{d}(a)\alpha(b) + \alpha(a)\mathrm{d}'(b) + \mathrm{d}'(a)\alpha(b) \\ &= (\mathrm{d} + \mathrm{d}')(a)\alpha(b) + \alpha(a)(\mathrm{d} + \mathrm{d}')(b). \end{aligned} \tag{53}$$

i podobnie dla mnożenia przez liczbę, jeśli $r(ab) = (ra)b,\ r \in \mathbb{R}$.

Więc $\mathrm{d} + \mathrm{d}'$ jest różniczkowaniem. Przy ustalonym homomorfizmie różniczkowania tworzą przestrzeń wektorową.

9.2. Wektory styczne. Niech $v \in \mathsf{T}_q M$. Odwzorowanie

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_v \colon & \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R} \\ \colon & f \mapsto v(f) \end{aligned} \tag{54}$$

jest różniczkowaniem względem homomorfizmu

$$\begin{aligned} \delta_q \colon & \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R} \\ \colon & f \mapsto f(q). \end{aligned} \tag{55}$$

Oznaczmy przez D_q przestrzeń wektorową wszystkich różniczkowań względem δ_q. Pokażemy, że jest ona izomorficzna przestrzeni stycznej $\mathsf{T}_q M$. Oczywistym jest, że odwzorowanie

$$\mathsf{T}_q M \ni v \mapsto \mathrm{d}_v \tag{56}$$

jest liniową injekcją. Wystarczy teraz pokazać, że wymiar przestrzeni D_q jest równy wymiarowi M.

Definicja 16. Odwzorowanie liniowe $b \colon C^\infty(\mathbb{R}, M) \to \mathbb{R}$ nazywamy *zlokalizowanym* w $q \in M$ jeżeli $b(hf) = b(f)$ dla każdej funkcji f na M i każdej funkcji h separującej q w jakimś otoczeniu q. Równoważnie, odwzorowanie liniowe $b \colon C^\infty(\mathbb{R}, M) \to \mathbb{R}$ nazywamy *zlokalizowanym* w $q \in M$ jeżeli $b(f) = 0$ dla każdej funkcji f na M znikającej w otoczeniu q.

Stwierdzenie 11. *Różniczkowanie względen δ_q jest zlokalizowane w q.*

Dowód: Niech U będzie otoczeniem q i niech $f \in \mathcal{C}(M)$, przy czym $f|U = 0$. Jeżeli h jest funkcją separującą q in U, to $hf = 0$. Zatem

$$b(f) = b(h)f(q) + h(q)b(f) = b(hf) = 0. \tag{57}$$

■

STWIERDZENIE 12. *Niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą na M i niech $q \in U$. Jeżeli b jest różniczkowaniem z D_q, to*

$$b = b(x^\kappa)\partial_\kappa(q). \tag{58}$$

DOWÓD: Niech f będzie funkcją na M. Stosując b do obu stron wzoru Taylora

$$\begin{aligned} f|U = f(q) + \partial_\kappa f(q)(x^\kappa - x^\kappa(q)) \\ + r_{\kappa_1\kappa_2}(x^{\kappa_1} - x^{\kappa_1}(q))(x^{\kappa_2} - x^{\kappa_2}(q)) \end{aligned} \tag{59}$$

dostajemy

$$b(f) = \partial_\kappa f(q) b(x^\kappa). \tag{60}$$

Stąd, $b = \partial_\kappa(q) b(x^\kappa)$. ■

9.3. Wektor styczny jako homomorfizm. Interpretacja wektora stycznego jako różniczkowania nie ma dobrej analogii dla wyższych wektorów stycznych. Można jednak zmodyfikować tą interpretację, by miała swój odpowiednik dla wektorów stycznych wyższych rzędów (i nie tylko).

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ wprowadźmy strukturę algebry definiując mnożenie wzorem

$$(r, a)(s, b) \mapsto (rs, rb + sa) \tag{61}$$

Niech teraz $v \in \mathsf{T}_q M$ i zdefiniujmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} h_v \colon \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}^2 \\ \colon f \mapsto (f(q), v(f)) \end{aligned} \tag{62}$$

Odwzorowanie to jest homomorfizmem algebr z jednością ($h_v(1) = (1, 0)$).

Niech teraz $h \colon \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}^2$ będzie homomorfizmem algebr z jednością. Zapiszmy $h = (h_0, h_1)$. Z definicji struktury algebry w $\mathbb{R}^2$ mamy, że h_0 jest homomorfizmem algebr $h_0 \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, zaś h_1 jest różniczkowaniem względem h_0.

STWIERDZENIE 13. *Dla każdego ciągłego (względem zbieżności niemal jednostajnej) homomorfizmu algebr z jednością $h_0 \colon \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}$ istnieje $q \in M$ takie, że $h_0 = \delta_q$.*

DOWÓD: Niech $I_0 = \{f \colon h_0(f) = 0\}$. Załóżmy, że dla każdego $q \in M$ istnieje funkcja $f_q \in I_0$ taka, że $f_q(q) \neq 0$. Możemy przyjąć, że $f_q(q) > 0$. Ale z ciągłości f_q mamy $f_q > 0$ w pewnym otoczeniu O_q punktu q. Biorąc rozkład jedności (φ_ι) wpisany w pokrycie $(O_q)_{q \in M}$ tak, że $\operatorname{supp} \varphi_\iota \subset O_{q(\iota)}$ możemy zdefiniować funkcję

$$f = \sum_\iota f_{q(\iota)} \varphi_\iota.$$

Funkcja ta jest dodatnia, a ponieważ szereg jest zbieżny niemal jednostajnie, więc $f \in I_0$. Z drugiej jednak strony

$$1 = h_0(1) = h_0(f \frac{1}{f}) = h_0(f) h_0(\frac{1}{f}),$$

więc $h_0(f) \neq 0$. Musi zatem istnieć q_0 takie, że $f \in I_0$ implikuje $f(q_0) = 0$. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(M)$ mamy

$$h_0(f - h_0(f)1) = h_0(f) - h_0(f)h_0(1) = 0, \tag{63}$$

więc $f(q) = h_0(f)$. ■

Z tego stwierdzenia wynika, że wektory styczne są w jednoznacznej odpowiedniości z homomorfizmami algebry funkcji gładkich w algebrę $\mathbb{R}^2$. Podobnie, k-te wektory styczne są w jednoznacznej odpowiedniości z homomorfizmami $\mathcal{C}(M)$ w $\mathbb{R}^{k+1}$. W $\mathbb{R}^{k+1}$ struktura algebry wprowadzona jest wzorem

$$(a_0, a_1, \ldots, a_k)(b_0, b_1, \ldots, b_k) = (a_0 b_0, \ldots, \sum_{l=0}^{i} a_l b_{i-l}, \cdots, \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}). \tag{64}$$

9.4. Pola wektorowe. Niech X będzie polem wektorowym na M, tzn. cięciem wiązki stycznej. Pole wektorowe wyznacza odwzorowanie liniowe

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_X\colon & \mathcal{C}(M) \to \mathcal{C}(M) \\ \colon & f \mapsto \mathrm{d}_X f \end{aligned} \tag{65}$$

gdzie $\mathrm{d}_X(f)(q) = X(q)(f)$. Dla tego odwzorowania

$$\mathrm{d}_X(fg)(q) = X(q)(fg) = f(q)X(q)(g) + g(q)X(q)(f), \tag{66}$$

czyli jest ono różniczkowaniem w algebrze $\mathcal{C}$. Na odwrót, ze Stwierdzenia 12 wynika, że różniczkowanie w $\mathcal{C}(M)$ jest zadane polem wektorowym.

10. Immersje, submersje, itd.

Twierdzenia o funkcji uwikłanej i o stałym rzędzie mają swoją oczywistą wersję dla rozmaitości.

Twierdzenie 6 (o funkcji uwikłanej). *Niech odwzorowanie*

$$G\colon M \to N$$

będzie gładkie i niech p_0 będzie ustalonym punktem w N. Załóżmy, że dla każdego $q \in M$, $G(p) = 0$ odwzorowanie styczne $\mathsf{T}_p G\colon \mathsf{T}_p M \to \mathsf{T}_{G(p)} N$ jest surjekcją.
Wówczas zbiór $S = G^{-1}(p_0) \subset M$ jest podrozmaitością wymiaru $m - n$.

Twierdzenie 7 (o stałym rzędzie). *Załóżmy, że odwzorowanie $F\colon M \supset\!\!\to N$ jest gładkie, a rząd odwzorowania stycznego jest stały. Wówczas dla każdego $q \in M$ istnieje otoczenie U takie, że $F(U)$ jest podrozmaitością w N.*

Zwróćmy uwagę na istotną różnicę w znaczeniu tych twierdzeń. Twierdzenie 6 mówi, że <u>cały</u> zbiór $S = G^{-1}(p_0)$ jest powierzchnią, natomiast Twierdzenie 7 mówi tylko, że $F(U)$ jest powierzchnią. Mówimy, że $F(U)$ zadaje *lokalnie* powierzchnię.

Z powodu tych twierdzeń wyróżnia się dwie klasy odwzorowań.

Definicja 17. Odwzorowanie $\varphi\colon M \to N$ nazywamy *submersją* jeżeli dla każdego $q \in M$ odwzorowanie styczne $\mathsf{T}_q\varphi$ jest surjekcja. Odwzorowanie φ nazywamy *włożeniem (immersją)* jeżeli dla każdego $q \in M$ odwzorowanie $\mathsf{T}_q\varphi$ jest injekcją oraz *subimmersją* jeżeli rząd odwzorowania stycznego jest stały. Mówimy, że immersja jest *zanurzeniem (embedding)* jeżeli jest indukowane odwzorowanie $\varphi\colon M \to \varphi(M) \subset N$ jest homeomorfizmem.

Przykładem surjektywnej submersji jest rzutowanie na bazę w rozwłóknieniu. Włókna rozwłóknienia są podrozmaitościami.

Definicja 18. *Obraz immersji $\varphi(M) \subset N$ nazywamy podrozmaitścią włożoną (przy pomocy φ). Obraz zanurzenia $\varphi(M) \subset N$ nazywamy podrozmaitością zanurzoną.*

Dość oczywistym jest, że podrozmaitość zanurzona jest zwykłą podrozmaitością. Natomiast podrozmaitość włożona na ogół podrozmaitością nie jest. Dopuszcze na przykład samoprzecięcia, co ilustruje poniższy przykład:

Przykład 3. Odwzorowanie

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (\cos(t), \sin(2t))$$

ma stały rząd 1, jest więc immersją (włożeniem). Obraz φ nie jest podrozmaitością w otoczeniu $(0, 0)$.

Łatwo wskazać przykład injektywnego włożenia nie będącego zanurzeniem.

Używając odwzorowania stycznego łatwo też rozpoznać również czystość i transwersalność przecięć dwóch podrozmaitości (Definicje 7 i 8).

TWIERDZENIE 8. *Podrozmaitości $S, S' \subset M$ mają czyste przecięcie w $q_0 \in S \cap S'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S \cap S'$ jest podrozmaitością w otoczeniu q_0 i*

$$\mathsf{T}_{q_0}(S \cap S') = \mathsf{T}_{q_0} S \cap \mathsf{T}_{q_0} S'. \tag{67}$$

DOWÓD: Niech $k = \dim S$, $k' = \dim S'$ i $l = \dim S \cap S'$. Niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą w otoczeniu q_0 taką, że $\varphi(q_0) = 0$ oraz

$$\begin{aligned} S \cap U &= \{q \in U : x^\lambda(q) = 0 \text{ dla } \lambda = k+1, \dots, m\}, \\ (S \cap S') \cap U &= \{q \in U : x^\lambda(q) = 0 \text{ dla } \lambda = 1, \dots, k-l, k+1, \dots, m\} \end{aligned} \tag{68}$$

lub równoważnie, $(\partial_1, \dots, \partial_k)$ tworzą bazę w $\mathsf{T}_q S$ oraz $(\partial_{k-l+1}, \dots, \partial_k)$ w $\mathsf{T}_q(S \cap S')$ jeśli $q \in U$. Istnienie takiej mapy wynika z definicji podrozmaitości. Z warunku (67) możemy przyjąć, że $(\partial_{k-l+1}, \dots, \partial_{k-l+k'})$ tworzą bazę $\mathsf{T}_{x_0} S'$. Weźmy teraz odwzorowanie

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^m \sup \varphi(U) &\to \mathbb{R}^{m-k+l} \\ &: (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^{k-l+1}, \dots, x^m). \end{aligned} \tag{69}$$

Odwzorowanie $P \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^{m-k+l}$ jest gładkie, więc jego obcięcie $(P \circ \varphi|_{S'})$ do $S' \cap U$ też jest gładkie. Odwzorowanie styczne do tego obcięcia w punkcie q_0 ma obraz rozpięty przez pierwsze k' wektorów bazy kanonicznej w $\mathsf{T}_0 \mathbb{R}_{m-k+l}$, więc ma wymiar maksymalny (równy wymiarowi S'). Maksymalny rząd muszą więc mieć pochodne w sąsiednich punktach S', czyli odwzorowanie $(P \circ \varphi)|_{S'}$ ma stały rząd. Z twierdzenia o stałym rzędzie obraz $P \circ \varphi(S' \cap U)$ jest w otoczeniu zera podrozmaitością. Możemy więc wprowadzić nowy układ współrzędnych (y^i) w $\mathbb{R}^{m-k+l}$ i w konsekwencji, na M taki, że $y^i = x^i$, $i = 1, \dots, k$ i

$$\begin{aligned} S \cap U &= \{q \in U : x^\lambda(q) = 0 \text{ dla } \lambda = k+1, \dots, m\}, \\ S' \cap U &= \{q \in U : x^\lambda(q) = 0 \text{ dla } \lambda = 1, \dots, k-l, k-l+k'+1, \dots, m\}. \end{aligned} \tag{70}$$

■

TWIERDZENIE 9. *Podrozmaitości $S, S' \subset M$ mają transwersalne przecięcie w $q_0 \in S \cap S'$ wtedy i tylko wtedy,*

$$\mathsf{T}_{q_0}(M) = \mathsf{T}_{q_0} S + \mathsf{T}_{q_0} S'.$$

DOWÓD: Wystarczy pokazać, że $S \cap S'$ jest podrozmaitością wymiaru $\dim(\mathsf{T}_{q_0} S \cap \mathsf{T}_{q_0} S')$ i skorzystać z poprzedniego twierdzenia. Niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą w otoczeniu q_0 na M taką, że

$$S \cap U = \{q \in U : x^\lambda(q) = 0 \text{ dla } \lambda = k+1, \dots, m\} \tag{71}$$

Odwzorowanie

$$\begin{aligned} G : S' \cap U &\to \mathbb{R}^{m-k} \\ &: q \mapsto (x^{k+1}(q), \dots, x^m(q)) \end{aligned} \tag{72}$$

jest gładkie i w q_0 jego pochodna jest surjekcją na mocy (71). Z Twierdzenia o Funkcji Uwikłanej, $(S \cap S') \cap U = G^{-1}(0)$ jest w otoczeniu q_0 podrozmaitością S', więc też podrozmaitością M. Jej wymiar jest równy

$$\dim S' - (\dim M - \dim S) = \dim S' + \dim S - \dim M = \dim(\mathsf{T}_{q_0} S \cap \mathsf{T}_{q_0} S).$$

■

11. Wektory kostyczne (kowektory styczne).

Wprowadźmy relację równoważności w zbiorze par $M \times C^\infty(\mathbb{R}, M)$. Dwie pary (q, f) i (q', f') nazwiemy równoważnymi jeżeli $q' = q$ and

$$\mathrm{D}(f' \circ \gamma)(0) = \mathrm{D}(f \circ \gamma)(0) \tag{73}$$

dla każdej różniczkowalnej krzywej $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ takiej, że $\gamma(0) = q$. Klasę równoważności pary (q, f) oznaczać będziemy $\mathrm{d}f(q)$ lub $\mathrm{d}_q f$ i nazywać *różniczką f w punkcie q*.

Definicja 19. Zbiór klas równoważności par (x, f) oznaczamy T^*M i nazywamy *wiązką kostyczną* rozmaitości M. Odwzorowanie $\pi_M\colon \mathsf{T}^*M \to M$ zdefiniowane przez

$$\pi_M(\mathrm{d}f(q)) = q \tag{74}$$

jest nazywane *rozwłóknieniem kostycznym.*

Każde włókno $\mathsf{T}^*_q M = (\pi_M)^{-1}(q)$ jest przestrzenią wektorową z dodawaniem i mnożeniem przez liczby zdefiniowanymi przez

$$\mathrm{d}f(q) + \mathrm{d}f'(q) = \mathrm{q}(f + f')(q) \tag{75}$$

oraz

$$a\mathrm{d}f(q) = \mathrm{d}(af)(q). \tag{76}$$

Niech $c = (U, \varphi, m)$ będzie mapą na M i niech x^κ $(\kappa = 1, \ldots, m)$ będzie lokalnym układem współrzędnych tej mapy. Dla każdego punktu $q \in U$ wybieramy krzywą $\gamma_{(q,\lambda)}\colon \mathbb{R} \to M$ $(\lambda = 1, \ldots, m)$ taką, że

$$x^\kappa(\gamma_{(q,\lambda)}(s)) = x^\kappa(q) + \delta^\kappa{}_\lambda s \tag{77}$$

dla $\kappa, \lambda = 1, \ldots, m$ i s dostatecznie bliskiego $0 \in \mathbb{R}$. Definiujemy funkcje $\overline{x}^\kappa$, $\overline{x}_\lambda$ $(\kappa, \lambda = 1, \ldots, m)$ na $U^* = (\pi_M)^{-1}(U)$ wzorami

$$\overline{x}^\kappa(\mathrm{d}f(q)) = x^\kappa(q) \tag{78}$$

i

$$\overline{x}_\lambda(\mathrm{d}f(x)) = \mathrm{D}(f \circ \gamma_{(x,\lambda)})(0). \tag{79}$$

Wiązka T^*M ma jedyną strukturę rozmaitości różniczkowej, dla której funkcje $\overline{x}^\kappa$, $\overline{x}_\lambda$ są wspólrzędnymi mapy $c^* = (U^*, \varphi^*, 2m)$. Współrzędne $(\overline{x}^\kappa, \overline{x}_\lambda)$ będą oznaczane (x^κ, p_λ). Wprowadźmy odwzorowanie $\psi\colon (\tau_M)^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ takie, że

$$pr_U \circ \psi = \tau_M|(\tau_M)^{-1}(U) \tag{80}$$

i

$$pr^\kappa \circ pr_{\mathbb{R}^m} \circ \psi = p_\kappa. \tag{81}$$

Odwzorowanie to jest dyfeomorfizmem. Wynika stąd, że π_M jest rozwłóknieniem z włóknem typowym $\mathbb{R}^m$, dyfeomorfizm ψ jest lokalną trywializacją i c^* jast adaptowaną mapą. Dla każdego punktu $q \in U$ i każdego $\kappa = 1, \ldots, m$, obcięcie $p_\kappa|\mathsf{T}^*_q M$ funkcji p_κ do włókna $\mathsf{T}^*_q M$ jest funkcją liniową. Wynika stąd, że π_M jest rozwłóknieniem wektorowym (wiązką wektorową).

Odwzorowanie

$$\langle\ ,\ \rangle\colon \mathsf{T}M \times_M \mathsf{T}^*M \to \mathbb{R}$$

definiujemy przez

$$\langle \mathsf{t}\gamma(0), \mathrm{d}f(q)\rangle = \mathrm{D}(f \circ \gamma)(0) \tag{82}$$

gdzie $\gamma(0) = q$. Funkcja ta jest liniowa względem obu argumentów. Pozwala ona utożsamić przestrzeń kowektorów $\mathsf{T}^*_q M$ z przestrzenią dualną do przestrzeni wektorów stycznych $\mathsf{T}_q M$ i w konsekwencji, wiązkę $\mathsf{T}^* M$ z wiązką $(\mathsf{T}M)^*$ dualną do $\mathsf{T}M$. Odwzorowanie (82) nazywamy *kanoniczną ewaluacją (parowaniem)*.

Jeżeli $\Phi\colon M \to N$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym, to odwzorowanie styczne $\mathsf{T}\Phi$, a raczej para $(\Phi, \mathsf{T}\Phi)$ jest morfizmem wiązek wektorowych. Dla każdego $q \in M$ odwzorowanie

$$\mathsf{T}_q\Phi\colon \mathsf{T}_q M \to \mathsf{T}_{\Phi(q)} N$$

jest liniowe, więc istnieje dualne do niego odwzorowanie

$$\mathsf{T}^*_q\Phi\colon \mathsf{T}^*_{\Phi(q)} N \to \mathsf{T}^*_q M$$

Odwzorowania te zbieramy do relacji

$$\mathsf{T}^*\Phi\colon \mathsf{T}^* N \to \mathsf{T}^* M. \tag{83}$$

Relacja ta jest odwzorowaniem wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest dyfeomorfizmem.

Dalej następuje klasyczny (Analiza IIIC) wykład form różniczkowych.

Zwróćmy jeszcze tylko uwagę na fakt, że wprawdzie $\mathsf{T}\Phi$ jest odwzorowaniem, to na ogół nie można przy jego pomocy przetransportować pola wektorowego na M do pola wektorowego na N. Z drugiej strony, $\mathsf{T}^*\Phi$ nie jest odwzorowaniem tylko relacją, ale można przy jej pomocy transportować pola kowektorowe (forma) na N do pól kowektorowych (form) na M.

12. Struktura wiązki kostycznej.

Definicja 20. *Formą Liouville'a* θ_M nazywany 1-formę na $\mathsf{T}^* M$ zdefiniowaną wzorem

$$\langle \theta_M, v \rangle = \langle \tau_{\mathsf{T}^* M} v, \mathsf{T}\pi_M \rangle. \tag{84}$$

Formę Liouville'a θ_M zwaną też po prostu *formą kanoniczną* można zdefiniować trochę inaczej, wskazując funkcję na $\mathsf{T}^* M$ reprezentującą $\theta(p)$ dla $p \in \mathsf{T}^* M$. Niech para (q, f) reprezentuje p, tzn. $p = \mathrm{d}_q f$. Wówczas

$$\theta_M(p) = \mathrm{d}_p \pi^*_M f. \tag{85}$$

W lokalnym układzie współrzędnych forma Liouville'a zapisuje się wzorem

$$\theta_M = p_\kappa \mathrm{d}x^\kappa \tag{86}$$

(sumowanie po κ).

Forma Liouville'a charakteryzowana jest przez następującą swoją własność.

Stwierdzenie 14. *Dla każdej jednoformy $\mu\colon M \to \mathsf{T}^* M$ mamy równość $\mu^*\theta_M = \mu$.*

Dowód: Niech $v \in \mathsf{T}_q M$, wówczas $\mathsf{T}\mu(v) \in \mathsf{T}_{\mu(q)}\mathsf{T}^* M$ i

$$\langle \mu^*\theta_M, v \rangle = \langle \theta_M, \mathsf{T}\mu(v) \rangle = \langle \mu(q), \mathsf{T}\pi_M(\mathsf{T}\mu(v)) \rangle = \langle \mu(q), v \rangle.$$

■

Różniczkę zewnętrzną $\mathrm{d}\theta_M$ formy Liouville'a nazywamy *kanoniczną formą symplektyczną* i oznaczamy ω_M. W lokalnym układzie współrzędnych mamy

$$\omega_M = \mathrm{d}p_\kappa \wedge \mathrm{d}x^\kappa. \tag{87}$$

W każdym punkcie wiązki kostycznej $p \in \mathsf{T}^* M$ forma ω_M wyznacza (tak jak każda forma dwuliniowa) odwzorowanie

$$\widetilde{\omega}_M(p)\colon \mathsf{T}_p\mathsf{T}^* M \to \mathsf{T}^*_p\mathsf{T}^* M \tag{88}$$

wzorem

$$\langle \widetilde{\omega}_M(p)v, w\rangle = \omega_M(v, w). \tag{89}$$

W adaptowanym układzie współrzędnych

$$v = \dot{x}^\kappa(v)\frac{\partial}{\partial x^\kappa} + \dot{p}_\lambda(v)\frac{\partial}{\partial p_\lambda} \tag{90}$$

i z wyrażenia (87) dostajemy

$$\widetilde{\omega}_M(p)v = \dot{p}_\lambda(v)\mathrm{d}x^\lambda - \dot{x}^\kappa(v)\mathrm{d}p_\kappa. \tag{91}$$

Z wzoru tego wynika, że $\widetilde{\omega}_M(p)$ jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych, a $\widetilde{\omega}_M\colon \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \to \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$ izomorfizmem wiązek wektorowych. Odwzorowanie to często oznacza się symbolem $\flat$ (opuszczanie wskaźników), a my będziemy je oznaczać β_M (ale dopiero przy omawianiu dynamiki). Odwzorowanie odwrotne

$$\widetilde{\omega}_M^{-1}\colon \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M \to \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \tag{92}$$

oznacza się symbolem $\sharp$ (podnoszenie wskaźników).

UWAGA! Można się spotkać z inną konwencją, w której we wzorze (89) zamienione są rolami v i w. Oznacza to, że odwzorowania $\flat$ i $\sharp$ różnią się od naszych znakiem.

12.1. Nawias Poissona.

Definicja 21. *Nawiasem Poissona* $\{f, g\}$ funkcji $f, g \in \mathcal{C}(\mathsf{T}^*M)$ nazywa się funkcję zadaną wzorem

$$\{f, g\} = \omega_M((\mathrm{d}f)^\sharp, (\mathrm{d}g)^\sharp). \tag{93}$$

Wzór (92) równoważny jest następującym:

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= \langle \mathrm{d}f, (\mathrm{d}g)^\sharp\rangle = (\mathrm{d}g)^\sharp(f)\\ &= -\langle \mathrm{d}g, (\mathrm{d}f)^\sharp\rangle = -(\mathrm{d}f)^\sharp(g).\end{aligned} \tag{94}$$

Biorąc pod uwagę wzór (91) dostajemy lokalny wzór na nawias Poissona:

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= (\mathrm{d}g)^\sharp(f)\\ &= \frac{\partial g}{\partial x^\kappa}(\mathrm{d}x^\kappa)^\sharp(f) + \frac{\partial g}{\partial p_\lambda}(\mathrm{d}p_\lambda)^\sharp(f)\\ &= \frac{\partial g}{\partial x_\kappa}\frac{\partial f}{\partial p_\kappa} - \frac{\partial g}{\partial p_\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\\ &= \frac{\partial f}{\partial p_\kappa}\frac{\partial g}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\frac{\partial g}{\partial p_\lambda}.\end{aligned} \tag{95}$$

UWAGA! Jak i w przypadku $\flat$ można się (często) spotkać z inną konwencją, w której nawias Poissona różni się od wprowadzonego powyżej znakiem.

Twierdzenie 10. *Nawias Poissona posiada następujące własności:*

(1) *jest biliniowy i antysymetryczny, tzn.* $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
(2) *spełnia tożsamość Jacobiego, tzn.*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \tag{96}$$

(3) *odwzorowanie* $f \to \{g, f\}$ *jest dla każdego* g *różniczkowaniem w* $\mathcal{C}(\mathsf{T}^*M)$, *tzn.*

$$\{g, fh\} = f\{g, h\} + \{g, f\}h. \tag{97}$$

Dowód: Własności biliniowości i antysymetrii są oczywiste. Własność trzecia wynika natychmiast z (94) oraz z faktu, że pole wektorowe jest różniczkowaniem w algebrze funkcji. Pozostaje do wykazania tożsamość Jacobiego. Można ją sprawdzić bezpośrednim rachunkiem korzystając z lokalnej reprezentacji (95).

■

Jeszcze jedna uwaga na temat tożsamości Jacobiego. Otóż nawias Poissona definiuje mnożenie w przestrzeni funkcji na T^*M, które nie jest przemienne ani łączne. Tym nie mniej można mówić o różniczkowaniu względem tego działania (patrz część 9.1). Tożsamość Jacobiego można zapisać następująco:

$$\{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}, \tag{98}$$

co oznacza, że odwzorowanie $f \to \{g,f\}$ jest dla każdego g różniczkowaniem w $(\mathcal{C}(\mathsf{T}^*M), \{\cdot,\cdot\})$.■ Mówimy, że $(\mathcal{C}(\mathsf{T}^*M), \{\cdot,\cdot\})$ jest *algebrą Liego.*

12.2. Nawias Liego pól wektorowych. Punktem wyjścia jest pewna szczególna własność nawiasu Poissona. Otóż na każdej wiązce wektorowej E (więc i wiązce kostycznej) można wyróżnić w $\mathcal{C}(E)$ podprzestrzeń wektorową funkcji liniowych na włóknach oraz funkcji stałych na włóknach. Te ostatnie są podniesieniami funkcji gładkich na bazie wiązki.

Stwierdzenie 15. *Nawias Poissona na $\mathcal{C}(\mathsf{T}^*M)$ jest liniowy, tzn. nawias Poissona dwóch funkcji liniowych na włóknach jest funkcją liniową na włóknach.*

Dowód: W lokalnym układzie współrzędnych funkcje f, g liniowe na T^*M są postaci

$$\begin{aligned} f(p) &= F^\kappa(x)p_\kappa(p) \\ g(p) &= G^\kappa(x)p_\kappa(p) \end{aligned} \tag{99}$$

i stąd

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= \frac{\partial f}{\partial p_\kappa}\frac{\partial g}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}\frac{\partial g}{\partial p_\lambda} \\ &= F^\kappa \frac{\partial G^\nu}{\partial x^\kappa}p_\nu - G^\kappa\frac{\partial F^\nu}{\partial x^\kappa}p_\nu, \end{aligned} \tag{100}$$

czyli nawias $\{f,g\}$ jest funkcją liniową. ■

Oprócz tej własności mamy dwie inne:

(1) nawias Poissona funkcji liniowej i stałej na włóknach jest funkcją stałą na włóknach,
(2) nawias Poissona dwóch funkcji stałych na włóknach jest równy zero.

Własności te można wykazać korzystając z Twierdzenia 10 i z liniowości nawiasu. Istotnie, niech f, f' będą funkcjami liniowymi, zaś h, h' funkcjami stałymi na włóknach. Stąd hf' jest liniowa i z liniowości nawiasu liniowa jest funkcja $\{f, hf'\}$. Ale

$$\{f,hf'\} = h\{f,f'\} + \{f,h\}f',$$

więc

$$\{f,hf'\} - h\{f,f'\} = \{f,h\}f'. \tag{101}$$

Funkcja z lewej strony tej równości jest linowa, więc również funkcja $\{f,h\}f'$ jest linowa dla każdej funkcji liniowej f'. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $\{f,h\}$ jest funkcją stałą na włóknach.

Podobnie

$$\{h',hf\} = h\{h',f\} + \{h',h\}f',$$

i

$$\{h',hf\} - h\{h',f\} = \{h',h\}f'.$$

Z poprzedniego funkcja po lewej stronie jest stała na włóknach, więc i $\{h', h\}f'$ jest stała na włóknach dla każdej funkcji liniowej f'. Jest to możliwe tylko gdy $\{h', h\}$ jest równe zeru.

Niech teraz X będzie polem wektorowym na M, czyli cięciem wiązki stycznej. Polu temu moża przyporządkować funkcję $\widetilde{X}$ liniową na T^*M wzorem

$$\widetilde{X}(p) = \langle p, X(\pi_M(p)) \rangle. \tag{102}$$

Odpowiedniość między polami wektorowymi i liniowymi funkcjami na T^*M jest wzajemnie jednoznaczna.

DEFINICJA 22. *Nawiasem Liego* pól wektorowych nazywamy pole wektorowe $[X, Y]$ takie, że

$$\widetilde{[X,Y]} = \{\widetilde{X}, \widetilde{Y}\}. \tag{103}$$

Z Twierdzenia 10 wynikają następujące własności nawiasu Liego pól wektorowych:

(1) jest biliniowy i antysymetryczny,
(2) spełnia tożsamość Jacobiego:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]], \tag{104}$$

(3) dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}(M)$

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y. \tag{105}$$

Powyższy sposób wprowadzenia nawiasu Liego pól wektorowych nie jest zbyt często spotykany. Na ogół wprowadza się go jako komutator pól wektorowych rozumianych jako różniczkowania w algebrze $\mathcal{C}(M)$:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

13. Rozmaitości symplektyczne i Poissona.

DEFINICJA 23. *Rozmaitością symplektyczną* nazywamy parę (P, w), gdzie P jest rozmaitością różniczkową, zaś ω zamkniętą i niezdegenerowaną 2-formą na P.

STWIERDZENIE 16. *Rozmaitość symplektyczna jest wymiaru parzystego.*

DOWÓD: Niezdegenerowanie ω oznacza, że stowarzyszone odwzorowanie

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}\colon \mathsf{T}P &\to \mathsf{T}^*P \\ &: v \mapsto \omega(v, \cdot) \end{aligned} \tag{106}$$

jest izomorfizmem wiązek wektorowych. W lokalnym układzie współrzędnych macierz tego odwzorowania jest antysymetryczna z wyznacznikiem różnym od zera. Jeżeli jednak mamy antysymetryczną (skośnie symetryczną) macierz A rozmiaru $n \times n$, to

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Stąd $\det A = 0$ dla nieparzystego n. ∎

Kanonicznym przykładem rozmaitości symplektycznej jest wiązka kostyczna T^*M z formą ω_M, którą w lokalnym układzie współrzędnych zapisuje się $\omega = \mathrm{d}p_\kappa \wedge \mathrm{d}p_\kappa$. Okazuje się (Twierdzenie Darboux), że na dowolnej rozmaitości sumplektycznej (P, ω) wymiaru $2m$ można wprowadzić (lokalnie) taki układ współrzędnych $(x^\kappa, p_z l)$, że $\omega = \mathrm{d}p_\lambda \wedge \mathrm{d}x^\lambda$.

Podobnie jak na wiązce kostycznej, na rozmaitości symplektycznej można wprowadzić nawias funkcji wzorem

$$\{f,g\} = \omega((\mathrm{d}f)^\sharp, (\mathrm{d}g)^\sharp)), \quad (\mathrm{d}f)^\sharp = \widetilde{\omega}^{-1}(\mathrm{d}f). \tag{107}$$

TWIERDZENIE 11. *Nawias $\{\cdot,\cdot\}$ posiada następujące własności:*

(1) *jest biliniowy i antysymetryczny, tzn.* $\{f,g\} = -\{g,f\}$,

(2) *spełnia tożsamość Jacobiego, tzn.*

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0, \tag{108}$$

(3) *odwzorowanie $f \to \{g,f\}$ jest dla każdego g różniczkowaniem w $\mathcal{C}(\mathsf{T}^*M)$, tzn.*

$$\{g,fh\} = f\{g,h\} + \{g,f\}h. \tag{109}$$

DOWÓD: Własności biliniowości i antysymetrii są oczywiste. Własność trzecia wynika natychmiast z (107) oraz z faktu, że pole wektorowe jest różniczkowaniem w algebrze funkcji. Pozostaje do wykazania tożsamość Jacobiego. Sprawdzimy ją bezpośrednim rachunkiem korzystając z lokalnej reprezentacji

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}\mathrm{d}x^\kappa \wedge \mathrm{d}^\lambda$$

$$\mathrm{d}f \tag{110}$$

■

DEFINICJA 24. *Rozmaitością Poissona* nazywamy rozmaitość r/ożniczkową M z odwzorowaniem (nawiasem)

$$\{\cdot,\cdot\}: \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \tag{111}$$

biliniowym i antysymetrycznym, które jest różniczkowaniem ze względu na jedną zmienną i spełnia tożsamość Jacobiego.

Bezpośrednio z definicji mamy

$$\{f,1\} = \{f,1\cdot 1\} = \{f,1\} + \{f,1\}, \tag{112}$$

więc nawias dowolnej funkcji z funkcją stałą jest równy zero.

Ustalmy punkt $q \in M$. Odwzorowanie

$$\begin{aligned} X_f(q)&: \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R} \\ g&: \mapsto \{f,g\}(q) \end{aligned} \tag{113}$$

jest różniczkowaniem względem δ_q ((55)), więc wektorem z T_qM. Odwzorowanie $q\colon\mapsto X_f(q)$ jest polem wektorowym.

Z antysymetrii nawiasu

$$X_f(g) = -X_g(f) = -\langle \mathrm{d}f, X_g\rangle, \tag{114}$$

czyli wektor $X_f(q)$ zależy tylko od d_qf i zależność ta jest liniowe. Dostajemy więc odwzorowanie

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_\omega(q)&: \mathsf{T}^*_qM \to \mathsf{T}_qM \\ &: \mathrm{d}_qf \mapsto X_f(q), \end{aligned} \tag{115}$$

które jest liniowe i antysymetryczne. Wyznacza więc jednoznacznie biwektor $\Lambda(q) \in \bigwedge^2 \mathsf{T}_qM$:■

$$\langle \mathrm{d}g, \widetilde{\Lambda}_\omega(q)(\mathrm{d}f)\rangle = \Lambda(q)(\mathrm{d}_qf, \mathrm{d}_qg) = \{f,g\}(q) \tag{116}$$

i w efekcie pole biwektorowe Λ.

Na odwrót, mając pole biwektorowe Λ możemy wzorem (116) zdefiniować nawias funcji. Jest on oczywiście biliniowy, antysymetryczny i jest też różniczkowaniem ze względu na jedną zmienną. Tożsamość Jacobiego nie jest jednak na ogół spełniona. Warunki, jakie musi spełniać pole biwektorów by nawias funkcji spełniał tożsamość Jacobiego (by więc określał strukturę rozmaitości Poissona na M) nie są skomplikowane, ale nie jesteśmy jeszcze przygotowani do ich sformułowania.

13.1. Podrozmaitości rozmaitości symplektycznej. Niech (P, ω) będzie rozmaitością symplektyczną i niech $V \subset \mathsf{T}_q M$ będzie podprzestrzenią wektorową. Przez $V^\circ \subset \mathsf{T}^* P$ oznaczamy anihilator V (zbiór kowektorów zerujących się na podprzestrzeni V).

Definicja 25. *Polarą symplektyczną* $V^\S$ podprzestrzeni V nazywamy podprzestrzeń $\widetilde{\omega}^{-1}(V^\circ)$ przestrzeni $\mathsf{T}_q P$.

Ze względu na usytuowanie $V^\S$ względem V wyróżniamy następujące rodzaje podprzestrzeni:

(1) V jest *izotropowa* jeżeli $V^\S \supset V$,
(2) V jest *koizotropowa* jeżeli $V^\S \subset V$,
(3) V jest *lagranżowska* jeżeli $V^\S = V$,
(4) V jest *symplektyczna* jeżeli $V^\S \cap V = \{0\}$.

Podrozmaitość (zanurzona) N rozmaitości P nazywamy odpowiednio izotropową, koizotropową, lagranżowską lub symplektyczną, jeżeli w każdym punkcie jej przestrzeń styczna jest izotropowa, koizotropowa, lagranżowska lub symplektyczna. Podobnie klasyfikujemy podrozmaitości zanurzone $\iota \colon N \to P$ ze względu na własności obrazu $\mathsf{T}\iota$.

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeżeli $2m = \dim P$, to:

(1) $\dim N \leqslant m$ gdy N jest izotropowa,
(2) $\dim N \geqslant m$ gdy N jest koizotropowa,
(3) $\dim N = m$ gdy N jest izotropowa,
(4) $\dim N$ jest parzysty gdy N jest symplektyczna.

Zauważmy, że podrozmaitość lagranżowska jest jednocześnie izotropowa i koizotropowa, a podrozmaitość wymiaru jeden jest zawsze izotropowa.

Stwierdzenie 17. *Podrozmaitość N kowymiaru 1 jest zawsze koizotropowa.*

Dowód: Mamy pokazać, że $(\mathsf{T}_q N)^\S \subset \mathsf{T}_q N$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Ponieważ N jest kowymiaru 1, to $(\mathsf{T}_q N)^\S$ jest wymiaru 1. Niech v będzie niezerowym wektorem z $(\mathsf{T}_q N)^\S$. Oznacza to, że $\omega(v, w) = 0$ dla każdego wektora $w \in \mathsf{T}_q N$. Ale $\omega(v, v) = 0$, więc $\omega(v, w) = 0$ dla każdego $w \in \mathsf{T}_q P$, co oznacza, że $\widetilde{\omega}(q) = 0$. Sprzeczność. ■

14. Generowanie podrozmaitości lagranżowskich.

Zajmijmy się bardziej szczegółowo podrozmaitościami lagranżowskimi wiązki kostycznej.

Stwierdzenie 18. *Obraz jednoformy $\alpha \colon M \to \mathsf{T}^* M$ jest podrozmaitością lagranżowską wtedy i tylko wtedy, gdy α jest formą zamkniętą, tzn. $\mathrm{d}\alpha = 0$.*

Dowód: Ze Stwierdzenia 14 mamy $\alpha^* \theta_M = \alpha$, a z przemienności transportu formy z różniczkowaniem zewnętrznym

$$\alpha^* \omega_M = \alpha^* \mathrm{d}\theta_M = \mathrm{d}\alpha. \tag{117}$$

Z drugiej strony, $\alpha(M)$ jest podrozmaitością lagranżowską jeśli $\alpha^* \omega_M = 0$, bo wymiar $\alpha(M)$ jest równy wymiarowi M. ■

W szczególności może się zdarzyć, że $\alpha = \mathrm{d}f$ dla $f \in cC(M)$. W tym przypadku mówimy, że podrozmaitość lagranżowska jest *generowana* przez funkcję *generującą* f.

Niech teraz $C \subset M$ będzie podrozmaitością i $f \in \mathcal{C}(C)$. Funkcja f generuje podrozmaitość lagranżowską w $\mathsf{T}^* C$. Ponieważ $\mathsf{T}_q C \subset \mathsf{T}_q M$ jest podprzestrzenią, to $\mathsf{T}^*_q C$ można w naturalny sposób utożsamić z przestrzenią ilorazową $\mathsf{T}^*_q M \setminus (\mathsf{T}_q C)^\circ$. Mamy więc kanoniczne rzutowanie

$$\vartheta_C \colon \mathsf{T}^*_C M \to \mathsf{T}^* \tag{118}$$

którego jądrem jest $(\mathsf{T} C)^\circ$.

Stwierdzenie 19. $N = \vartheta_C^{-1}(\mathrm{d}f(C))$ *jest podrozmaitością lagranżowską w* $\mathsf{T}^* M$.

Dowód: Pokazanie, że N jest podrozmaitością jest łatwym ćwiczeniem. Jej wymiar jest równy

$$\dim C + \dim(\mathsf{T}_q C)^\circ = \dim C + (\dim M - \dim C) = \dim M.$$

Z definicji formy Liouville'a mamy dla $v \in \mathsf{T}_p\mathsf{T}^*_C M$

$$\mathsf{T}\pi_M(v) = \mathsf{T}\pi_M \circ \mathsf{T}\vartheta_C(v) \tag{119}$$

i

$$\begin{aligned}\theta_M(v) &= \langle p, \mathsf{T}\pi_M(v)\rangle \\ &= \langle \vartheta_C(p), \mathsf{T}\pi_M \circ \mathsf{T}\vartheta_C(v)\rangle \\ &= \theta_C(\mathsf{T}\vartheta_C(v)) \\ &= \vartheta_C^*\theta_C(v).\end{aligned} \tag{120}$$

Stąd $\theta_M|\mathsf{T}^*_C M = \vartheta^*_C\theta_C$ i $\omega_M|\mathsf{T}^*_C M = \vartheta^*_C\omega_C$. Zatem

$$\omega_M|N = \vartheta^*_C(\omega_C|\mathrm{d}f(C)) = 0. \tag{121}$$

■

Mówimy, że para (C, f) *generuje* podrozmaitość lagranżowską N. Jest to uogólnienie poprzedniego przypadku.

15. Rodziny Morse'a.

Zajmiemy się teraz ogólniejszym sposobem generowania podrozmaitości lagranżowskich w T^*M. Poprzednio, mając podrozmaitość lagranżowską w czymś 'mniejszym' (T^*C) dostawaliśmy (bez przeszkód) podrozmaitość lagranżowską w czymś 'większym'(T^*M). Teraz będziemy się zajmować sytuacja w pewnym sensie przeciwną: mając podrozmaitość lagranżowską w czymś 'większym' otrzymywać będziemy podrozmaitość lagranżowską w czymś 'mniejszym'. Tutaj pojawią się przeszkody.

15.1. Konstrukcje przygotowawcze. Niech $\tau\colon E \to M$ będzie rozwłóknieniem. Wektor $v \in \mathsf{T}E$ nazywamy pionowym, jeżeli $\mathsf{T}\tau(v) = 0 \in \mathsf{T}M$. Inaczej mówiąc, v jest wektorem stycznym do włókna rozwłóknienia τ. Zbiór wektorów pionowych $\mathsf{V}E$ tworzy wiązkę wektorową - podwiązkę wiązki stycznej $\mathsf{T}E$. Niech teraz $\tau\colon E \to M$ będzie rozwłóknieniem wektorowym. Każdej parze $(e, e') \in E \times_M E$, to znaczy $\tau(e) = \tau(e')$ przypisujemy wektor $\chi[\tau](e, e') \in \mathsf{T}E$ reprezentowany krzywą

$$\begin{aligned}\gamma_{e,e'}&\colon \mathbb{R} \to E \\ &\colon t \mapsto e + te'.\end{aligned} \tag{122}$$

Ponieważ $\tau\circ\gamma_{e,e'}$ jest krzywą stałą, reprezentuje wektor zerowy w $\mathsf{T}M$. Wektor $\chi[\tau](e, e')$ jet wektorem pionowym. Łatwo się przekonać, używając na przykład lokalnego układu współrzędnych, że każdy wektor pionowy jest tej postaci, czyli odwzorowanie

$$\chi[\tau]\colon E_M E \to \mathsf{V}E \tag{123}$$

jest diffeomorfizmem, a nawet izomorfizmem wiązek wektorowych.

Niech teraz wektory $v \in \mathsf{V}\mathsf{T}^*M$, $w \in \mathsf{T}\mathsf{T}^*$ będą zaczepione w tym samym punkcie $f \in \mathsf{T}^*M$. Z lokalnej reprezentacji $\omega_M = \mathrm{d}p_\lambda \wedge \mathrm{d}y^\lambda$ widać, że

$$\omega_M(w, v) = -\langle \mathsf{T}\pi_M(w), g\rangle, \tag{124}$$

gdzie $g \in \mathsf{T}^*M$ jest takie, że

$$v = \chi[\pi_M](f, g). \tag{125}$$

15.2. Rodziny funkcji i zbiory przez nie generowane. Niech $\eta\colon Y \to M$ będzie rozwłoknieniem różniczkowalnym. Przypomnijmy, że $\mathsf{V}Y$ oznacza podwiązkę wektorów pionowych

$$\{w \in \mathsf{T}Y;\ \mathsf{T}\eta(w) = 0\} \tag{126}$$

wiązki stycznej $\mathsf{T}Y$. *Polara* tej podwiązki

$$\mathsf{V}^\circ Y = \left\{g \in \mathsf{T}^*Y;\ \forall_{v \in \mathsf{V}Y} \tau_Y(v) = \pi_Y(g) \Rightarrow \langle g, v\rangle = 0\right\} \tag{127}$$

jest podwiązką wiązki kostycznej T^*Y. Istnieje odwzorowanie $\widetilde{\eta}\colon \mathsf{V}^\circ Y \to \mathsf{T}^*M$ charakteryzowane równością

$$\langle \widetilde{\eta}(g), v\rangle = \langle g, w\rangle \tag{128}$$

dla każdego wektora $v \in \mathsf{T}_{\eta(y)}M$, gdzie $y = \pi_Y(g)$, i dla każdego wektora $w \in \mathsf{T}_yY$ związanego z v warunkiem $\mathsf{T}\eta(w) = v$.

Funkcja $F\colon Y \to \mathbb{R}$ może być uważana za *rodzinę funkcji* określonych na włóknach rozwłóknienia η. Oznaczać ją będziemy (F, η) i reprezentować diagramem

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbb{R} \\ M & \end{tikzcd} \tag{129}$$

Zbiorem krytycznym rodziny (F, η) nazywamy zbiór

$$S(F, \eta) = \left\{y \in Y;\ \forall_{w \in \mathsf{V}_yY} \langle \mathrm{d}F, w\rangle = 0\right\}. \tag{130}$$

Elementy zbioru krytycznego nazywamy *punktami krytycznymi* rodziny (F, η). Istnieje odwzorowanie $\kappa(F, \eta)\colon S(F, \eta) \to \mathsf{T}^*M$ zdefinowane równością

$$\langle \kappa(F, \eta)(y), v\rangle = \langle \mathrm{d}F, w\rangle \tag{131}$$

dla każdego $v \in \mathsf{T}_{\eta(y)}M$ i dla każdego $w \in \mathsf{T}_yY$ związanego z v warunkiem $\mathsf{T}\eta(w) = v$.

Rodzina funkcji (F, η) *generuje* zbiór $K \subset \mathsf{T}^*M$ będący obrazem odwzorowania $\kappa(F, \eta)$. W dalszym ciągu sformułujemy waruki gwarantujące lagranżowskość K.

15.3. Względny Hessian funkcji.

Niech Y będzie rozmaitością różniczkową, $F\colon Y \to \mathbb{R}$ funkcją różniczkowalną na Y i $N = \mathrm{im}(\mathrm{d}F) \subset \mathsf{T}^*Y$ podrozmaitością lagranżowską generowaną przez funkcję F. Wybierzmy punkt $y \in Y$. Przestrzeń $M = \mathsf{T}_fN = \mathrm{im}(\mathsf{T}_y\mathrm{d}F)$ styczna do N w $f = \mathrm{d}F(y)$ jest lagranżowska, czyli równa swojej polarze symplektycznej w przestrzeni $\mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$.

Niech $\lambda\colon \mathsf{T}_yY \to \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$ będzie liniowym odwzorowaniem takim, że $\mathsf{T}_f\pi_Y \circ \lambda = 1_{\mathsf{T}_yY}$. Wprowadźmy odwzorowanie

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathsf{T}_yY \oplus \mathsf{T}^*_yY &\to \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y \\ : (u, g) &\mapsto \lambda(u) + \chi[\pi_Y](f, g). \end{aligned} \tag{132}$$

Korzystając z (124) widzimy, że równość

$$\langle \omega_Y, \varphi(u, g) \wedge \varphi(v, h)\rangle = -\langle h, u\rangle + \langle g, v\rangle \tag{133}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $L = \mathrm{im}(\lambda)$ is podprzestrzenią zerową (lagranżowską) kanonicznej formy symplektycznej ω_Y na przestrzeni $\mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$.

Niech zatem L będzie taką podprzestrzenią lagranżowską i niech $\mu \colon \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y \to \mathsf{T}^*_yY$ będzie odwzorowaniem takim, że $(\mathsf{T}_f\pi_Y, \mu)$ jest odwzorowaniem odwrotnym do φ. Z równości

$$\begin{aligned}\langle \mu(\mathsf{T}\mathrm{d}F(u)), v\rangle - \langle \mu(\mathsf{T}\mathrm{d}F(v)), u\rangle &= \langle \mu(\mathsf{T}\mathrm{d}F(u)), \mathsf{T}\pi_Y(\mathsf{T}\mathrm{d}F(v))\rangle - \langle \mu(\mathsf{T}(\mathrm{d}F)(v)), \mathsf{T}\pi_Y(\mathsf{T}\mathrm{d}F(u))\rangle \\ &= \langle \omega_Y, \mathsf{T}\mathrm{d}F(u) \wedge \mathsf{T}\mathrm{d}F(v)\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{134}$$

wynika, że odwzorowanie

$$\mu \circ \mathsf{T}_y\mathrm{d}F \colon \mathsf{T}_yY \to \mathsf{T}^*_yY \tag{135}$$

jest symetryczne. Biliniowa funkcja symetryczna

$$\begin{aligned} H_L(F, y) \colon \mathsf{T}_yY \times \mathsf{T}_yY &\to \mathbb{R} \\ \colon (u, v) &\mapsto \langle \mu(\mathsf{T}\mathrm{d}F(u)), v\rangle \end{aligned} \tag{136}$$

nazywana jest *hessianem funkcji F względem podprzestrzeni lagranżowskiej $L \subset \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$*. Mamy też z (133)

$$H_L(F, y)(u, v) = \langle \omega_Y, \mathsf{T}\mathrm{d}F(u) \wedge \lambda(v)\rangle, \tag{137}$$

bo $\mathsf{T}\mathrm{d}F(u) = \varphi(u, \mu(\mathsf{T}\mathrm{d}F(u)))$ i $\lambda(v) = \varphi(v, 0)$.

Niech teraz y będzie punktem krytycznym funkcji $F \colon Y \to \mathbb{R}$. Ponieważ $\mathrm{d}F(y) = 0$, możemy wybrać $\lambda = \mathsf{T}_yO[\pi_Y]$. Przestrzeń $L = \mathrm{im}(\lambda)$ jest przestrzenią styczną do obrazu cięcia zerowego $O[\pi_Y]$ w punkcie $O[\pi_Y](y)$. Względny hessian $H_L(F, y)$ nazywany jest po prostu *hessianem* funkcji F w punkcie krytycznym y. Oznaczamy go $H(F, y)$.

15.4. Hessian rodziny funkcji w punkcie krytycznym.

Niech $y \in Y$ będzie punktem krytycznym rodziny funkcji

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbb{R} \\ M & \end{tikzcd} \tag{138}$$

Niech $\lambda \colon \mathsf{T}_yY \to \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$ oraz $\lambda' \colon \mathsf{T}_yY \to \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$ będą odwzorowaniami liniowymi takimi, że $\mathsf{T}_f\pi_Y \circ \lambda = 1_{\mathsf{T}_yY}$ oraz $\mathsf{T}_f\pi_Y \circ \lambda' = 1_{\mathsf{T}_yY}$. Niech obrazy $L = \mathrm{im}(\lambda)$ i $L' = \mathrm{im}(\lambda')$ będą podprzestrzeniami lagranżowskimizawartymi w $\mathsf{T}_f\mathsf{V}^\circ Y \subset \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$. Dla każdego wektora $v \in \mathsf{T}_yY$ wektor $\lambda'(v) - \lambda(v)$ jest w $\mathsf{V}_f\mathsf{T}^*Y$ i w $\mathsf{T}_f\mathsf{V}^\circ Y$. Istnieje jedyny kowektor $g \in \mathsf{V}^\circ_yY$ taki, że $\lambda'(v) - \lambda(v) = \chi[\pi_Y](f, g)$. Mamy dzięki (137)

$$\begin{aligned} H_{L'}(F, y)(u, v) - H_L(F, y)(u, v) &= \langle \omega_Y, \mathsf{T}\mathrm{d}F(u) \wedge (\lambda'(v) - \lambda(v))\rangle \\ &= \langle g, \mathsf{T}\pi_Y(\mathsf{T}\mathrm{d}F(u))\rangle \\ &= \langle g, v\rangle. \end{aligned} \tag{139}$$

Wynika stąd, że jeżeli $u \in \mathsf{V}_yY$, to

$$H_{L'}(F, y)(u, v) = H_L(F, y)(u, v). \tag{140}$$

Wzór

$$\begin{aligned} H(F, \eta, y) \colon \mathsf{V}_yY \times \mathsf{T}_yY &\to \mathbb{R} \\ \colon (u, v) &\mapsto H_L(F, y)(u, v), \end{aligned} \tag{141}$$

definiuje to samo biliniowe, symetryczne odwzorowanie dla każdego wyboru lagranżowskiej podprzestrzeni $L \subset \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$ transwersalnej do podprzestrzeni wektorów pionowych i zawartej w $\mathsf{T}_f\mathsf{V}^\circ Y$. Odwzorowanie to nazywane jest *hessian* rodziny (F,η) w punkcie krytycznym y.

Ponieważ $L \subset \mathsf{T}V^\circ Y$, wektor w jest w $\mathsf{T}_f V^\circ Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(f,\mu(w)) = w - \lambda(v) \in \mathsf{T}_f V^\circ Y$, gdzie $v = \mathsf{T}\pi_Y(w)$. Wynika stąd, że $w \in \mathsf{T}_f V^\circ Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(w) \in V^\circ Y$.

Zauważmy, że podprzestrzeń $\lambda(\mathsf{V}_y Y)$ nie zależy od wyboru λ:

Niech $v \in \mathsf{V}_y Y$ i niech $L, L' \in \mathsf{T}_f\mathsf{V}^\circ Y$. Dla $w \in \mathsf{T}_f\mathsf{T}^*Y$ i $v' = \pi_Y(w)$ mamy ((133))

$$\begin{aligned} \omega_Y(\lambda'(v) - \lambda(v), w) &= \omega_Y(\lambda'(v) - \lambda(v), \lambda(v')) \\ &= \omega_Y(\lambda'(v), \lambda(v) - \lambda(v')) \\ &= \langle g', v\rangle, \end{aligned} \tag{142}$$

gdzie $\chi[\pi_Y](f,g') = \lambda(v') - \lambda'(v')$. Korzystaliśmy tu z lagranżowskości L i L'. Ponieważ $L, L' \subset \mathsf{T}V^\circ Y$ i $v \in \mathsf{V}$, mamy $g' \in \mathsf{V}^\circ Y$ i $\langle g', v\rangle = 0$. Wynika stąd, że $g' = 0$ i $\lambda(v) = \lambda'(v)$.

Czytelnikowi pozostawiam do sprawdzenia, że jądro odwzorowania $\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}$ jest polarą symplektyczną $\mathsf{T}_f\mathsf{V}^\circ Y$, czyli obrazem $\mathsf{V}Y$ względem λ.

Stwierdzenie 20.

$$\dim(\ker \mathsf{T}_f\widetilde{\eta} \cap \mathsf{T}_f(\mathrm{d}F(\mathsf{T}Y))) = \dim \mathsf{V}_y Y - \operatorname{rank} H(F,\eta,y) \tag{143}$$

Dowód: Niech $w \in \ker \mathsf{T}_f\widetilde{\eta} \cap \mathsf{T}_f(\mathrm{d}F(\mathsf{T}Y))$, to znaczy $w = \lambda(v)$ i $w = \mathsf{T}\mathrm{d}F(v)$, gdzie $v \in \mathsf{V}_y Y$. Mamy zatem dla $v' \in \mathsf{T}_y Y$

$$\begin{aligned} H(F,\eta,y)(v,v') &= H_L(F,y)(v,v') \\ &= \langle \omega_Y, \mathsf{T}\mathrm{d}F(v) \wedge \lambda(v')\rangle \\ &= \langle \omega_Y, \lambda(v) \wedge \lambda(v')\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{144}$$

I na odwrót: jeżeli $v \in \mathsf{V}_y Y$ jest takie, że dla każdego $v' \in \mathsf{T}_y Y$ mamy

$$H_L(F,y)(v,v') = \langle \omega_Y, \mathsf{T}\mathrm{d}F(v) \wedge \lambda(v')\rangle = 0, \tag{145}$$

to znaczy $\mathsf{T}\mathrm{d}F(v)$ jest w polarze symplektycznej L. Ponieważ L jest lagranżowska wnioskujemy, że $\mathsf{T}\mathrm{d}F(v) = \lambda(v)$. Wynika stąd żądana równość wymiarów. ■

15.5. Rodziny regularne i Morse'a.

Definicja 26. Rodzina (F,η) nazywana jest *rodziną Morse'a* jeżeli rząd $H(F,\eta,y)$ jest maksymalny w każdym $y \in S(F,\eta)$. Rodzina (F,η) nazywana jest *regularną* jeżeli krytyczny zbiór $S(F,\eta)$ jest podrozmaitością Y i rząd $H(F,\eta,y)$ w każdym $y \in S(F,\eta)$ jest równy kowymiarowi $S(F,\eta)$.

Pokażemy, że rodzina regularna generuje podrozmaitość lagrangżowską T^*M i że rodzina Morse'a jest regularna.

Theorem 12. *Jeżeli (F,η) rodziną regularną, to obraz $\kappa(F,\eta)$ jest włożoną podrozmaitością lagranżowską w T^*M.*

Dowód: Niech $y \in S(F,\eta)$ i $f = \mathrm{d}F(y)$. Rząd κ w y jest równy $\dim(\mathsf{T}_y S(F,\eta)) - \dim(\ker(\mathsf{T}_y\kappa))$. Mamy

$$\begin{aligned} \ker(\mathsf{T}_y\kappa) &= \ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}) \cap \mathsf{T}_f\mathrm{d}F(S(F,\eta)) \\ &= \ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}) \cap \mathsf{T}_f(\mathrm{d}F(Y) \cap V^\circ Y) \\ &\subset \ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}) \cap (\mathsf{T}_f\mathrm{d}F(Y) \cap \mathsf{T}_f V^\circ Y) \\ &= \ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}) \cap \mathsf{T}_f\mathrm{d}F(Y). \end{aligned} \tag{146}$$

Z (146) i Stwierdzenia 20 wynika, że

$$\dim(\ker(\mathsf{T}_y\kappa)) \leqslant \dim(\ker(\mathsf{T}_b\widetilde{\eta}) \cap \mathsf{T}_b L) = \dim \mathsf{V}_y - \operatorname{rank} H(F,\eta,y). \tag{147}$$

Ponieważ rodzina (F,η) jest regularna, $\operatorname{rank} H(F,\eta,y) = \dim \mathsf{V}_y Y + \dim M - \dim S(F,\eta)$ i w konsekwencji

$$\dim(\ker(\mathsf{T}_y\kappa)) \leqslant \dim S(F,\eta) - \dim M. \tag{148}$$

Wynika stąd, że

$$\dim(\operatorname{im}(\mathsf{T}_y\kappa)) = \dim S(F,\eta) - \dim(\ker(\mathsf{T}_y\kappa)) \geqslant \dim M. \tag{149}$$

Z drugiej strony $\mathsf{T}_y\kappa$ jest złożeniem $\mathsf{T}_y\mathrm{d}F$, obciętego do $\mathsf{T}_y S(F,\eta)$, i $\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}$. Obraz $\mathsf{T}_y\mathrm{d}F$ jest podprzestrzenią lagranżowską, więc z faktu, że jądro $\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}$ jest polarą symplektyczną $\mathsf{T}_f\mathsf{V}^\circ$ wynika, że obraz $\operatorname{im}(\mathsf{T}_y\kappa)$ jest izotropową podprzestrzenią $\mathsf{T}_{\widetilde{\eta}(f)}\mathsf{T}^*M$. Implikuje to nierówność

$$\dim(\operatorname{im}(\mathsf{T}_y\kappa) \leqslant \dim M, \tag{150}$$

co razem z (149) daje

$$\dim(\operatorname{im}(\mathsf{T}_r\kappa)) = \dim(M). \tag{151}$$

Z twierdzenia o stałym rzędzie wynika, że $N = \kappa(S(F,\eta))$ jest włożoną podrozmaitością T^*M i $\dim(N) = \dim(M)$. Ponieważ, jak pokazliśmy, N jest podrozmaitością izotropową, jest też lagranżowska. ■

Pozostaje do wykazania, że rodzina Morse'a jest regularna. Maksymalność rzędu hessianu oznacza, że jest on równy $\dim V_y Y$ i w konsekwencji ((149)), $\dim(\ker(\mathsf{T}_y\kappa)) = 0$. Wystarczy teraz udowodnić, że $S(F,\eta)$ jest podrozmaitością. W tym celu pokażemy, że $\mathsf{V}^\circ Y$ i $\mathrm{d}F(Y)$ przecinają się transwersalnie. Skorzystamy tu z kryterium danego w Twierdzeniu 9. Niech więc $y \in S(F,\eta), f = \mathrm{d}F(y)$. Zauważmy najpierw, że wektory z $\ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta})$ nie są pionowe względem rzutowania π_Y, tzn. $\mathsf{V}_f\mathsf{T}^*Y \cap \ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}) = \{0\}$, i że $\mathsf{V}_f\mathsf{T}^*Y \cap \mathsf{T}_f(\mathrm{d}F(Y)) = \{0\}$. Co więcej (sprawdzić!),

$$\mathsf{V}_f\mathsf{V}^\circ Y \cap (\ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}) + \mathsf{T}_f(\mathrm{d}F(Y))) = \{0\} \tag{152}$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned}
\dim(\mathsf{T}_y V^\circ Y + \mathsf{T}_y\mathrm{d}F(\mathsf{T}Y)) &\geqslant \dim(\ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}) + \mathsf{V}_f\mathsf{V}^\circ Y + \mathsf{T}_y\mathrm{d}F(\mathsf{T}Y)) \\
&= \dim \mathsf{V}_f\mathsf{V}^\circ Y + \dim(\ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta}) + \mathsf{T}_y\mathrm{d}F(\mathsf{T}Y)) \\
&= \dim M + \dim(\ker(\mathsf{T}_f\widetilde{\eta})) + \dim(\mathsf{T}_y\mathrm{d}F(\mathsf{T}Y)) \\
&= \dim M + (\dim Y - \dim M) + \dim Y = \dim \mathsf{T}^*Y.
\end{aligned} \tag{153}$$

16. Podstawy rachunku wariacyjnego na przykładzie statyki.

Zasady wariacyjne są raczej konsekwencją sposobu mówienia (myślenia) o układzie fizycznym niż metodą uzyskiwania z góry zadanych równań. Aby zrozumieć, o jaki to sposób mówienia (opisywania) chodzi warto przyjrzeć się sytuacji najprostszej, a więc zasadom prac wirtualnych w statyce. Nie będziemy tu rozwijać formalizmu, co oznacza że wiele pytań, wątpliwości pozostanie bez odpowiedzi. Nie wszystko będzie do końca sprecyzowane. Zwracać będziemy uwagę na język i koncepcje wynikające z wariacyjnego 'podejścia' do układu fizycznego. Przedstawiony pogląd na rachunek wariacyjny odmienny będzie od dość rozpwszechnionego, że zasady wariacyjne służą jedynie do wyprowadzenia równań (Eulera-Lagrange'a). Podkreślam, że „wariacyjność” jest sposobem mówienia (myślenia) o układzie, z którego wynika sposób (a raczej sposoby) jego opisu. Chodzi więc bardziej o język niż o formalizm, czy technikę.

Podstawowe koncepcje leżące u podstaw opisu wariacyjnego:

(1) Konfiguracje - na początek przyjmijmy, że tworzą gładką, skończenie-wymiarową rozmaitość Q.
(2) Quasistatyczne procesy (wirtualne) - łuki (lokalnie są to zorientowane, jednowymiarowe podrozmaitości) -na ogół nie wszystkie- w Q, tworzą zbiór $\boldsymbol{C}$
(3) Koszty procesów (praca) są funkcją rzeczywistą $\boldsymbol{W}$

$$\boldsymbol{W}\colon \boldsymbol{C} \to \mathbb{R}$$

Opis układu dostajemy przez podanie tych trzech obiektów.
Pytania zadawane - o położenia równowagi układu.
Podstawowe założenia ogólne:

(1) procesy można składać,
(2) praca jest funkcją addytywną procesów.

Z tych założeń wynika, że półkrzywa γ w Q, to znaczy odwzorowanie

$$\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to Q,$$

wyznacza jednoparametrową rodzinę procesów $\gamma_a = \gamma([0, a])$, a funkcja pracy na tych procesach daje funkcję na $\mathbb{R}_+$ o wartościach rzeczywistych:

$$a \mapsto \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\gamma_a}).$$

Ponieważ $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\gamma_o}) = \mathbf{o}$ funkcja ta jest wyznaczona jednoznacznie przez swoją pochodną. Na mocy założenia ogólnego zależy tylko lokalnie od rodziny procesów (od jej kiełka).

Założenia upraszczające na potrzeby wykładu:

(*) pochodna, o której mowa powyżej zależy tylko od pierwszej pochodnej krzywej, więc tylko od wektora stycznego do Q. Oznaczmy

$$W(\mathrm{t}^1\gamma(0)) = \frac{d\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\gamma_a})}{\boldsymbol{da}}(0)$$

(**) procesy dopuszczane przez układ są zadane przez wektory styczne do nich w punkcie początkowym. Tworzą one podzbiór C^1, dodatnio jednorodny, wiązki stycznej $\mathsf{T}Q$. Inaczej mówiąc, procesy dopuszczalne są rozwiązaniami równania $C^1 \subset \mathsf{T}Q$. L jest więc funkcją dodatnio jednorodną na C^1.

16.1. Zasady prac wirtualnych. Zasada prac wirtualnych podaje kryterium równowagi układu statycznego.

(W) Punkt $q \in C$ jest punktem równowagi, jeżeli dla każdej półkrzywej γ o początku w q funkcja pracy

$$a \mapsto \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\gamma_a})$$

jest w otoczeniu zera dodatnia.

Znaczy to, że funkcja ta ma w zerze lokalne minimum. Z analizy znane są kryteria minimum:

(K) funkcja na $\mathbb{R}_+$ ma w zerze minimum, jeżeli pierwsza nie znikająca pochodna w zerze jest dodatnia.

Stąd wynika cała seria kryteriów równowagi układu w punkcie, w zależności od tego, ile pochodnych bierzemy pod uwagę.

$\mathrm{W}^{(k)}$ Jeżeli punkt $q \in C$ jest punktem równowagi, to dla każdej półkrzywej γ o początku w q funkcja pracy

$$a \mapsto \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\gamma_a})$$

ma w zerze dodatnią pierwszą nieznikającą pochodną rzędu $\leqslant k$.

Najprostsza zasada, dla $k = 1$

$W^{(1)}$ Jeżeli punkt $q \in C$ jest punktem równowagi, to dla każdej półkrzywej γ o początku w q funkcja pracy

$$a \mapsto \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\gamma_a})$$

ma w zerze dodatnią pierwszą nieznikającą pochodną rzędu $\leqslant k$.

Zwróćmy uwagę, że powyższe zasady mówią o warunkach koniecznych. Można sformułować warunki dostateczne:

$W^{(k)}$ Jeżeli punkt $q \in C$ ma tę własność, że dla każdej półkrzywej γ o początku w q funkcja pracy

$$a \mapsto \boldsymbol{W}(\boldsymbol{\gamma_a})$$

ma w zerze pierwszą nieznikającą pochodną rzędu $\leqslant k$ i jest ona dodatnia, to punkt q jest punktem równowagi.

Gdyby nas interesował tylko jeden układ, sprawę mielibyśmy zakończoną. Jak jednak wynika z dotychczasowych rozważań wariacyjne podejście dotyczy układów otwartych na oddziaływanie z innymi. W dalszej części ograniczam się do zasady prac wirtualnych ze wskaźnikiem $k = 1$.

16.2. Opis układów złożonych. Składamy dwa układy o tej samej przestrzeni konfiguracyjnej. Naturalną wydaje się następująca propozycja opisu układu złożonego:

jeżeli układy opisywane są przez pary (C_1^1, W_1) *i* (C_2^1, W_2)*, to układ złożony opisywany jest przez parę* $(C_1^1 \cap C_2^1, W_1 + W_2)$.

Nie zawsze jest tak dobrze. To, że C^1 nie jest całą przestrzenią styczną oznacza, że mamy więzy. Opis przy pomocy więzów jest jest stosowany, gdy nie jesteśmy w stanie wyprowadzić układu w sposób dostrzegalny ze zbioru C. Koncept więzów w statyce jest więc związany z naszym ograniczeniu „energetycznym" i ograniczonej zdolności rozdzielczej w rozpoznawaniu konfiguracji układu.

Opis z więzami jest idealizacją, zastępującą opis rzeczywisty. Powstaje pytanie: czy mając dwa opisy idealizowane układów z więzami możemy dostać opis układu złożonego? Nie trudno podać przykład gdy tak nie jest.

Znajomość opisów idealizowanych (czytaj: z więzami) dwóch układów nie wystarcza, w ogólności, do podania opisu układu złożonego. Jeżeli wystarcza, to przecięcie więzów nazywamy *czystym*. Można też składać układy również częściowo, tzn. angażując tylko pewne stopnie swobody.

Szczególnie ważny jest przypadek, gdy jeden z układów (np drugi) jest *potencjalny*, tzn. $W = \mathrm{d}V$, $\quad V\colon Q \to \mathbb{R}$ oraz $C^2 = \mathsf{T}Q$. Aby wypowiedzieć się na temat równowagi w punkcie q wystarczy znać L na T_qQ, czyli różniczkę d_qV. W punkcie q rodzina układów potencjalnych może być (i jest) utożsamiana z przestrzenią ko-styczną T^*_qQ do Q w q. Z punku widzenia układu pierwszego dwa układy potencjalne posiadające tą samą różniczkę w q są w tyym punkcie nierozróżnialne. To znaczy, układ (C_1^1, L_1) jest w równowadze z jednym układem potencjalnym w q wtedy i trylko wtedy, gdy jest w tym punkcie w równowadze z drugim układem potencjalnym.

16.3. Opis dualny. Transformacja Legendre'a. *Siłą w punkcie* q nazwiemy klasę układów potencjalnych, równoważnych ze względu na zasadę pracy wirtualnej dla punktu q w złożeniu z innymi układami.

Z poprzednich rozważań wynika, że dla $k = 1$ przestrzeń sił jest równa T^*Q. Możemy też rozpatrywać siły wyższych rzędów, dla $k > 1$.

Niech będzie dany układ (C^1, W). Każdemu punktowi $q \in C^0 = C$ przyporządkujemy zbiór wszystkich układów potencjalnych $(\mathsf{T}Q, \mathrm{d}V)$ będących w równowadze z naszym układem w punkcie q. Zbiór ten jest w pełni opisany przez podzbiór S_q przestrzeni kowektorów

$\mathsf{T}^*_q Q$:

$$S_q = \{a \in \mathsf{T}^*_q Q\colon \text{dla każdego} v \in C^1 \quad W(v) + \langle v, a\rangle \geqslant 0\}. \tag{154}$$

Opis dualny układu jest dany przez *zbiór stanowiący* S

$$S = \cup_{q \in C} S_q.$$

UWAGA. Ze względu na pewną tradycję jako zbiór stanowiący wybiera się $-S$, to znaczy zbiór sił spełniających nierówność

$$W(v) \geqslant \langle v, a\rangle \tag{155}$$

zamiast nierówności (154)

Przejście do opisu dualnego jest znaną z analizy wypukłej transformacją Legendre'a. W opisie dualnym kryterium równowagi układu wygląda tak

punkt q jest punktem równowagi układu (C^1, W), jeżeli $0 \in S_q$.

Dwa układy (C^1_1, W_1) i (C^1_2, W_2) są w równowadze w q jeżeli istnieją $a_1 \in S_1 \cap \mathsf{T}^*_q Q$, $a_2 \in S_2 \cap \mathsf{T}^*_q Q$, że $a_1 + a_2 = 0$.

Powstaje pytanie o wierność opisu dualnego: czy mając opis dualny potrafimy odtworzyć opis podstawowy? Inaczej mówiąc - czy odwrotna transformata Legendre'a daje powrót do układu wyjściowego. Układy, dla których tak jest nazwiemy *układami wypunkłymi*.

16.4. Przykłady.

PRZYKŁAD 4. Regularny układ statyczny $(C^1{}_1, \rho_1)$ jest zdefiniowany przez

$$C^1{}_1 = \mathsf{T}Q, \quad Q = \mathbb{R}^2 \tag{156}$$

i

$$\begin{aligned} W_1 &\colon \mathsf{T}Q \to \mathbb{R} \\ &\colon v \mapsto k(x(v)\delta x(v) + y(v)\delta y(v)). \end{aligned} \tag{157}$$

Potencjał (funkcja energii wewnętrznej) tego układu jet równa

$$\begin{aligned} U_1 &\colon Q \to \mathbb{R} \\ &\colon q \mapsto \frac{k}{2}(x(q)^2 + y(q)^2). \end{aligned} \tag{158}$$

Układ ma jedno położenie równowagi q określone warunkami $x(q) = 0$ i $y(q) = 0$. Zbiór stanowiący układu jest zbiorem

$$S_1 = \{a \in \mathsf{T}^*Q;\ f(a) = kx(a), g(a) = ky(a)\}. \tag{159}$$

PRZYKŁAD 5. Układ statyczny $(C^1{}_2, \rho_2)$ zdefiniowany przez

$$C^1{}_2 = \mathsf{T}Q, \quad Q = \mathbb{R}^2 \tag{160}$$

i

$$\begin{aligned} W_2 &\colon \mathsf{T}Q \to \mathbb{R} \\ &\colon v \mapsto r\sqrt{\delta x(v)^2 + \delta y(v)^2},\ r > 0 \end{aligned} \tag{161}$$

nie jest regularny. Funkcja pracy wirtualnej reprezentuje tarcie. Wszystkie punkty z Q są położeniami równowagi.

Zbiór stanowiący układu jest zbiorem

$$S_2 = \{a \in \mathsf{T}^*Q;\ f(a)^2 + g(a)^2 \leqslant r^2\}. \tag{162}$$

PRZYKŁAD 6. Układ statyczny $(C^1{}_3, \rho_3)$ zdefiniowany przez

$$C^1{}_3 = \{v \in \mathsf{T}Q;\ x(v)^2 + (y(v) - 1)^2 = R^2,\ x(v)\delta x(v) + (y(v) - 1)\delta y(v) = 0\} \tag{163}$$

i $W = 0$ ma więzy, gdyż

$$C_3 = \{q \in Q;\ x(q)^2 + (y(q) - 1)^2 = R^2\} \tag{164}$$

i $C^1{}_3 = \mathsf{T}C_3$. Wszystkie punkty w C_3 są położeniami równowagi. Zbiór stanowiący układu jest zbiorem

$$S_3 = \{a \in \mathsf{T}^*Q;\ x(a)^2 + (y(a) - 1)^2 = R^2, f(a)x(a) + g(a)y(a) = 0\}. \tag{165}$$

PRZYKŁAD 7. Układ statyczny $(C^1{}_4, \rho_4)$ określony przez

$$C^1{}_4 = \{v \in \mathsf{T}Q;\ y(v) \leq 0,\ \delta y(v) \leq 0\} \tag{166}$$

i

$$\begin{aligned} W_4 \colon & C^1{}_4 \to \mathbb{R} \\ \colon & v \mapsto G\delta y(v) \end{aligned} \tag{167}$$

ma więzy jednostronne. Układ nie ma położeń równowagi jeśli $G < 0$. Jeśli $G > 0$,to

$$\{q \in Q;\ y(q) = 0\} \tag{168}$$

jest zbiorem położeń równowagi. Zbiór stanowiący układu jest zbiorem

$$S_4 = \{a \in \mathsf{T}^*Q;\ y(a) \leq 0, g(a) = G\} \cup \{a \in \mathsf{T}^*Q;\ y(a) = 0, g(a) \geq G\}. \tag{169}$$

PRZYKŁAD 8. Funkcja

$$U_5(x, y, \vartheta) = \frac{k}{2}((x - a\cos\vartheta)^2 + (y - a\sin\vartheta)^2) \tag{170}$$

jest funkcją energii wewnętrznej układu dwóch punktów, z których jeden jest zmuszony do pozostawania na okręgu

$$x = a\cos\vartheta,\quad y = a\sin\vartheta, \tag{171}$$

a drugi jest przymocowany do pierwszego elastycznie. Jako rozmaitość konfiguracji przyjmiemy $Q = \mathbb{R}^2 \times S_a$, gdzie S_a jest okręgiem o środku w zerze i promieniu a. Jako współrzędne wybieramy współrzędne kartezjańskie (x, y) w $\mathbb{R}^2$ i współrzędną kątową zy na S_a.

Zbiór stanowiący układu jest zbiorem

$$S_5 \in \mathsf{T}^*Q\colon \begin{array}{l} f = k(x - a\cos\vartheta) \\ g = k(y - a\sin\vartheta) \\ h = ka(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta) \end{array}\quad . \tag{172}$$

PRZYKŁAD 9. Układ jak w poprzednim przykładzie z tym, że punkt na okręgu porusza się swobodnie (nie kontrolujemy jego poóżenia). Przestrzeń położeń punktu kontrolowanego jest $Q = \mathbb{R}^2$. Funkcja

$$U_6(x, y, \vartheta) = \frac{k}{2}((x - a\cos\vartheta)^2 + (y - a\sin\vartheta)^2) \tag{173}$$

jest funkcją energii wewnętrznej układu (nie jest więc jednoznacznie wyznaczona przez konfigurację). Funkcja U_6 jest rodziną Morse'a ze względu na rozwłóknienie

$$Q \times S_a \to Q,$$

gdyż rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 U_6}{\partial\vartheta\partial\vartheta} & \dfrac{\partial^2 U_6}{\partial\vartheta\partial x} & \dfrac{\partial^2 U_6}{\partial\vartheta\partial y} \end{pmatrix} = \left(ka(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta), \quad ka\sin\vartheta, \quad -ka\cos\vartheta \right) \tag{174}$$

jest równy 1. Z zasady prac wirtualnych pierwszego rzędu

$$f\delta x + g\delta y = \delta U(x,y,\vartheta) = k(x - a\cos\vartheta)\delta x + k(y-a)\sin\vartheta)\delta y + ka(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta)\delta\vartheta \tag{175}$$

dostajemy równania

$$\begin{aligned} f &= k(x - a\cos\vartheta) \\ g &= k(y - a\sin\vartheta) \\ 0 &= ka(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta) \end{aligned} \tag{176}$$

na zbiór stanowiący S_6. Równania

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta \\ y &= \rho\sin\vartheta \\ f &= k(\rho - a)\cos\vartheta \\ g &= k(\rho - a)\sin\vartheta \end{aligned} \tag{177}$$

reprezentują odwzorowanie σ z $\mathbb{R}^2$ do T^*Q. Zbiór S_6 jest obrazem tego odwzorowania, jest więc podrozmaitością włożoną. Za wyjątkiem punktu odpowiadającego $\rho = 0$ zbiór S_6 jest sumą obrazów dwóch cięć π_Q odpowiadających dwóm znakom we wzorach

$$\begin{aligned} f &= \frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2} \pm a\right) \\ g &= \frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2} \pm a\right). \end{aligned} \tag{178}$$

W kole $x^2 + y^2 \leq a^2$ zbiór S_6 jest zbiorem punktów spełniających równania

$$\begin{aligned} F_x^0(x,y,f,g) &= x - \frac{f}{k\sqrt{f^2+g^2}}\left(\sqrt{f^2+g^2} - ka\right) = 0 \\ F_y^0(x,y,f,g) &= y - \frac{g}{k\sqrt{f^2+g^2}}\left(\sqrt{f^2+g^2} - ka\right) = 0. \end{aligned} \tag{179}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje F_x^0 i F_y^0 mają pochodną rzędu maksymalnego (czyli 2), więc S_6 jest podrozmaitością zanurzoną (poza kołem jest to oczywiste). Rząd jakobianu

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\rho\sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{180}$$

odwzorowania $\pi_Q \circ \sigma$, w lokalnej reprezentacji

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta \\ y &= \rho\sin\vartheta \end{aligned} \tag{181}$$

zmienia się od 2 do 1 w $\rho = 0$. Wskazuje to na istnienie osobliwości rzutu z S_6 na konfiguracje nad punktem $(x,y) = (0,0)$.

Ostatnie przykłady pokazują, że rodziny Morse'a pojawiają się w naturalny sposób przy opisie układu z *częściową kontrolą*, tzn. gdy pewne stopnie swobody są „puszczone luzem".

16.5. Statyka strun i dynamika.

Dotychczas była mowa tylko o układach, dla których przestrzeń konfiguracji jest rozmaitością różniczkową wymiary skończonego. Sytuacja komplkuje się, gdy mamy do czynienia z układami, dla których kofiguracje są obiektami rozciągłymi. Na przykład struny, membrany. Przestrzeń konfiguracji nie jest rozmaitością różniczkową. Podobną sytuację mamy rozpatrując dynamikę punktu. Konfiguracjami są kawałki trajektorii punktu (w przestrzeni lub czasoprzestrzeni). Można je reprezentować krzywymi, czyli odwzorowaniami ze zbioru parametrów w przestrzeń położeniową (np. czasoprzestrzeń).

Abstrahując od konkretnej sytyacji fizycznej przyjmijmy, że konfiguracjami układu są odwzorowania z przedziału $[a, b]$ w rozmaitość Q. Tworzą one zbiór $\widehat{Q}$. Na tym zbiorze rozpatrujemy funkcje postaci

$$\widehat{Q} \ni \widehat{q} \mapsto \int_a^b L \circ \mathrm{t}^1\gamma(s)\mathrm{d}s, \tag{182}$$

gdzie L jest dowolną funkcją na $\mathsf{T}Q$. Z definicji uważać je będziemy za funkcje gładkie. Krzywymi gładkimi $\widehat{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \widehat{Q}$ są odworowania otrzymane wzorem

$$(\widehat{\gamma}(t))(s) = h(t, s), \tag{183}$$

gdzie h jest gładkim odwzorowaniem

$$h\colon \mathbb{R} \times [a, b] \to Q. \tag{184}$$

Wiązka styczna $\mathsf{T}\widehat{Q}$ składa się z wektorów stycznych, które są klasami równoważności krzywych. Łatwo się przekonać, że dobrym (wygodnym) reprezentantem takiego wektora jest krzywa $\widehat{v}$ w $\mathsf{T}Q$:

$$\begin{aligned} \widehat{v}\colon [a, b] &\to \mathsf{T}Q \\ \colon s &\mapsto \mathrm{t}^1 h(\cdot, s)(0). \end{aligned} \tag{185}$$

Zbiór takich krzywych oznaczamy $\widehat{\mathsf{T}Q}$. Mamy więc odwzorowanie

$$\kappa\colon \mathsf{T}\widehat{Q} \to \widehat{\mathsf{T}Q}. \tag{186}$$

Jak wygląda różniczka funkcji $\mathcal{L}$ (więc siła) zdefiniowanej wzorem (182). Jak się przekonamy, reprezentowana jest trójką (p_1, f, p_2), gdzie

$$f\colon [a, b] \to \mathsf{T}^*Q \quad f(t) \in \mathsf{T}^*_{\widehat{q}(t)}$$

$$p_1 \in \mathsf{T}^*_{\widehat{q}(a)}, \quad p_2 \in \mathsf{T}^*_{\widehat{q}(b)}.$$

Evaluacja między wektorami i kowektorami dana jest wzorem

$$\langle (p_1, f, p_2), \widehat{v}\rangle = \int_a^b \langle f(s), \widehat{v}(s)\rangle \mathrm{d}s + \langle p_1, \widehat{v}(b)\rangle - \langle p_1, \widehat{v}(a)\rangle. \tag{187}$$

Możemy tęż rozpatrywać, zamiast skończonego, infinitezymalny odcinek w przestrzeni parametrów reprezentowany wektorem $\dfrac{\partial}{\partial s}$. W tym przypadku analogiczna konstrukcja daje jako przestrzeń konfiguracji $\widehat{Q}_{\frac{\partial}{\partial t}} = \mathsf{T}Q$ itd.

Podsumowanie. Podejście wariacyjne można stosować do wszystkich układów, dla których możemy mówić o „koszcie procesu". Nie muszą to być układy potencjalne. Podejście wariacyjne należy stosować wraz z wszelkimi, wynikającym z niego konsekwencjami.

17. Dynamika infinitezymalna i transformacja Legendre'a.

17.1. Wiązka styczna do wiązki wektorowej. Niech $\tau\colon E \to M$ będzie wiązką wektorową. Rozmaitość styczna $\mathsf{T}E$ jest rozwłókniona na dwa sposoby:

kanoniczne rozwłóknienie $\tau_E\colon \mathsf{T}E \to E$,
rozwłóknienie styczne $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$,

i diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{T}E \arrow[dl, "\mathsf{T}\tau"'] \arrow[dr, "\tau_E"] & \\
\mathsf{T}M \arrow[dr, "\tau_M"'] & & E \arrow[dl, "\tau"] \\
 & M &
\end{tikzcd} \tag{188}$$

jest przemienny. Jak już wiemy, ze względu na na kanoniczne rozwłóknienie $\mathsf{T}E$ jest wiązką wektorową. Pokażemy, że również ze względu na drugie rozwłóknienie $\mathsf{T}E$ jest wiązką wektorową.

Mnożenie przez liczbę definiujemy tak:
Niech $a \in \mathbb{R}$ i $\mathsf{t}E \ni v = \mathsf{t}\gamma(0)$, tzn. krzywa $\gamma\colon \mathbb{R} \to E$ reprezentuje wektor v. Definiujemy krzywą $a\gamma$ wzorem

$$(a\gamma)(t) = a \cdot \gamma(t) \tag{189}$$

i wektor

$$a \bullet v = \mathsf{t}(a\gamma)(0). \tag{190}$$

Łatwo sprawdzić, że wynik nie zależy od reprezentanta wektora v.

Aby zdefiniować dodawanie wektorów zauważmy najpierw, że jeżeli wektory styczne $v, w \in \mathsf{T}E$ są takie, że $\mathsf{t}\tau v = \mathsf{t}\tau w$, to istnieją ich reprezentanty $\gamma_v, \gamma_w\colon \mathbb{R} \to E$ takie, że $\tau \circ \gamma_v = \tau \circ \gamma_w$. Reprezentantów takich łatwo wskazać używając lokalnego układu współrzędnych. Dla nich można zdefiniować dodawanie:

$$(\gamma_v + \gamma_w)(t) = \gamma_v(t) + \gamma_w(t), \tag{191}$$

gdzie dodawanie wykonywane jest we włóknie wiązki E. Kładziemy

$$v \dot{+} w = \mathsf{t}(\gamma_v + \gamma_w)(0). \tag{192}$$

Łatwo sprawdzić, że definicja ta jest poprawna, tzn. wynik nie zależy od wyboru reprezentantów. Na wprowadzone powyżej działania można spojrzeć inaczej:
mnożenie przez liczbę $a \in \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem

$$a\colon E \longrightarrow E, \tag{193}$$

a styczne do niego

$$\mathsf{T}a\colon \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{T}E \tag{194}$$

jest zdefiniowanym powyżej mnożeniem $\bullet$. Podobnie, dodawanie w wiązce E jest odwzorowaniem

$$+\colon E \times_M E \longrightarrow E, \tag{195}$$

a styczne do niego

$$\mathsf{T}+\colon \mathsf{T}E \times_{\mathsf{T}M} \mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{T}E \tag{196}$$

jest działaniem $\dot{+}$.

Że tak wprowadzone działania określają strukturę wązki wektorowej widać z ich reprezentacji w lokalnym układzie współrzędnych (metoda niezbyt elegancka, ale skuteczna).

Niech (x^κ) będą współrzędnymi na M, a (x^κ, y^a) adaptowanymi współrzędnymi na E. Odpowiednie współrzędne na $\mathsf{T}E$ oznaczamy $(x^\kappa, y^a, \dot{x}^\lambda, \dot{y}^b)$. W tym układzie współrzędnych działania $\cdot$, $+$, $\bullet$ i $\dot{+}$ określone są wzorami

$$\begin{aligned} x^\kappa(a\cdot v) &= x^\kappa(v) \\ y^a(a\cdot v) &= y^a(v) \\ \dot{x}^\lambda(a\cdot v) &= a\dot{x}^\lambda(v) \\ \dot{y}^b(a\cdot v) &= a\dot{y}^b(v), \end{aligned} \tag{197}$$

$$\begin{aligned} x^\kappa(a\bullet v) &= x^\kappa(v) \\ y^a(a\bullet v) &= ay^a(v) \\ \dot{x}^\lambda(a\bullet v) &= \dot{x}^\lambda(v) \\ \dot{y}^b(a\bullet v) &= a\dot{y}^b(v), \end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned} x^\kappa(v+w) &= x^\kappa(v) = x^\kappa(w) \\ y^a(v+w) &= y^a(v) = y^a(w) \\ \dot{x}^\lambda(v+w) &= \dot{x}^\lambda(v) + \dot{x}^\lambda(w) \\ \dot{y}^b(v+w) &= \dot{y}^b(v) + \dot{y}^b(w), \end{aligned} \tag{199}$$

$$\begin{aligned} x^\kappa(v\dot{+}w) &= x^\kappa(v) = x^\kappa(w) \\ y^a(v\dot{+}w) &= y^a(v) + y^a(w) \\ \dot{x}^\lambda(v\dot{+}w) &= \dot{x}^\lambda(v) = \dot{x}^\lambda(w) \\ \dot{y}^b(v\dot{+}w) &= \dot{y}^b(v) + \dot{y}^b(w). \end{aligned} \tag{200}$$

Rozmaitość $\mathsf{T}E$ posiada więc dwie różne struktury wiązki wektorowej ze względu na dwa różne rzutowania. Zauważmy, że strzałki w diagramie (188) są morfizmami wiązek wektorowych. Podobnie działania w jednej strukturze są morfizmami względem drugiej. Mówimy, że $\mathsf{T}M$ ma strukturę *podwójnej wiązki wektorowej*.

Dla każdej wiązki wektorowej $\tau\colon E \to M$ mamy dualną do niej wiązkę wektorową $\pi\colon E^* \to M$. Jej włókno E^*_q jest przestrzenią dualną (w sensie przestrzeni wektorowych) do włókna E_q wiązki E

$$E^*_q = (E_q)^*. \tag{201}$$

Jest to definicja abstrakcyjna. W praktyce często utożsamiamy wiązkę dualną z wiązką wprowadzoną innymi sposobami. Przykładem jest utożsamianie wiązki dualnej do wektorów stycznych z wiązką różniczek funkcji, a z drugiej strony, utożsamianie wiązki wektorów stycznych z wiązką różniczkowań. Utożsamienia takie wynikają z istnienia kanonicznej ewaluacji między odpowiednimi wiązkami.

Odszukamy teraz kandydata na reprezentanta wiązki dualnej do wiązki $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$.

Istnieje kanoniczna ewaluacja

$$\langle\,,\,\rangle\colon E^* \times_M E \longrightarrow \mathbb{R} \tag{202}$$

Niech teraz wektory styczne $v \in \mathsf{T}E$ i $w \in \mathsf{T}^*E$ będą takie, że $\mathsf{T}\tau(v) = \mathsf{T}\pi(w)$ i niech $\gamma_v\colon \mathbb{R} \to E$ oraz $\gamma_w\colon \mathbb{R} \to E^*$ będą takimi reprezentantami wektorów v i w, że $\tau\circ\gamma_v = \pi\circ\gamma_w$. Mamy funkcję

$$\mathbb{R} \ni t \to \langle\gamma_w(t), \gamma_v(t)\rangle \tag{203}$$

i jej pochodną w zerze

$$\langle w, v\rangle' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \gamma_w(\cdot), \gamma_v(\cdot)\rangle(0). \tag{204}$$

Pochodna ta jest funkcją na wiązce stycznej $\mathsf{T}(E^* \times_M E)$, którą kanoniczne utożsamiamy z wiązką $\mathsf{T}E^* \times_{\mathsf{T}M} \mathsf{T}E$. Z konstrukcji wynika, że ewaluacja styczna (z primem) jest różniczką ewaluacji kanonicznej. Różniczką interpretowaną jako funkcja na wiązce stycznej. W lokalnym układzie współrzędnych ((x^i, f_a) są współrzędnymi w E^*)

$$\langle \gamma_w(t), \gamma_v(t)\rangle = f_a(\gamma_w(t))y^a(\gamma_v(t)) \tag{205}$$

i stąd

$$\langle w, v\rangle' = f_a(w)\dot{y}^a(v) + \dot{f}_a(w)y^a(v). \tag{206}$$

Z tych wzorów widać, że funkcja $\langle w, v\rangle'$ jest biliniowa ze względy na styczne struktury wektorowe w $\mathsf{T}E$ i $\mathsf{T}E^*$ oraz niezdegenerowana. Wiązkę dualną do $\mathsf{T}\tau \colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$ możemy zatem utożsamić z wiązką $\mathsf{T}\pi \colon \mathsf{T}E^* \to \mathsf{T}M$.

17.2. Wiązka kostyczna do wiązki wektorowej. Podobnie jak $\mathsf{T}E$, rozmaitość T^*E ma dwie struktury wiązki wektorowej. Odnalezienie tej drugiej, obok kanonicznej, jest nieco bardziej skomplikowane. Oznaczmy przez C wykres operacji dodawania w E będący podrozmaitością w $E \times E \times E$:

$$C = \{E \times E \times E \ni (u, w, w) \colon w = u + v\}. \tag{207}$$

Podrozmaitość ta (dokładniej - funkcja zerowa na niej) generuje (patrz rozdział 14) podrozmaitość lagranżowską N w $\mathsf{T}^*(E \times E \times E)$. Podrozmaitość ta jest anihilatorem wiązki stycznej $\mathsf{T}C$. Utożsamimy teraz $\mathsf{T}^*(E \times E \times E)$ z $\mathsf{T}^*E \times \mathsf{T}^*E \times \mathsf{T}^*E$ w następujący sposób:
Niech $(a, b, c) \in \mathsf{T}^*E \times \mathsf{T}^*E \times \mathsf{T}^*E$ oraz $(u, v, w) \in \mathsf{T}E \times \mathsf{T}E \times \mathsf{T}E$, to

$$\langle (\alpha, \beta, \psi), (u, v, w)\rangle = \langle \alpha, u\rangle + \langle \beta, v\rangle - \langle \psi, w\rangle \tag{208}$$

(oczywiście dla takich trójek, dla których to ma sens, czyli $\pi_E(\alpha) = \tau_E(u)$, $\pi_E(\beta) = \tau_E(v)$ i $\pi_E(\psi) = \tau_E(w)$).

Pokażemy teraz, używając lokalnych współrzednych, że N określa strukturę wiązki wektorowej w T^*E. Niech $(x^\lambda, y^a, p_\kappa, \pi_b)$ będą współrzędnymi w T^*E. Trójka α, β, ψ należy do N wtedy i tylko wtedy, gdy $(\pi_E(\alpha), \pi_E(\beta), \pi_E(\psi)) \in C$ oraz

$$\langle \alpha, u\rangle + \langle \beta, v\rangle - \langle \psi, w\rangle \tag{209}$$

dla wszystkich $(u, v, w) \in \mathsf{T}C$ takich, że

$$(\pi_E(\alpha), \pi_E(\beta), \pi_E(\psi)) = (\tau_E(u), \tau_E(w), \tau_E(w)). \tag{210}$$

Ponieważ $\mathsf{T}C$ jest wykresem dodawania $\dot{+}$, to z wzorów (199), (200) mamy

$$\begin{aligned}
x^\kappa(\alpha) &= x^\kappa(\beta) = x^\kappa(\psi)\\
y^a(\psi) &= y^a(\alpha) + y^a(\beta)\\
\dot{x}^\lambda(u)p_\lambda(\psi) &= \dot{x}^\lambda(u)p_\lambda(\alpha) + \dot{x}^\lambda(u)p_\lambda(\beta)\\
(\dot{y}^b(u) + \dot{y}^b(v))\pi_b(\psi) &= \dot{y}^b(u)\pi_b(\alpha) + \dot{y}^b(v)\pi_b(\beta),
\end{aligned} \tag{211}$$

a ponieważ współrzędne $\dot{x}^\lambda(u), \dot{y}^b(u)$, i $\dot{y}^b(v)$ mogą przybierać dowolne wartości, dostajemy, że $(\alpha, \beta, \psi) \in N$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned}
x^\kappa(\alpha) &= x^\kappa(\beta) = x^\kappa(\psi)\\
y^a(\psi) &= y^a(\alpha) + y^a(\beta)\\
p_\lambda(\psi) &= p_\lambda(\alpha) + p_\lambda(\beta)\\
\pi_b(\psi) &= \pi_b(\alpha) = \pi_b(\beta).
\end{aligned} \tag{212}$$

Związki te definiują strukturę grupy abelowej we włóknach fibracji

$$\mathsf{T}^*\tau\colon \mathsf{T}^*E \to E^* \tag{213}$$

zdefiniowanej przez

$$\begin{aligned} x^\lambda(\mathsf{T}^*\tau(\alpha)) &= x^\lambda(\alpha), \\ f_a(\mathsf{T}^*\tau(\alpha)) &= \pi_a(\alpha). \end{aligned} \tag{214}$$

Kładziemy $\psi = \alpha \dot{+} \beta$. Mnożenie przez liczby jest jednoznacznie wyznaczone dodawaniem i jest określone wzorami

$$\begin{aligned} x^\kappa(a \bullet \alpha) &= x^\kappa(\alpha) \\ y^a(a \bullet \alpha) &= a y^a(\alpha) \\ p_\lambda(a \bullet \alpha) &= a p_\lambda(\alpha) \\ \pi_b(a \bullet \alpha) &= \pi_b(\alpha). \end{aligned} \tag{215}$$

Z tak określonymi działaniami rozwłóknienie $\mathsf{T}^*\tau$ jest wiązką wektorową.

Rozwłóknienie (213) łatwo zdefiniować bez użycia układu współrzędnych. Skorzystamy tu z odwzorowania (123)

$$\chi[\tau]\colon E_M E \to \mathsf{T}E$$

i dualnego do niego odwzorowania

$$\chi[\tau]^*\colon \mathsf{T}^*E \to E \times E^*.$$

Składając to odwzorowanie z kanonicznym rzutowaniem na E^* dostajemy rzut $\mathsf{T}^*\tau$, co łatwo sprawdzić w lokalnym układzie współrzędnych.

Również dodawanie można wprowadzić innym sposobem: niech $\alpha, \beta \in \mathsf{T}^*E$ będą takie, że $\mathsf{T}^*\tau(\alpha) = \mathsf{T}^*\tau(\beta) = f$. Niech $\varphi\colon M \to E$ będzie cięciem takim, że $\varphi(\pi(f)) = f$. Oznaczmy przez $\widetilde{\varphi}$ odpowiednią funkcję na E, liniową we włóknach. Oczywistym jest, że

$$\mathsf{T}^*(\mathrm{d}_e\widetilde{\varphi}) = \varphi(e) \tag{216}$$

i w konsekwencji, $\alpha - \mathrm{d}\widetilde{\varphi}$ oraz $\beta - \mathrm{d}\widetilde{\varphi}$ są kowektorami zerującymi się na wektorach pionowych. Odpowiadają im jednoznacznie kowektory $\overline{\alpha}$ i $\overline{\beta}$ z T^*M, zaczepione w tym samym punkcie $\pi(f)$. Kowektor $\psi \in \mathsf{T}^*E$ definiujemy jako jedyny kowektor zaczepiony w $\pi_E(\alpha) + \pi_E(\beta)$ taki, że $\mathsf{T}^*\tau(\psi) = f$ i $\psi - \mathrm{d}\widetilde{\varphi}$ definiuje kowektor $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

Możemy więc podsumować: struktura wiązki wektorowej w $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$ jest podniesieniem stycznym struktury wiązki $\tau\colon E \to M$, zaś struktura wiązki wektorowej w $\mathsf{T}^*\tau\colon \mathsf{T}^*E \to E^*$ jest jej podniesieniem kostycznym (fazowym).

17.3. Kanoniczny izomorfizm T^*E i T^*E^*. Kanoniczna ewaluacje

$$\langle\, ,\, \rangle\colon E^* \times_M E \longrightarrow \mathbb{R}$$

jest funkcją na podrozmaitości w $E^* \times E$, zatem generuje podrozmaitość lagranżowską L w $\mathsf{T}^*(E^* \times E)$. Rozmaitość $\mathsf{T}^*(E^*E)$ utożsamiamy z $\mathsf{T}^*E^* \times \mathsf{T}^*E$ w sposób następujący: jeżeli $\alpha \in \mathsf{T}^*E^*$, $\beta \in \mathsf{T}^*E$, $v \in \mathsf{T}E^*$ i $w \in \mathsf{T}E$, to

$$\langle(\alpha, \beta), (v, w)\rangle = -\langle\alpha, v\rangle + \langle\beta, w\rangle. \tag{217}$$

W tej identyfikacji podrozmaitość L wygląda następująco:

$$L = \{\mathsf{T}^*E^* \times \mathsf{T}^*E \ni (\alpha, \beta)\colon -\langle\alpha, v\rangle + \langle\beta, w\rangle = \langle v, w\rangle' \quad \text{dla } \mathsf{T}\pi(v) = \mathsf{T}\tau(w)\}, \tag{218}$$

przy czym korzystaliśmy z definicji (204) ewaluacji stycznej.

Niech $(x^\kappa, y^a, p_\lambda, \pi_b)$ będą współrzędnymi w T^*E, a $(x^\kappa, f_a, q_\lambda, \varphi^b)$ wspoółrzednymi w T^*E^*. W tych układach współrzędnych warunek (218) zapisuje się tak: para (α, β) należy do L wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\dot{x}^\kappa, \dot{y}^b, \dot{f}_a$ mamy

$$\begin{aligned} x^\kappa(\alpha) &= x^\kappa(\beta) \\ -q_\lambda(\alpha)\dot{x}^\lambda - \varphi^b(\alpha)\dot{f}_b + p_\lambda(\beta)\dot{x}^\lambda + \pi_b(\beta)\dot{y}^b &= f_a(\alpha)\dot{y}^a + \dot{f}_a y^a(\beta) \end{aligned} \tag{219}$$

lub równoważnie,

$$\begin{aligned} x^\kappa(\alpha) &= x^\kappa(\beta) \\ f_a(\alpha) &= \pi_a(\beta) \\ \varphi^b(\alpha) &= -y^b(\beta) \\ q_\lambda(\alpha) &= p_\lambda(\beta). \end{aligned} \tag{220}$$

Podrozmaitość L jest więc wykresem odwzorowania

$$\gamma_E \colon \mathsf{T}^*E^* \longrightarrow \mathsf{T}^*E \tag{221}$$

które jest liniowe ze względu na obie struktury wektorowe, tzn. nad E i E^*, przy czym rzut na odwzorowanie E^* w E^* jest identycznością, a na odwzorowanie z E w E minus identycznością. Łatwo też sprawdzić, że γ_E przeprowadza kanoniczną formę symplektyczną na T^*E w kanoniczną formę symplektyczną na T^*E^*; jest symplektomorfizmem.

17.4. Kanoniczny izomorfizm TT^* i $\mathsf{T}^*\mathsf{T}M$. Zajmijmy się teraz przypadkiem $E = \mathsf{T}M$. Z poprzedniego paragrafu wiemy, że istnieje kanoniczny izomorfizm (oznaczenie $\gamma_{\mathsf{T}M}$ zastąpiliśmy prostszym γ_M)

$$\gamma_M \colon \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}M. \tag{222}$$

Z drugiej strony, kanoniczna struktura symplektyczna daje kanoniczny izomorfizm

$$\beta_M \colon \mathsf{TT}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M, \tag{223}$$

więc składając oba te izomorfizmy dostajemy kanoniczny izomorfizm podwójnych wiązek wektorowych

$$\alpha_M \colon \mathsf{TT}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}M. \tag{224}$$

W lokalnym układzie współrzędnych wygląda on tak:

$$\begin{aligned} x^\lambda \circ \alpha_M &= x^\lambda \\ \dot{x}^\kappa \circ \alpha_M &= \dot{x}^\kappa \\ p_\lambda \circ \alpha_M &= p_\lambda \\ \varphi_\lambda \circ \alpha_M &= \dot{p}_\lambda, \end{aligned} \tag{225}$$

gdzie $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda, p_\mu, \varphi_\nu)$ są współrzędnymi w $\mathsf{T}^*\mathsf{T}M$.

Izomorfizm α_M można (i należy!) wprowadzić inaczej, nie odwołując się bezpośrednio do struktury symplektycznej wiązki kostycznej, ale bezpośrednio do struktury wiązki stycznej (skądinąd równoważnej strukturze symplektycznej wiązki kostycznej).

Wiązka podwójna $\mathsf{TT}M$. Rozmaitość $\mathsf{TT}M$ jako styczna do wiązki wektorowej ma dwie struktury wiązki wektorowej, obie nad $\mathsf{T}M$, z rzutowaniami $\tau_{\mathsf{T}M}$ oraz $\mathsf{T}\tau_M$. Wektor styczny jest klasą równoważności krzywych, więc element z $\mathsf{TT}M$ jet klasą równoważności krzywych w klasach równoważności krzywych na M. Jest to więc obiekt dość skomplikowany. Pokażemy, że można go reprezentować bezpośrednio odwzorowaniem z $\mathbb{R}^2$ w M.

Niech
$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M \tag{226}$$
i
$$\begin{aligned} h_t: \mathbb{R} &\to M \\ : s &\mapsto h(t,s). \end{aligned} \tag{227}$$
Krzywa h_t reprezentuje wektor $\mathrm{t}h_t(0)$, więc dostajemy krzywą
$$\begin{aligned} \widetilde{h}: \mathbb{R} &\to \mathsf{T}M \\ : t &\mapsto \mathrm{t}h_t(0) \end{aligned} \tag{228}$$
reprezentująca element z $\mathsf{TT}M$.

STWIERDZENIE 21. *Dwa odwzorowania $h, h': \mathbb{R}^2 \to M$ reprezentują ten sam element z $\mathsf{TT}M$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}(M)$*
$$\begin{aligned} f \circ h(0,0) &= f \circ h'(0,0) \\ \frac{\partial}{\partial s} f \circ h(0,0) &= \frac{\partial}{\partial s} f \circ h'(0,0) \\ \frac{\partial}{\partial t} f \circ h(0,0) &= \frac{\partial}{\partial t} f \circ h'(0,0) \\ \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f \circ h(0,0) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f \circ h'(0,0). \end{aligned} \tag{229}$$
DOWÓD: Z warunku pierwszego wynika, że $h(0,0) = h'(0,0)$. Niech (x^κ) będzie lokalnym układem współrzędnych na M w otoczeniu $h(0,0)$ i niech $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda, x'^\mu, \dot{x}'^\nu)$ będą adaptowanymi współrzędnymi w $\mathsf{TT}M$.

Oznaczmy odpowiednio w i w' elementy z $\mathsf{TT}M$ reprezentowane przez h i h'. Krzywa $s \mapsto h(t,s)$ reprezentuje wektor $\widetilde{h}(t)$, więc $x^\kappa(\widetilde{h}(t)) = x^\kappa \circ h(t,0)$ i $\dot{x}^\lambda(\widetilde{h}(t)) = \frac{\partial}{\partial s} f \circ h(0,0) \tau_{\mathsf{T}M}(w)$. Stąd
$$\begin{aligned} x^\kappa \circ h(0,0) &= x^\kappa(w) \\ \frac{\partial}{\partial s} x^\lambda \circ h(0,0) &= \dot{x}^\lambda(w) \\ \frac{\partial}{\partial t} x^\lambda \circ h(0,0) &= x'^\lambda(w) \\ \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} x^\lambda \circ h(0,0) &= \dot{x}'^\lambda(w). \end{aligned} \tag{230}$$
Jeżeli więc równości (229) zachodzą dla każdej funkcji, to również dla map lokalnych i z (230) wynika $w = w'$.

Z drugiej strony, równość $w = w'$ oznacza równość (229) dla funkcji lokalnej mapy. Stąd dla dowolnej funkcji f. ■

Mając odwzorowanie $h: \mathbb{R}^2 \to M$ definiujemy odwzorowanie
$$\begin{aligned} \kappa(h): &\to M \\ : (t,s) &\mapsto h(s,t). \end{aligned} \tag{231}$$
Ze Stwierdzenia 21 wynika, że przyporządkowanie $h \to \kappa(h)$ rzutuje się do diffeomorfizmu
$$\kappa_M: \mathsf{TT}M \to \mathsf{TT}M \tag{232}$$
i co więcej, κ_M jest izomorfizmem podwójnych wiązek wektorowych (wzory (230)). Izomorfizm ten przeprowadza kanoniczną strukturę wiązki wektorowej $\tau_{\mathsf{T}M}: \mathsf{TT}M \to \mathsf{T}M$ na strukturę styczną $\mathsf{T}\tau_M: \mathsf{TT}M \to \mathsf{T}M$ i na odwrót.

Konstrukcja α_M. Z powyższych faktów widać, że κ_M zadaje izomorfizm wiązek wektorowych

$$\kappa_M\colon \begin{array}{c} \mathsf{TT}M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \tau_{\mathsf{T}M}} \\ \mathsf{T}M \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathsf{TT}M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{T}\tau_M} \\ \mathsf{T}M \end{array} \tag{233}$$

oraz dualny izomorfizm

$$(\kappa_M)^*\colon \begin{array}{c} \mathsf{TT}^*M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{T}\pi_M} \\ \mathsf{T}M \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathsf{T}^*\mathsf{T}M \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{T}M}} \\ \mathsf{T}M \end{array} \tag{234}$$

Łatwo sprawdzić (np. w lokalnym układzie współrzędnych), że $(\kappa_M)^* = \alpha_M$.

17.5. Różniczkowanie d_T.

17.6. Dynamika infinitezymalna.

17.7. Transformacja Legendre'a.

17.8. Dynamika cząstki relatywistycznej.

18. Dynamika skończona. Równanie Eulera-Lagrange'a.

18.1. Różniczkowania. Niech $\Omega(M)$ będzie algebrą zewnętrzną form różniczkowych na rozmaitości M. Mówimy, że odwzorowanie liniowe $\mathrm{a}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ jest *różniczkowaniem* $\Omega(M)$ stopnia p jeśli $\mathrm{a}\mu$ jest formą stopnia $q+p$ i

$$\mathrm{a}(\mu \wedge \nu) = \mathrm{a}\mu \wedge \nu + (-1)^{pq}\mu \wedge \mathrm{a}\nu \tag{235}$$

gdzie μ jest formą stopnia q, a ν jest dowolną formą na M. Pochodna zewnętrzna $\mathrm{d}\colon \Omega(M) \to \Omega(M)$ jest Różniczkowaniem stopnia 1.*Komutator*

$$[\mathrm{a}, \mathrm{a}'] = \mathrm{a}\mathrm{a}' - (-1)^{pp'}\mathrm{a}'\mathrm{a} \tag{236}$$

różniczkowań a i a' stopnia odpowiednio p i p' jest różniczkowaniem stopnia $p+p'$. Mówimy, że różniczkowanie a jest *typu* i_*, jeśli $\mathrm{a}f = 0$ dla każdej funkcji f na M. Mówimy, że różniczkowanie a jest *typu* d_*, jeśli $[\mathrm{a}, \mathrm{d}] = 0$. Jeśli i_A jest różniczkowaniem typu i_*, to $\mathrm{d}_A = [\mathrm{i}_A, \mathrm{d}]$ jest różniczkowaniem typu d_*. Różniczkowania są odwzorowaniami lokalnymi: jeśli a jest różniczkowaniem, a μ jest formą na M znikającą na otwartym podzbiorze $U \subset M$, to $\mathrm{a}\mu$ znika na U. Różniczkowanie jest w pełni scharakteryzowane przez swoje działanie na funkcjach i różniczkach funkcji, ponieważ każdą formę można lokalnie przedstawić jako sumę iloczynów zewnętrznych różniczek funkcji mnożonych przez funkcje. Różniczkowanie typu d_* jest w pełni scharakteryzowane przez swoje działanie na funkcjach.

p-formąo wartościach wektorowych nazywamy odwzorowanie liniowe

$$A\colon \wedge^p\mathsf{T}M \to \mathsf{T}M. \tag{237}$$

Jeżeli $w \in \wedge^p\mathsf{T}_aM$, to $A(w) \in \mathsf{T}_aM$. Za Frölicherem and Nijenhuisem [FN] zwiążemy z p-formą o wartościach wektorowych A różniczkowanie i_A typu i_* i stopnia $p-1$ oraz różniczkowanie $\mathrm{d}_A = [\mathrm{i}_A, \mathrm{d}]$. Różniczkowanie i_A jest scharakteryzowane przez swoje działanie na jednoformach. Jeżeli μ jest jednoformą, to $\mathrm{i}_A\mu$ jest p-formą i

$$\langle \mathrm{i}_A\mu, w\rangle = \langle \mu, A(w)\rangle \tag{238}$$

dla każdego $w \in \wedge^p\mathsf{T}M$.

Dla $k = 1$ lub $k = 2$ I dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy odwzorowanie liniowe

$$F(k;n)\colon \mathsf{TT}^kM \to \mathsf{TT}^kM\colon \mathrm{t}^{1,k}\chi(0,0) \to \mathrm{t}^{1,k}\chi^n(0,0), \tag{239}$$

gdzie χ jest odwzorowaniem z $\mathbb{R}^2$ do M a

$$\chi^n \colon \mathbb{R}^2 \to M \colon (s,t) \mapsto \chi(st^n, t). \tag{240}$$

Łatwo pokazać, że:

$$F(k;0) = 1_{\mathsf{T}\mathsf{T}^k M}, \tag{241}$$

$$F(k;n') \circ F(k;n) = F(k;n'+n), \tag{242}$$

$$F(k;n) = 0 \quad \text{if } n \geqslant k \tag{243}$$

Wynika stąd, że $F(1;1)$, $F(2;1)$ i $F(2;2)$ są jedynymi nietrywialnymi przypadkami. Diagramy

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}\mathsf{T}^k M \arrow[r, "F(k;n)"] \arrow[d, "\tau_{\mathsf{T}^k M}"] & \mathsf{T}\mathsf{T}^k M \arrow[d, "\tau_{\mathsf{T}^k M}"] \\ \mathsf{T}^k M \arrow[r, equal] & \mathsf{T}^k M \end{tikzcd} \tag{244}$$

są przemienne, ponieważ $\chi^n(0,\cdot) = \chi(0,\cdot)$ a diagramy

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}\mathsf{T}^2 M \arrow[r, "F(2;n)"] \arrow[d, "\mathsf{T}\tau^1{}_{2M}"] & \mathsf{T}\mathsf{T}^2 M \arrow[d, "\mathsf{T}\tau^1{}_{2M}"] \\ \mathsf{T}\mathsf{T} M \arrow[r, "F(1;n)"'] & \mathsf{T}\mathsf{T} M \end{tikzcd} \tag{245}$$

są oczywiście przemienne. Odwzorowania $F(k;n)$ są jednoformami o wartościach wektorowych.

Stwierdzenie 22.

$$\langle \mathrm{d}f_{k;i}, F(k;n)(w)\rangle = \frac{i!}{(i-n)!}\langle \mathrm{d}f_{k;i-n}, w\rangle \tag{246}$$

jeżeli $i \geqslant n$ i

$$\langle \mathrm{d}f_{k;i}, F(k;n)(w)\rangle = 0 \tag{247}$$

jeżeli $i < n$.

Dowód: Dowód wynika z poniższego rachunku:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}f_{k;i}, F(k;n)(\mathsf{t}^{1,k}\chi(0,0))\rangle &= f_{1,k;1,i}(F(k;n)(\mathsf{t}^{1,k}\chi(0,0))) \\ &= \mathrm{D}^{(1,i)}(f\circ\chi^n)(0,0) \\ &= \frac{\partial^{i+1}}{\partial s \partial t^i}(f(\chi(st^n,t)))_{|s=0,t=0} \\ &= \frac{\partial^i}{\partial t^i}(t^n\frac{\partial}{\partial u}f(\chi(u,t)))_{|u=0,t=0} \\ &= \frac{i!}{(i-n)!}\frac{\partial^{i-n+1}}{\partial u \partial t^{i-n}}(f(\chi(u,t)))_{|u=0,t=0} \\ &= \frac{i!}{(i-n)!}\mathrm{D}^{(1,i-n)}(f\circ\chi)(0,0) \\ &= \frac{i!}{(i-n)!}\langle \mathrm{d}f_{k;i-n}, \mathsf{t}^{1,k}\chi(0,0)\rangle \end{aligned} \tag{248}$$

jeżeli $i \geqslant n$ i

$$\langle \mathrm{d}f_{k;i}, F(k;n)(\mathrm{t}^{1,k}\chi(0,0))\rangle = \frac{\partial^i}{\partial t^i}\left(t^n \frac{\partial}{\partial u} f(\chi(u,t))\right)_{|u=0,t=0} = 0 \tag{249}$$

jeżeli $i < n$. ■

Jedyne nietrywialne przypadki wzorów (246) i (247) to:

$$\langle \mathrm{d}f_{1;0}, F(1;1)(w)\rangle = 0, \tag{250}$$

$$\langle \mathrm{d}f_{1;1}, F(1;1)(w)\rangle = \langle \mathrm{d}f_{1;0}, w\rangle, \tag{251}$$

$$\langle \mathrm{d}f_{2;0}, F(2;1)(w)\rangle = 0, \tag{252}$$

$$\langle \mathrm{d}f_{2;1}, F(2;1)(w)\rangle = \langle \mathrm{d}f_{2;0}, w\rangle, \tag{253}$$

$$\langle \mathrm{d}f_{2;2}, F(2;1)(w)\rangle = 2\langle \mathrm{d}f_{2;1}, w\rangle, \tag{254}$$

$$\langle \mathrm{d}f_{2;0}, F(2;2)(w)\rangle = 0, \tag{255}$$

$$\langle \mathrm{d}f_{2;1}, F(2;2)(w)\rangle = 0, \tag{256}$$

$$\langle \mathrm{d}f_{2;2}, F(2;2)(w)\rangle = 2\langle \mathrm{d}f_{2;0}, w\rangle. \tag{257}$$

Ze wzorów (250) i (252) wynika, że jeśli $w \in \mathrm{im}(F(1;1))$, to $\langle \mathrm{d}f_{1;0}, w\rangle = 0$, a jeśli $w \in \mathrm{im}(F(2;1))$, to $\langle \mathrm{d}f_{2;0}, w\rangle = 0$ dla każdej funkcji f na M.

Stwierdzenie 23. *Jeśli $w \in \mathsf{TT}M$ i $\langle \mathrm{d}f_{1;0}, w\rangle = 0$ dla każdej funkcji f, to $w \in \mathrm{im}(F(1;1))$, a jeśli $w \in \mathsf{TT}^2M$ i $\langle \mathrm{d}f_{2;0}, w\rangle = 0$ dla każdej funkcji f, to $w \in \mathrm{im}(F(2;1))$.*

Dowód:

Niech $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda, \delta x^\mu, \delta\dot{x}^\nu)\colon \mathsf{TT}M \to \mathbb{R}^{4m}$ będzie układem współrzędnych na $\mathsf{TT}M$ otrzymanym z układu $(x^\kappa)\colon M \to \mathbb{R}^m$. Jeśli $w \in \mathsf{TT}M$ i $\langle \mathrm{d}f_{1;0}, w\rangle = 0$ dla każdej funkcji f, to $\delta x^\kappa(w) = \langle \mathrm{d}x^\kappa, w\rangle = 0$. Można wybrać reprezentanta χ wektora w tak, aby

$$(x^\kappa \circ \chi)(s,t) = x^\kappa(w) + \dot{x}^\kappa(w)t + \delta\dot{x}^\kappa(w)st. \tag{258}$$

Dla odwzorowania ζ

$$\zeta\colon \mathbb{R}^2 \to M\colon (s,t) \mapsto \lim_{u\to t} \chi(su^{-n}, u), \tag{259}$$

mamy $\chi = \zeta^1$ i $w = F(1;1)(\mathrm{t}^{1,1}\zeta(0,0))$.

Wprowadźmy w TT^2M układ współrzędnych $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda, \ddot{x}^\mu, \delta x^\nu, \delta\dot{x}^\omega, \delta\ddot{x}^\rho)$ otrzymany z układu $(x^\kappa)\colon M \to \mathbb{R}^m$. Jeżeli $w \in \mathsf{TT}^2M$ i $\langle \mathrm{d}f_{2;0}, w\rangle = 0$ dla każdej funkcji f, to $\delta x^\kappa(w) = 0$. Wybierzmy reprezentanta χ wektora w tak, aby

$$(x^\kappa \circ \chi)(s,t) = x^\kappa(w) + \dot{x}^\kappa(w)t + \frac{1}{2}\ddot{x}^\kappa(w)t^2 + \delta\dot{x}^\kappa(w)st + \frac{1}{2}\delta\ddot{x}^\kappa(w)st^2. \tag{260}$$

Jeśli ζ jest odwzorowaniem zdefiniowanym wzorem (259), to $\chi = \zeta^1$ i $w = F(2;1)(\mathrm{t}^{2,1}\zeta(0,0))$.

■

Stwierdzenie 24. $\mathrm{im}(F(1;1)) = \ker(F(1;1))$ *i* $\mathrm{im}(F(2;1)) = \ker(F(2;2))$.

Dowód: Z $F(1;1) \circ F(1;1) = F(1;2) = 0$ i $F(2;1) \circ F(2;2) = F(2;3) = 0$ otrzymujemy, że $\mathrm{im}(F(1;1)) \subset \ker(F(1;1))$ i $\mathrm{im}(F(2;1)) \subset \ker(F(2;2))$. Jeśli $F(1;1)(w) = 0$, to

$$\langle \mathrm{d}f_{1;0}, w\rangle = \langle \mathrm{d}f_{1;1}, F(1;1)(w)\rangle = 0. \tag{261}$$

Wynika stąd, że $w \in \mathrm{im}(F(1;1))$. Jeśli $F(2;2)(w) = 0$, to

$$\langle \mathrm{d}f_{2;0}, w\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}f_{2;2}, F(2;2)(w)\rangle = 0. \tag{262}$$

A zatem $w \in \mathrm{im}(F(2;1))$. ■

STWIERDZENIE 25. $\ker(\mathsf{T}\tau_M) = \ker(F(1;1))$ *i* $\ker(\mathsf{T}\tau_{2M}) = \ker(F(2;2))$

DOWÓD:

Wynika to bezpośrednio z równości

$$\langle \mathrm{d}f_{1;1}, F(1;1)(w)\rangle = \langle \mathrm{d}f_{1;0}, w\rangle = \langle \mathrm{d}f, \mathsf{T}\tau_M(w)\rangle \tag{263}$$

dla $w \in \mathsf{TT}M$ i

$$\langle \mathrm{d}f_{2;2}, F(2;2)(w)\rangle = 2\langle \mathrm{d}f_{2;0}, w\rangle = 2\langle \mathrm{d}f, \mathsf{T}\tau_{2M}(w)\rangle \tag{264}$$

dla $w \in \mathsf{TT}^2M$. ■

Z dwóch poprzednich twierdzeń wynika, że $\ker(\mathsf{T}\tau_M) = \mathrm{im}(F(1;1))$ i $\ker(\mathsf{T}\tau_{2M}) = \mathrm{im}(F(2;1))$.

Niech $\Omega_1(M)$ i $\Omega_2(M)$ oznaczają algebry zewnętrzne form różniczkowych na wiązkach stycznych $\mathsf{T}M$ i T^2M odpowiednio. Przez $\sigma_2{}^1{}_M$ oznaczać będziemy homomorfizm

$$\tau^1{}_{2M}{}^*\colon \Omega_1(M) \to \Omega_2(M). \tag{265}$$

Różniczkowania $\mathrm{i}_{F(k;n)}$ i $\mathrm{d}_{F(k;n)}$ są związane z jednoformą o wartościach wektorowych $F(k;n)$. Diagram

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1(M) & \xrightarrow[\mathrm{i}_{F(1;1)}]{} & \Omega_1(M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_2{}^1{}_M} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma_2{}^1{}_M} \\ \Omega_2(M) & \xrightarrow[\mathrm{i}_{F(2;1)}]{} & \Omega_2(M) \end{array} \tag{266}$$

jest przemienny.

Artykuł [12] proponuje uogólnienie teorii Frölichera and Nijenhuisa. Niech $\varphi\colon N \to M$ odwzorowaniem różniczkowalnym. Odwzorowanie $\varphi^*\colon \Phi(M) \to \Phi(N)$ jest homomorfizmem algebr zewnętrznych. *Różniczkowaniem stopnia p względem???* φ^* nazywamy odwzorowanie liniowe $\mathrm{a}\colon \Phi(M) \to \Phi(N)$ takie, że $\mathrm{a}\mu$ jest formą na N stopnia $q+p$ i

$$\mathrm{a}(\mu \wedge \nu) = \mathrm{a}\mu \wedge \varphi^*\nu + (-1)^{pq}\varphi^*\mu \wedge \mathrm{a}\nu \tag{267}$$

jeśli μ jest formą na M stopnia q a ν jest dowolną formą na M. Różniczkowanie algebry $\Phi(M)$ jest różniczkowaniem względem??? odwzorowania identycznościowego 1_M. Mówimy, że różniczkowanie a względem??? φ jest *typu* i_*, jeśli $\mathrm{a}f = 0$ dla każdej funkcji f na M. Mówimy, że różniczkowanie względne??? a stopnia p jest *typu* d_*, jeśli $\mathrm{ad} - (-1)^p\mathrm{da} = 0$. Jeżeli i_A jest różniczkowaniem typu i_* względem??? φ, to $\mathrm{d}_A = \mathrm{i}_A\mathrm{d} - (-1)^p\mathrm{d}\mathrm{i}_A$ jest różniczkowaniem typu d_* względem??? φ. Zauważmy, że wyrażenia $\mathrm{ad} - (-1)^p\mathrm{da}$ i $\mathrm{i}_A\mathrm{d} - (-1)^p\mathrm{d}\mathrm{i}_A$ nie są komutatorami, ponieważ każde z nich zawiera dwa różne różniczkowania zewnętrzne d. Jeśli a jest różniczkowaniem stopnia p względem φ^* a $\psi\colon O \to N$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym, to odwzorowanie $\psi^*\mathrm{a}\colon \Phi(M) \to \Phi(O)$ jest różniczkowaniem stopnia p względem??? $(\varphi \circ \psi)^*$, ponieważ

$$\begin{aligned} \psi^*\mathrm{a}(\mu \wedge \nu) &= \psi^*\mathrm{a}\mu \wedge \psi^*\varphi^*\nu + (-1)^{pq}\psi^*\varphi^*\mu \wedge \psi^*\mathrm{a}\nu \\ &= \psi^*\mathrm{a}\mu \wedge (\varphi\circ\psi)^*\nu + (-1)^{pq}(\varphi\circ\psi)^*\mu \wedge \psi^*\mathrm{a}\nu \end{aligned} \tag{268}$$

jeżeli μ jest formą na M stopnia q a ν jest dowolną formą na M. Jeżeli a jest różniczkowaniem typu i_* lub d_*, to $\psi^*\mathrm{a}$ jest różniczkowaniem tego samego typu. Różniczkowania względne??? są odwzorowaniami lokalnymi??? i są w pełni scharakteryzowane przez swoje działanie na funkcjach I różniczkach funkcji.

p-formą o wartościach wektorowych względem??? $\varphi\colon N \to M$ nazywamy odwzorowanie liniowe

$$A\colon \wedge^p\mathsf{T}N \to \mathsf{T}M \tag{269}$$

takie, że jeśli $w \in \wedge^p \mathsf{T}_b N$, to $A(w) \in \mathsf{T}_{\varphi(b)}M$. Z p-formą A o wartościach wektorowych względem??? φ zwiążemy różniczkowanie i_A względem??? φ^* typu i_* i stopnia $p-1$ oraz różniczkowanie względne $\mathrm{d}_A = \mathrm{i}_A\mathrm{d} - (-1)^p \mathrm{d}\mathrm{i}_A$. Jeżeli μ jest jednoformą na M, to $\mathrm{i}_A\mu$ jest p-formą na N i

$$\langle \mathrm{i}_A\mu, w\rangle = \langle \mu, A(w)\rangle \tag{270}$$

dla każdego $w \in \wedge^p \mathsf{T}N$.

Niech $T(0)\colon \mathsf{T}M \to \mathsf{T}M$ będzie odwzorowaniem identycznościowym interpretowanym jako deformacja rzutowania $\tau_M\colon \mathsf{T}M \to M$. Z $T(0)$ zwiążemy różniczkowania $\mathrm{i}_{T(0)}\colon \Omega(M) \to \Omega_1(M)$ i $\mathrm{d}_{T(0)}\colon \Omega(M) \to \Omega_1(M)$ względem??? $\sigma_M = \tau_M{}^*$. Różniczkowanie $\mathrm{i}_{T(0)}$ jest różniczkowaniem stopnia -1. Jeśli μ jest $(q+1)$-formą na M, to $\mathrm{i}_{T(0)}\mu$ jest q-formą na $\mathsf{T}M$ i jeśli $w_1, \ldots, w_q$ są elementami $\mathsf{T}\mathsf{T}M$ takimi, że $\tau_{\mathsf{T}M}(w_1) = \ldots = \tau_{\mathsf{T}M}(w_q)$, to

$$\langle \mathrm{i}_{T(0)}\mu, w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle = \langle \mu, \tau_{\mathsf{T}M}(w_1) \wedge \mathsf{T}\tau_M(w_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{T}\tau_M(w_q)\rangle. \tag{271}$$

Niech $X\colon M \to \mathsf{T}M$ będzie polem wektorowym. Operator $X^*\mathrm{i}_{T(0)}$ jest różniczkowaniem $\Omega(M)$ typu i_* i stopnia -1. Dla każdej jednoformy μ na M mamy

$$X^*\mathrm{i}_{T(0)}\mu = \mathrm{i}_{T(0)}\mu \circ X = \langle \mu, T(0) \circ X\rangle = \langle \mu, X\rangle = \mathrm{i}_X\mu. \tag{272}$$

Zatem $X^*\mathrm{i}_{T(0)} = \mathrm{i}_X$. Równość $X^*\mathrm{d}_{T(0)} = \mathrm{d}_X$ otrzymujemy w następujący sposób:

$$X^*\mathrm{d}_{T(0)} = X^*(\mathrm{i}_{T(0)}\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{i}_{T(0)}) = X^*\mathrm{i}_{T(0)}\mathrm{d} + \mathrm{d}X^*\mathrm{i}_{T(0)} = \mathrm{i}_X\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{i}_X = \mathrm{d}_X. \tag{273}$$

Niech f będzie funkcją na M. Dla każdego wektora $v = \dot{\xi}(0) = \mathsf{t}\xi(0) \in \mathsf{T}M$ mamy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{T(0)}f(v) &= \mathrm{i}_{T(0)}\mathrm{d}f(v) \\ &= \langle \mathrm{d}f, T(0)(v)\rangle \\ &= \langle \mathrm{d}f, v\rangle \\ &= \mathrm{D}(f \circ \xi)(0). \end{aligned} \tag{274}$$

Dostajemy stąd, że $\mathrm{i}_{T(0)}\mathrm{d}f = f_{1;1}$, $\mathrm{d}_{T(0)}f = f_{1;1}$ i $\mathrm{d}_{T(0)}\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_{1;1}$.

Dla każdego wektora $w \in \mathsf{T}\mathsf{T}M$ istnieje odwzorowanie $\delta\xi\colon \mathbb{R} \to \mathsf{T}M$ takie, że $w = \kappa^{1,1}(\mathsf{t}\delta\xi(0))$. Niech $w_1, \ldots, w_q$ będą elementami $\mathsf{T}\mathsf{T}M$ takimi, że

$$\tau_{\mathsf{T}M}(w_1) = \ldots = \tau_{\mathsf{T}M}(w_q) \tag{275}$$

i niech

$$\delta\xi_1\colon \mathbb{R} \to \mathsf{T}M, \ldots, \delta\xi_q\colon \mathbb{R} \to \mathsf{T}M \tag{276}$$

będą odwzorowaniami takimi, że

$$w_1 = \kappa^{1,1}(\mathsf{t}\delta\xi_1(0)), \ldots, w_q = \kappa^{1,1}(\mathsf{t}\delta\xi_q(0)). \tag{277}$$

Będziemy żądali, aby odwzorowania te spełniały warunki

$$\tau_M \circ \delta\xi_1 = \cdots = \tau_M \circ \delta\xi_q. \tag{278}$$

Poniższa kostrukcja pokazuje istnienie takich odwzorowań. Niech $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda)\colon \mathsf{T}M \to \mathbb{R}^{2m}$ będzie układem współrzędnych na $\mathsf{T}M$ a $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda, \delta x^\mu, \delta\dot{x}^\nu)\colon \mathsf{T}\mathsf{T}M \to \mathbb{R}^{4m}$ układem współrzędnych na $\mathsf{T}\mathsf{T}M$ otrzymanym z układu $(x^\kappa)\colon M \to \mathbb{R}^m$. Odwzorowania $\delta\xi_1, \ldots, \delta\xi_q$ określone przez

$$\begin{gathered} (x^\kappa, \dot{x}^\lambda)(\delta\xi_1(t)) = (x^\kappa(w_1) + t\dot{x}^\kappa(w_1), \delta x^\lambda(w_1) + t\delta\dot{x}^\lambda(w_1)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x^\kappa, \dot{x}^\lambda)(\delta\xi_q(t)) = (x^\kappa(w_q) + t\dot{x}^\kappa(w_q), \delta x^\lambda(w_q) + t\delta\dot{x}^\lambda(w_1)) \end{gathered} \tag{279}$$

dla t bliskich $0 \in \mathbb{R}$ mają żądaną własność, ponieważ $x^\kappa(w_1) = \ldots = x^\kappa(w_q)$ i $\dot{x}^\kappa(w_1) = \ldots = \dot{x}^\kappa(w_q)$. Przez ξ będziemy oznaczać odwzorowanie $\tau_M \circ \delta\xi_1 = \ldots = \tau_M \circ \delta\xi_q$. Poniższe twierdzenie zostało sformułowane przy pomocy odwzorowań ξ i $\delta\xi_1, \ldots, \delta\xi_q$.

STWIERDZENIE 26. *Jeśli μ jest q-formą na M i $q > 0$, to $\mathrm{d}_{T(0)}\mu$ jest q-formą na $\mathsf{T}M$ i*

$$\langle \mathrm{d}_{T(0)}\mu, w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle = \mathrm{D}\langle \mu, \delta\xi_1 \wedge \ldots \wedge \delta\xi_q\rangle(0) \tag{280}$$

gdzie $w_1, \ldots, w_q$ są wektorami z $\mathsf{TT}M$ takimi, że $\tau_{\mathsf{T}M}(w_1) = \ldots = \tau_{\mathsf{T}M}(w_q)$.

DOWÓD:

Zdefiniujmy operator $\mathrm{a}\colon \Omega(M) \to \Omega_1(M)$ stopnia 0 przez

$$\mathrm{a}f = \mathrm{d}_{T(0)}f \tag{281}$$

dla każdej funkcji f na M i

$$\langle \mathrm{a}\mu, w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle = \mathrm{D}\langle \mu, \delta\xi_1 \wedge \ldots \wedge \delta\xi_q\rangle(0), \tag{282}$$

jeśli $q > 0$, μ jest q-formą na M, a $w_1, \ldots, w_q$ są elementami $\mathsf{TT}M$ takimi, że $\tau_{\mathsf{T}M}(w_1) = \ldots = \tau_{\mathsf{T}M}(w_q)$.

Pokażemy, że a jest różniczkowaniem względem??? σ_M. Jeśli f_1 i f_2 są funkcjami na M, to

$$\mathrm{a}(fg) = \mathrm{d}_{T(0)}(fg \circ \tau_M) = \mathrm{d}_{T(0)}fg \circ \tau_M + f \circ \tau_M \mathrm{d}_{T(0)}g = \mathrm{a}fg \circ \tau_M + f \circ \tau_M \mathrm{a}g. \tag{283}$$

Jeśli f jest funkcją na M a μ jest q-formą na M z $q > 0$, to

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{a}(f\mu), w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle &= \mathrm{D}\langle f\mu, \delta\xi_1 \wedge \ldots \wedge \delta\xi_q\rangle(0)\\
&= \mathrm{D}((f\circ\xi)\langle \mu, \delta\xi_1 \wedge \ldots \wedge \delta\xi_q\rangle)(0)\\
&= \langle \mathrm{d}f, \mathrm{t}\xi(0)\rangle\langle \mu, \mathsf{T}\tau_M(w_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{T}\tau_M(w_q)\rangle\\
&\qquad\qquad + f(\xi(0))\mathrm{D}\langle \mu, \delta\xi_1 \wedge \ldots \wedge \delta\xi_q\rangle(0)\\
&= \mathrm{a}f(\mathrm{t}\xi(0))\langle \sigma_M\mu, w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle + \sigma_M f(\mathrm{t}\xi(0))\langle \mathrm{a}\mu, w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle\\
&= \langle \mathrm{a}f\sigma_M\mu + \sigma_M f \mathrm{a}\mu, w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle.
\end{aligned} \tag{284}$$

Jeśli μ_1 i μ_2 są formami na M stopni $q_1 > 0$ i $q_2 > 0$ odpowiednio oraz $q = q_1 + q_2$, to

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{a}(\mu_1\wedge\mu_2), w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle = \mathrm{D}\langle \mu_1 \wedge \mu_2, \delta\xi_1 \wedge \ldots \wedge \delta\xi_q\rangle(0)\\
&\quad= \frac{1}{q_1!q_2!}\sum_{\sigma\in S_q} \mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{D}\left(\left\langle \mu_1, \delta\xi_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \delta\xi_{\sigma(q_1)}\right\rangle \left\langle \mu_2, \delta\xi_{\sigma(q_1+1)} \wedge \ldots \wedge \delta\xi_{\sigma(q)}\right\rangle\right)(0)\\
&\quad= \frac{1}{q_1!q_2!}\sum_{\sigma\in S_q} \mathrm{sign}(\sigma)\left(\mathrm{D}\left\langle \mu_1, \delta\xi_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \delta\xi_{\sigma(q_1)}\right\rangle(0) \left\langle \mu_2, \delta\xi_{\sigma(q_1+1)} \wedge \ldots \wedge \delta\xi_{\sigma(q)}\right\rangle(0)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \mathrm{D}\left\langle \mu_1, \delta\xi_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \delta\xi_{\sigma(q_1)}\right\rangle(0) \left\langle \mu_2, \delta\xi_{\sigma(q_1+1)} \wedge \ldots \wedge \delta\xi_{\sigma(q)}\right\rangle(0)\right)\\
&\quad= \frac{1}{q_1!q_2!}\sum_{\sigma\in S_q} \mathrm{sign}(\sigma)\left(\left\langle \mathrm{a}\mu_1, w_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge w_{\sigma(q_1)}\right\rangle \left\langle \mu_2, \mathsf{T}\tau_M(w_{\sigma(q_1+1)}) \wedge \ldots \wedge \mathsf{T}\tau_M(w_{\sigma(q)})\right\rangle\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left\langle \mu_1, \mathsf{T}\tau_M(w_{\sigma(1)}) \wedge \ldots \wedge \mathsf{T}\tau_M(w_{\sigma(q_1)})\right\rangle \left\langle \mathrm{a}\mu_2, w_{\sigma(q_1+1)} \wedge \ldots \wedge w_{\sigma(q)}\right\rangle\right)\\
&\quad= \frac{1}{q_1!q_2!}\sum_{\sigma\in S_q} \mathrm{sign}(\sigma)\left(\left\langle \mathrm{a}\mu_1, w_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge w_{\sigma(q_1)}\right\rangle \left\langle \sigma_M\mu_2, w_{\sigma(q_1+1)} \wedge \ldots \wedge w_{\sigma(q)}\right\rangle\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left\langle \sigma_M\mu_1, w_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge w_{\sigma(q_1)}\right\rangle \left\langle \mathrm{a}\mu_2, w_{\sigma(q_1+1)} \wedge \ldots \wedge w_{\sigma(q)}\right\rangle\right)\\
&\quad= \langle \mathrm{a}\mu_1 \wedge \sigma_M\mu_2 + \sigma_M\mu_1 \wedge \mathrm{a}\mu_2, w_1 \wedge \ldots \wedge w_q\rangle.
\end{aligned} \tag{285}$$ ∎

To kończy dowód tego, że a jest różniczkowaniem względem σ_M.

Niech w będzie elementem $\mathsf{TT}M$. Powiążemy odwzorowanie

$$\delta\xi\colon \mathbb{R} \to \mathsf{T}M\colon t \mapsto \mathrm{t}\chi(\cdot,t)(0) \tag{286}$$

z reprezentantem $\chi\colon \mathbb{R}^2 \to M$ wektora w. Jeśli f jest funkcją na M, to

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{a}f, w\rangle &= \mathrm{D}\langle \mathrm{d}f, \delta\xi\rangle(0)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathrm{d}f, \delta\xi(t)\rangle_{|t=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathrm{d}f, \mathrm{t}\chi(\cdot,t)(0)\rangle_{|t=0}\\ &= \mathrm{D}^{(1,1)}(f\circ\chi)(0,0)\\ &= f_{1,1;1,1}(\mathrm{t}^{1,1}\chi(0,0))\\ &= \langle \mathrm{d}f_{1;1}, \mathrm{t}^{1,1}\chi(0,0)\rangle\\ &= \langle \mathrm{d}_{T(0)}\mathrm{d}f, w\rangle.\end{aligned} \tag{287}$$

Równość $\mathrm{a}\mathrm{d}f = \mathrm{d}_{T(0)}\mathrm{d}f$ razem z $\mathrm{d}_{T(0)}f = \mathrm{a}f$ dla każdej funkcji f implikują równość $\mathrm{d}_{T(0)} = \mathrm{a}$. ■

Odwzorowanie

$$T(1)\colon \mathsf{T}^2M \to \mathsf{TT}M\colon \mathrm{t}^2\xi(0) \mapsto \mathrm{tt}\xi(0) \tag{288}$$

jest 0-formą o wartościach wektorowych względem $\tau^1{}_2M$. Z $T(1)$ zwiążemy różniczkowania $\mathrm{i}_{T(1)}\colon \Omega_1(M) \to \Omega_2(M)$ i $\mathrm{d}_{T(1)}\colon \Omega_1(M) \to \Omega_2(M)$ względem $\sigma_2{}^1{}_M$. Różniczkowania $\mathrm{i}_{T(1)}$ i $\mathrm{d}_{T(1)}$ mają właściwości analogiczne do różniczkowań $\mathrm{i}_{T(0)}$ i $\mathrm{d}_{T(0)}$. Jeśli μ jest $(q+1)$-formą na $\mathsf{T}M$, to $\mathrm{i}_{T(1)}\mu$ jest q-formą na T^2M i jeśli $w_1,\ldots,w_q$ są elementami TT^2M takimi, że $\tau_{\mathsf{T}^2M}(w_1) = \ldots = \tau_{\mathsf{T}^2M}(w_q)$, to

$$\langle \mathrm{i}_{T(1)}\mu, w_1\wedge\ldots\wedge w_q\rangle = \langle \mu, \tau_{\mathsf{T}^2M}(w_1)\wedge \mathsf{T}\tau^1{}_{2M}(w_1)\wedge\ldots\wedge \mathsf{T}\tau^1{}_{2M}(w_q)\rangle. \tag{289}$$

Niech F będzie funkcją na $\mathsf{T}M$. Dla każdego elementu $a = \mathrm{t}^2\xi(0) \in \mathsf{T}^2M$ mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{T(1)}F(a) &= \mathrm{i}_{T(1)}\mathrm{d}F(a)\\ &= \langle \mathrm{d}F, T(1)(\mathrm{t}^2\xi(0))\rangle\\ &= \langle \mathrm{d}F, \mathrm{tt}\xi(0)\rangle\\ &= \mathrm{D}(F\circ \mathrm{t}\xi)(0).\end{aligned} \tag{290}$$

Jeśli $w_1,\ldots,w_q$ są elementami TT^2M takimi, że

$$\tau_{\mathsf{T}^2M}(w_1) = \ldots = \tau_{\mathsf{T}^2M}(w_q), \tag{291}$$

to możemy wybrać odwzorowania

$$\delta\xi_1\colon \mathbb{R} \to \mathsf{T}M, \ldots, \delta\xi_q\colon \mathbb{R} \to \mathsf{T}M \tag{292}$$

tak, aby

$$w_1 = \kappa^{2,1}(\mathrm{t}^2\delta\xi_1(0)), \ldots, w_q = \kappa^{2,1}(\mathrm{t}^2\delta\xi_q(0)) \tag{293}$$

i

$$\tau_M\circ\delta\xi_1 = \cdots = \tau_M\circ\delta\xi_q. \tag{294}$$

Niech $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda)\colon \mathsf{T}M \to \mathbb{R}^{2m}$ będzie układem współrzędnych na $\mathsf{T}M$ a $(x^\kappa, \dot{x}^\lambda, \ddot{x}^\mu, \delta x^\nu, \delta\dot{x}^\omega, \delta\ddot{x}^\pi)\colon \mathsf{TT}^2M \to$ $\mathbb{R}^{6m}$ układem współrzędnych na TT^2M otrzymanym z układu $(x^\kappa)\colon M \to \mathbb{R}^m$. Odwzorowania $\delta\xi_1, \dots, \delta\xi_q$ takie, że

$$
\begin{gathered}
(x^\kappa, \dot{x}^\lambda)(\delta\xi_1(t)) = \left(x^\kappa(w_1) + t\dot{x}^\kappa(w_1) + \frac{t^2}{2}\ddot{x}^\kappa(w_1), \delta x^\lambda(w_1) + t\delta\dot{x}^\lambda(w_1) + \frac{t^2}{2}\delta\ddot{x}^\lambda(w_1)\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(x^\kappa, \dot{x}^\lambda)(\delta\xi_q(t)) = \left(x^\kappa(w_q) + t\dot{x}^\kappa(w_q) + \frac{t^2}{2}\ddot{x}^\kappa(w_q), \delta x^\lambda(w_q) + t\delta\dot{x}^\lambda(w_q) + \frac{t^2}{2}\delta\ddot{x}^\lambda(w_q)\right)
\end{gathered}
\tag{295}
$$

dla t bliskich $0 \in \mathbb{R}$ mają żądane własności, ponieważ $x^\kappa(w_1) = \dots = x^\kappa(w_q)$, $\dot{x}^\kappa(w_1) = \dots = \dot{x}^\kappa(w_q)$ i $\ddot{x}^\kappa(w_1) = \dots = \ddot{x}^\kappa(w_q)$. Wprowadźmy odwzorowania

$$
\delta\dot{\xi}_1 = \kappa^{1,1} \circ \mathrm{t}\delta\xi_q, \dots, \delta\dot{\xi}_q = \kappa^{1,1} \circ \mathrm{t}\delta\xi_q. \tag{296}
$$

Poniższe stwierdzenie zostało sformułowane przy pomocy tych odwzorowań.

Stwierdzenie 27. *Jeśli $q > 0$ i μ jest q-formą na $\mathsf{T}M$, to $\mathrm{d}_{T(1)}\mu$ jest q-forma na T^2M i*

$$
\langle \mathrm{d}_{T(1)}\mu, w_1 \wedge \dots \wedge w_q \rangle = \mathrm{D}\langle \mu, \delta\dot{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \delta\dot{\xi}_q \rangle(0) \tag{297}
$$

gdzie $w_1, \dots, w_q$ są wektorami z TT^2M takimi, że $\tau_{\mathsf{T}^2M}(w_1) = \dots = \tau_{\mathsf{T}^2M}(w_q)$.

Dowód: Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 26. Operator $\mathrm{a}\colon \Omega_1(M) \to \Omega_2(M)$ stopnia 0 jest zdefiniowany przez

$$
\mathrm{a}g = \mathrm{d}_{T(1)}g \tag{298}
$$

dla każdej funkcji g na $\mathsf{T}M$ i

$$
\langle \mathrm{a}\mu, w_1 \wedge \dots \wedge w_q \rangle = \mathrm{D}\langle \mu, \delta\dot{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \delta\dot{\xi}_q \rangle(0), \tag{299}
$$

jeśli $q > 0$, μ jest q-formą na $\mathsf{T}M$, a $w_1, \dots, w_q$ są elementami TT^2M takimi, że $\tau_{\mathsf{T}M}(w_1) = \dots = \tau_{\mathsf{T}M}(w_q)$. Dowód tego, że a jest różniczkowaniem względem ${\sigma_2}^1{}_M$ można przeprowadzić wykonując rachunki analogiczne jak w dowodzi twierdzenia 26.

Z reprezentantem $\chi\colon \mathbb{R}^2 \to M$ wektora $w = \mathrm{t}^{1,2}\chi(0,0)$ z TT^2M zwiążemy odwzorowanie

$$
\delta\dot{\xi}\colon \mathbb{R} \to \mathsf{TT}M\colon t \mapsto \mathrm{t}^{1,1}\chi(\cdot, t). \tag{300}
$$

Jeśli f jest funkcją na M, to

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{a}\mathrm{d}f_{1;0}, w \rangle &= \mathrm{D}\langle \mathrm{d}f_{1;0}, \delta\dot{\xi} \rangle(0) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathrm{d}f_{1;0}, \delta\xi(t) \rangle_{|t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathrm{d}f_{1;0}, \mathrm{t}^{1,1}\chi(\cdot, t)(0) \rangle_{|t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f_{1,1;1,0}, \mathrm{t}^{1,1}\chi(\cdot, t)(0) \rangle_{|t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{D}^{(1,0)}(f \circ \chi)(0, t)\right)_{|t=0} \\
&= \mathrm{D}^{(1,1)}(f \circ \chi)(0,0) \\
&= f_{1,2;1,1}(\mathrm{t}^{1,2}\chi(0,0)) \\
&= f_{1,2;1,1}(w)) \\
&= \langle \mathrm{d}f_{2;1}, w \rangle \\
&= \langle \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{d}f_{1;0}, w \rangle
\end{aligned}
\tag{301}
$$

i

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{a}\mathrm{d}f_{1;1}, w\rangle &= \mathrm{D}\langle \mathrm{d}f_{1;1}, \delta\dot{\xi}\rangle(0) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathrm{d}f_{1;1}, \delta\dot{\xi}(t)\rangle_{|t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathrm{d}f_{1;1}, \mathsf{t}^{1,1}\chi(\cdot,t)(0)\rangle_{|t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f_{1,1;1,1}, \mathsf{t}^{1,1}\chi(\cdot,t)(0)\rangle_{|t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{D}^{(1,1)}(f\circ\chi)(0,t)\right)_{|t=0} \\
&= \mathrm{D}^{(1,2)}(f\circ\chi)(0,0) \\
&= f_{1,2;1,2}(\mathsf{t}^{1,2}\chi(0,0)) \\
&= f_{1,2;1,2}(w)) \\
&= \langle \mathrm{d}f_{2;2}, w\rangle \\
&= \langle \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{d}f_{1;1}, w\rangle.
\end{aligned} \tag{302}$$

Równości $\mathrm{d}_{T(1)}f_{1;0} = \mathrm{a}f_{1;0}$, $\mathrm{d}_{T(1)}f_{1;1} = \mathrm{a}f_{1;1}$, $\mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{d}f_{1;0} = \mathrm{a}\mathrm{d}f_{1;0}$ i $\mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{d}f_{1;1} = \mathrm{a}\mathrm{d}f_{1;1}$ dla każdej funkcji f implikują równość $\mathrm{d}_{T(1)} = \mathrm{a}$. ■

STWIERDZENIE 28. *Zachodzi następująca równość*

$$\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)} = {\sigma_2}^1{}_M \mathrm{i}_{F(1;0)}. \tag{303}$$

DOWÓD: Pokażemy, że operator $\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}$ jest różniczkowaniem typu i_* i stopnia 0 względem ${\sigma_2}^1{}_M$. Dla każdej funkcji g na $\mathsf{T}M$ mamy

$$(\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)})g = 0. \tag{304}$$

Dla każdych 2-form μ i ν na $\mathsf{T}M$ mamy

$$\begin{aligned}
(\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)})(\mu\wedge\nu) &= \mathrm{i}_{F(2;1)}(\mathrm{d}_{T(1)}\mu\wedge{\sigma_2}^1{}_M\nu + {\sigma_2}^1{}_M\mu\wedge\mathrm{d}_{T(1)}\nu) \\
&\quad - \mathrm{d}_{T(1)}(\mathrm{i}_{F(1;1)}\mu\wedge\nu + \mu\wedge\mathrm{i}_{F(1;1)}\nu) \\
&= \mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)}\mu\wedge{\sigma_2}^1{}_M\nu + \mathrm{d}_{T(1)}\mu\wedge\mathrm{i}_{F(2;1)}{\sigma_2}^1{}_M\nu \\
&\quad + \mathrm{i}_{F(2;1)}{\sigma_2}^1{}_M\mu\wedge\mathrm{d}_{T(1)}\nu + {\sigma_2}^1{}_M\mu\wedge\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)}\nu \\
&\quad - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}\mu\wedge{\sigma_2}^1{}_M\nu - {\sigma_2}^1{}_M\mathrm{i}_{F(1;1)}\mu\wedge\mathrm{d}_{T(1)}\nu \\
&\quad - \mathrm{d}_{T(1)}\mu\wedge{\sigma_2}^1{}_M\mathrm{i}_{F(1;1)}\nu - {\sigma_2}^1{}_M\mu\wedge\mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}\nu \\
&= \mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)}\mu\wedge{\sigma_2}^1{}_M\nu + {\sigma_2}^1{}_M\mu\wedge\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)}\nu \\
&\quad - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}\mu\wedge{\sigma_2}^1{}_M\nu - {\sigma_2}^1{}_M\mu\wedge\mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}\nu \\
&= (\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)})\mu\wedge{\sigma_2}^1{}_M\nu \\
&\quad + {\sigma_2}^1{}_M\mu\wedge(\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)})\nu.
\end{aligned} \tag{305}$$

To dowodzi, że rozważany operator jest różniczkowaniem odpowiedniego typu. Równości

$$(\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)})\mathrm{d}f_{1;0} = \mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}f_{2;1} = \mathrm{d}f_{2;0} = {\sigma_2}^1{}_M\mathrm{i}_{F(1;0)}\mathrm{d}f_{1;0} \tag{306}$$

i

$$\begin{aligned}
(\mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}_{T(1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)})\mathrm{d}f_{1;1} &= \mathrm{i}_{F(2;1)}\mathrm{d}f_{2;2} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{d}f_{1;0} \\
&= 2\mathrm{d}f_{2;1} - \mathrm{d}f_{2;1} \\
&= {\sigma_2}^1{}_M\mathrm{i}_{F(1;0)}\mathrm{d}f_{1;1}
\end{aligned} \tag{307}$$

kończą dowód. ∎

18.2. Różniczka Lagrange'a.

Zdefiniujmy operator liniowy $\boldsymbol{E}\colon \boldsymbol{\Omega_1}(\boldsymbol{M}) \to \boldsymbol{\Omega_2}(\boldsymbol{M})$ wzorem

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\sigma_2}^{\boldsymbol{1}}{}_{\boldsymbol{M}} - \mathrm{d}_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{1})}\mathrm{i}_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{1};\boldsymbol{1})}. \tag{308}$$

STWIERDZENIE 29. *Dla każdej jednoformy μ na $\mathsf{T}M$ jednoforma $\boldsymbol{E\mu}$ na T^2M jest pionowa względem rzutowania $\tau_{2M}\colon \mathsf{T}^2M \to M$.*

DOWÓD: Pionowość oznacza, że $\langle \boldsymbol{E\mu}, \boldsymbol{w}\rangle = \mathbf{o}$ dla każdego $w \in \ker(\mathsf{T}\tau_{2M})$. Wynika ona z faktu, że $\mathrm{i}_{F(2;1)}\boldsymbol{E\mu} = \mathbf{o}$, ponieważ $\ker(\mathsf{T}\tau_{2M}) = \mathrm{im}(F(2;1))$ i $\langle \mathrm{i}_{F(2;1)}\boldsymbol{E\mu}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{E\mu}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{2};\boldsymbol{1})(\boldsymbol{v})\rangle$.∎
Równość

$$\begin{aligned}\mathrm{i}_{F(2;1)}\boldsymbol{E\mu} &= \mathrm{i}_{F(2;1)}(\sigma_2{}^1{}_M - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)})\mu \\ &= (\sigma_2{}^1{}_M\mathrm{i}_{F(1;1)} - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}\mathrm{i}_{F(1;1)} - \sigma_2{}^1{}_M\mathrm{i}_{F(1;1)})\mu = 0\end{aligned} \tag{309}$$

wynika z $\mathrm{i}_{F(1;1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}\mu = \mathrm{i}_{F(1;2)}\mu = 0$. Użyliśmy tutaj wzorów (242) i (303) oraz faktu, że diagram (266) jest przemienny. ∎

Operator $\boldsymbol{P} = \mathrm{i}_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{1};\boldsymbol{1})}\colon \boldsymbol{\Omega_1} \to \boldsymbol{\Omega_1}$ pojawia się w rozkładzie $\sigma_2{}^1{}_M = \boldsymbol{E} + \mathrm{d}_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{1})}\boldsymbol{P}$ używanym w rachunku wariacyjnym. Rozkład $\sigma_2{}^1{}_M\mu = \boldsymbol{E\mu} + \mathrm{d}_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{1})}\boldsymbol{P\mu}$ dla jednoformy μ na $\mathsf{T}M$ jest zwykle otrzymywany w lokalnym układzie współrzędnych przez całkowanie przez części. Dla każdej jednoformy μ na $\mathsf{T}M$ jednoforma $\boldsymbol{P\mu}$ jest pionowa względem rzutowania $\tau_M\colon \mathsf{T}M \to M$. Własność ta wynika z $\mathrm{i}_{F(1;1)}\boldsymbol{P\mu} = \mathrm{i}_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{1};\boldsymbol{1})}\mathrm{i}_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{1};\boldsymbol{1})}\boldsymbol{\mu} = \mathrm{i}_{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{1};\boldsymbol{2})}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{o}$.

Niech L będzie funkcją na $\mathsf{T}M$. Pionowość formy $\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ pozwala skonstruować odwzorowanie $\mathcal{E}L\colon \mathsf{T}^2M \to \mathsf{T}^*M$ takie, że $\pi_M \circ \mathcal{E}L = \tau_{2M}$. Odwzorowanie to jest wyznaczone przez $\langle \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{L}, \boldsymbol{w}\rangle = -\langle \mathcal{E}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\tau}_{\mathsf{T}^2\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{w})), \mathsf{T}\boldsymbol{\tau_{2M}}(\boldsymbol{w})\rangle$ dla każdego $w \in \mathsf{T}\mathsf{T}^2M$. Fakt, że forma $\boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ jest pionowa oznacza, że istnieje odwzorowanie $\mathcal{P}L\colon \mathsf{T}M \to \mathsf{T}^*M$ takie, że $\pi_M \circ \mathcal{P}L = \tau_M$. Odwzorowanie to jest wyznaczone przez $\langle \boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{L}, \boldsymbol{w}\rangle = \langle \mathcal{P}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\tau}_{\mathsf{T}\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{w})), \mathsf{T}\boldsymbol{\tau_M}(\boldsymbol{w})\rangle$ dla każdego $w \in \mathsf{T}\mathsf{T}M$.

Równanie $\mathcal{E}L \circ \mathsf{t}^2\gamma = 0$ jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu na krzywą $\gamma\colon I \to M$ znanym jako *równanie Eulera-Lagrange'a* otrzymane z *lagranżianu* $L\colon \mathsf{T}M \to \mathbb{R}$. Odwzorowanie $\mathcal{P}L$ jest nazywane *odwzorowaniem Legendre'a.*

18.3. Dynamika układów autonomicznych.

Ruchy i wariacje. Niech M będzie *przestrzenią konfiguracyjną* niezależnego??? układu mechanicznego. *Konfiguracja* jest punktem $x \in M$, a *ruch* układu jest różniczkowalna krzywą $\xi\colon I \to M$ zdefiniowaną na otwartym podzbiorze $I \subset \mathbb{R}$. Pierwsza i druga prolongacja ruchu ξ oznaczane przez $\dot{\xi}$ i $\ddot{\xi}$ reprezentują *prędkość* i *przyspieszenie* wzdłuż ruchu.

Infinitezymalna wariacja ruchu $\xi\colon I \to M$ jest różniczkowalnym odwzorowaniem $\delta\xi\colon I \to \mathsf{T}M$ takim, że $\tau_M \circ \delta\xi = \xi$. Odwzorowania $\delta\dot{\xi} = \kappa^{1,1}{}_M \circ \mathsf{t}\delta\xi$ i $\delta\ddot{\xi} = \kappa^{2,1}{}_M \circ \mathsf{t}^2\delta\xi$ są infinitezymalnymi warjacjami prędkości $\dot{\xi}$ i przyspieszenia $\ddot{\xi}$. Spełnione są następujące równości: $\tau_M \circ \delta\xi = \xi$, $\tau_{\mathsf{T}M} \circ \delta\dot{\xi} = \dot{\xi}$ i $\tau_{\mathsf{T}^2M} \circ \delta\ddot{\xi} = \ddot{\xi}$. Równania

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\tau_M \circ \delta\dot{\xi} &= \mathsf{T}\tau_M \circ \kappa_M \circ \mathsf{t}\delta\xi \\ &= \tau_{\mathsf{T}M} \circ \mathsf{t}\delta\xi \\ &= \delta\xi\end{aligned} \tag{310}$$

i

$$\begin{aligned}\mathsf{T}\tau^1{}_{2M} \circ \delta\ddot{\xi} &= \mathsf{T}\tau^1{}_{2M} \circ \kappa^{2,1}{}_M \circ \mathsf{t}^2\delta\xi \\ &= \kappa_M \circ \tau^1{}_{2\mathsf{T}M} \circ \mathsf{t}^2\delta\xi \\ &= \kappa_M \circ \mathsf{t}\delta\xi \\ &= \delta\dot{\xi}\end{aligned} \tag{311}$$

wynikają z przemienności diagramu ??? z $k' = k = 1$ i $k'' = 0$ oraz tego samego diagramu z $k = 1$, $k' = 2$ i $k'' = 1$.

Trajektorie w przestrzeni sił i pędów. Iloczyn włóknisty

$$\mathsf{T}^*M \underset{(\pi_M,\pi_M)}{\times} \mathsf{T}^*M \tag{312}$$

jest *przestrzenią fazową siły i pędu???* Ph układu. Para $(f,p) \in Ph$ składa się z *zewnętrznej siły* f i *pędu* p w $x = \pi_M(f) = \pi_M(p)$. *Trajektoria siły i pędu???* niezależnego??? układu jest krzywą

$$(\zeta,\eta)\colon I \to Ph. \tag{313}$$

Te dwie krzywe $\zeta\colon I \to \mathsf{T}^*M$ i $\eta\colon I \to \mathsf{T}^*M$ reprezentują zewnętrzną siłę i pęd wzdłuż ruchu $\xi = \pi_M \circ \zeta = \pi_M \circ \eta$.

Zasada wariacyjna dla dynamiki. Niech $L\colon \mathsf{T}M \to \mathbb{R}$ będzie lagranżianem układu mechanicznego. *Działanie* jest funkcją A, która wiąże całkę

$$A(\xi,[a,b]) = \int_a^b L \circ \dot{\xi} \tag{314}$$

z ruchem $\xi\colon I \to M$ i przedziałem $[a,b] \subset I$. *Wariacja* działania jest całką

$$\delta A(\xi,[a,b]) = \int_a^b \langle \mathrm{d}L, \delta\dot{\xi}\rangle \tag{315}$$

związaną z infinitezymalną wariacją $\delta\xi\colon I \to \mathsf{T}M$.

Dynamiką nazywamy zbiór $\mathcal{D}$ trajektorii siły i pędu??? spełniający następującą regułę wariacyjną. Trajektoria $(\zeta,\eta)\colon I \to Ph$ należy do $\mathcal{D}$, jeśli

$$\delta A(\xi,[a,b]) = -\int_a^b \langle \zeta, \delta\xi\rangle + \langle \eta(b), \delta\xi(b)\rangle - \langle \eta(a), \delta\xi(a)\rangle \tag{316}$$

dla każdego $[a,b] \subset I$ i każdej wariacji $\delta\xi$ takiej, że $\tau_M \circ \delta\xi = \pi_M \circ \zeta = \pi_M \circ \eta$.

Wariacja działania może być przedstawiona w równoważnej postaci:

$$\begin{aligned}
\delta A(\xi,[a,b]) &= \int_a^b \langle \mathrm{d}L, \delta\dot{\xi}\rangle \\
&= \int_a^b \langle \mathrm{d}L, \mathsf{T}\tau^1{}_{2M} \circ \delta\ddot{\xi}\rangle \\
&= \int_a^b \langle \sigma_2{}^1{}_M \mathrm{d}L, \delta\ddot{\xi}\rangle \\
&= \int_a^b \langle \sigma_2{}^1{}_M \mathrm{d}L - \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}\mathrm{d}L, \delta\ddot{\xi}\rangle + \int_a^b \langle \mathrm{d}_{T(1)}\mathrm{i}_{F(1;1)}\mathrm{d}L, \delta\ddot{\xi}\rangle \\
&= -\int_a^b \langle \mathcal{E}L \circ \ddot{\xi}, \delta\xi\rangle + \int_a^b \mathrm{D}\langle \mathcal{P}L \circ \dot{\xi}, \delta\xi\rangle \\
&= -\int_a^b \langle \mathcal{E}L \circ \ddot{\xi}, \delta\xi\rangle + \langle (\mathcal{P}L \circ \dot{\xi})(b), \delta\xi(b)\rangle - \langle (\mathcal{P}L \circ \dot{\xi})(a), \delta\xi(a)\rangle.
\end{aligned} \tag{317}$$

Używając wariacji $\delta\xi$ z $\delta\xi(a) = 0$ i $\delta\xi(b) = 0$ otrzymujemy z zasady wariacyjnej równania Eulera-Lagrangea:

$$\mathcal{E}L \circ \ddot{\xi} = \zeta \tag{318}$$

w $[a,b]$. Mamy też

$$(\mathcal{P}L \circ \dot{\xi})(a) = \eta(a) \tag{319}$$

i

$$(\mathcal{P}L \circ \dot{\xi})(b) = \eta(b). \tag{320}$$

Te równania są spełnione dla każdego przedziału $[a, b] \subset I$. Wynika z tego, że trajektoria siły i pędu??? (ζ, η) należy do $\mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, kiedy równania

$$\mathcal{E}L \circ \ddot{\xi} = \zeta \tag{321}$$

i

$$\mathcal{P}L \circ \dot{\xi} = \eta \tag{322}$$

są spełnione w I.

Zbiory

$$E = \left\{ (f, a) \in \mathsf{T}^* M \underset{(\pi_M, \tau_{2M})}{\times} \mathsf{T}^2 M;\ f = \mathcal{E}L(a) \right\} \tag{323}$$

i

$$P = \left\{ (p, v) \in \mathsf{T}^* M \underset{(\pi_M, \tau_M)}{\times} \mathsf{T} M;\ p = \mathcal{P}L(v) \right\} \tag{324}$$

są wykresami równań odpowiednio: Eulera-Lagrangea i Legendrea. Dynamika może być sformułowana w terminach tych zbiorów, traktowanych jako równania różniczkowe. Równanie (321) oznacza, że krzywa (ζ, ξ) jest rozwiązaniem równania różniczkowego E, natomiast (322) oznacza, że krzywa (η, ξ) jest rozwiązaniem równania różniczkowego P. Równość $\xi = \pi_M \circ \zeta = \pi_M \circ \eta$ jest zawsze spełniona. Samo równanie Eulera-Lagrangea nie charakteryzuje w pełni dynamiki. Równanie (322) mogłoby być nazwane związkiem prędkości i pędu???. Jest ono niezbędnym składnikiem dynamiki. Zbiór

$$E_0 = \left\{ a \in \mathsf{T}^2 M;\ 0 = \mathcal{E}L(a) \right\} \tag{325}$$

jest wersją równań Eulera-Lagrangea bez sił zewnętrznych. Rozwiązania są ruchami układu z zerowymi siłami zewnętrznymi.

Lagranżowskie sformułowanie dynamiki.. Wersja zasady wariacyjnej dana równaniem

$$\int_a^b \langle \mathrm{d}L, \delta\dot{\xi} \rangle = -\int_a^b \langle \zeta, \delta\xi \rangle + \int_a^b \mathrm{D}\langle \eta, \delta\xi \rangle \tag{326}$$

dobrze nadaje się do otrzymania granicy infinitezymalnej. Otrzymuje się ją przez podzielenie obu stron równości przez $b - a$ i przejście do granicy $b = a = t \in I$. Otrzymana równość

$$\langle \mathrm{d}L, \delta\dot{\xi} \rangle = -\langle \zeta, \delta\xi \rangle + \mathrm{D}\langle \eta, \delta\xi \rangle, \tag{327}$$

spełniona przez trajektorię siły i pędu $(\zeta, \eta)\colon I \to Ph$ dla każdej wariacji $\delta\xi\colon I \to \mathsf{TT}M$ takiej, że $\tau_M \circ \delta\xi = \pi_M \circ \zeta$, jest opisem dynamiki $\mathcal{D}$ równoważnym oryginalnej zasadzie wariacyjnej. Równość

$$\langle \zeta, \delta\xi \rangle = \langle \mu_{\pi_M} \circ (\eta, \zeta), O_{\tau_{\mathsf{T}M}} \circ \delta\xi \rangle^{\mathsf{T}} \tag{328}$$

otrzymać można ze wzoru , a równość

$$\mathrm{D}\langle \eta, \delta\xi \rangle = \langle \mathrm{t}\eta, \mathrm{t}\delta\xi \rangle^{\mathsf{T}} = \langle \dot{\eta}, \kappa_M \circ \delta\dot{\xi} \rangle^{\mathsf{T}} \tag{329}$$

jest wersją wzoru . Łącząc te dwie równości otrzymujemy wzór

$$-\langle \zeta, \delta\xi \rangle + \mathrm{D}\langle \eta, \delta\xi \rangle = -\langle \mu_{\pi_M} \circ (\eta, \zeta), O_{\tau_{\mathsf{T}M}} \circ \delta\xi \rangle^{\mathsf{T}} + \langle \dot{\eta}, \kappa_M \circ \delta\dot{\xi} \rangle^{\mathsf{T}}. \tag{330}$$

Relacje

$$\tau_{\mathsf{T}^* M} \circ \mu_{\pi_M} \circ (\eta, \zeta) = \tau_{\mathsf{T}^* M} \circ \dot{\eta} = \eta \tag{331}$$

i

$$\tau_{\mathsf{T}M} \circ O_{\tau_{\mathsf{T}M}} \circ \delta\xi = \tau_{\mathsf{T}M} \circ \kappa_M \circ \delta\dot{\xi} \tag{332}$$

pozwalają na użycie wzoru . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} -\langle \zeta, \delta\xi\rangle + \mathrm{D}\langle \eta, \delta\xi\rangle &= \langle \dot{\eta} - \mu_{\pi_M} \circ (\eta, \zeta), \kappa_M \circ \delta\dot{\xi}\rangle^{\mathsf{T}} \\ &= \langle \psi_M \circ (\zeta, \dot{\eta}), \kappa_M \circ \delta\dot{\xi}\rangle^{\mathsf{T}} \\ &= \langle \alpha_M \circ \psi_M \circ (\zeta, \dot{\eta}), \delta\dot{\xi}\rangle. \end{aligned} \tag{333}$$

Otrzymaliśmy opis dynamiki $\mathcal{D}$ w języku równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\psi_M \circ (\zeta, \dot{\eta}) = {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \dot{\xi} \tag{334}$$

z $\xi = \pi_M \circ \zeta = \pi_M \circ \eta$. Przeciwdziedziną $(\zeta, \dot{\eta})$ jest iloczyn włóknisty $\mathsf{T}^*M \underset{(\pi_M, \pi_M \circ \tau_{\mathsf{T}^*M})}{\times} \mathsf{TT}^*M$.

Wychodząc od tożsamości

$$\int_a^b \langle \mathrm{d}L, \delta\dot{\xi}\rangle = -\int_a^b \langle \mathcal{E}L \circ \ddot{\xi}, \delta\xi\rangle + \int_a^b \mathrm{D}\langle \mathcal{P}L \circ \dot{\xi}, \delta\xi\rangle \tag{335}$$

zamiast od równania (327) i powtarzając kroki, które prowadziły do otrzymania (334) z (327), z η i ζ zamienionymi odpowiednio przez $\mathcal{P}L \circ \dot{\xi}$ i $\mathcal{E}L \circ \ddot{\xi}$, otrzymujemy tożsamość

$$\psi_M \circ (\mathcal{E}L \circ \ddot{\xi}, \mathsf{t}(\mathcal{P}L \circ \dot{\xi})) = {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \dot{\xi}. \tag{336}$$

Wynika z niej użyteczna identyfikacja odwzorowania Legendrea:

$$\mathcal{P}L = \tau_{\mathsf{T}^*M} \circ {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L. \tag{337}$$

Równanie (334) oznacza, że krzywa (ζ, η) spełnia równanie różniczkowe

$$D = \left\{ (f, w) \in \mathsf{T}^*M \underset{(\pi_M, \pi_M \circ \tau_{\mathsf{T}^*M})}{\times} \mathsf{TT}^*M;\ \psi_M(f, w) \in D_0 \right\}, \tag{338}$$

gdzie

$$D_0 = \left\{ w \in \mathsf{TT}^*M;\ \alpha_M(w) = \mathrm{d}L(\tau_{\mathsf{T}^*M}(w)) \right\}. \tag{339}$$

Zbiór D_0 jest wersją równania Lagrangea bez sił zewnętrznych. Obaraz różniczki $\mathrm{d}L\colon \mathsf{T}M \to \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$ jest podrozmaitością lagranżowską $(\mathsf{T}^*\mathsf{T}M, \omega_{\mathsf{T}M})$. Oznacza to, że $D_0 = {\alpha_M}^{-1}(\mathrm{im}(\mathrm{d}L)) = \mathrm{im}({\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L)$ jest podrozmaitością lagranżowską $(\mathsf{TT}^*M, \mathrm{d}_T\omega_M)$, a lagranżian jest jej funkcją generującą względem lagranżowskiej??? specjalnej struktury symplektycznej

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{TT}^*M, \mathrm{d}_T\vartheta_M) \arrow[d, "\mathsf{T}\pi_M"] \\ \mathsf{T}M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{TT}^*M \arrow[r, "\alpha_M"'] \arrow[d, "\mathsf{T}\pi_M"] & \mathsf{T}^*\mathsf{T}M \arrow[d, "\pi_{\mathsf{T}M}"] \\ \mathsf{T}M \arrow[r, equal] & \mathsf{T}M \end{tikzcd} \tag{340}$$

rozmaitości symplektycznej $(\mathsf{TT}^*M, \mathrm{d}_T\omega_M)$.

Hamiltonowskie sformułowanie dynamiki.

Mówimy, że lagranżian jest *hiperregularny*, jeśli odwzorowanie Legendrea $\mathcal{P}L = \tau_{\mathsf{T}^*M} \circ {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L$ jest dyfeomorfizmem. Przez Λ oznaczać będziemy odwrotność odwzorowania Legendrea dla hiperregularnego lagranżianu.

Zbiór D_0 dla hiperregularnego lagranżianu jest obrazem $\mathrm{im}(Z)$ odwzorowania $Z = {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda$. To odwzorowanie jest polem wektorowym na T^*M, mamy bowiem $\tau_{\mathsf{T}^*M} \circ Z = \tau_{\mathsf{T}^*M} \circ {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda = 1_{\mathsf{T}^*M}$. Zdefiniujmy funkcję $H \colon \mathsf{T}^*M \to \mathbb{R}$ przez $H(p) = \langle p, \Lambda(p) \rangle - L(\Lambda(p))$. Pokażemy, że funkcja $-H$ jest funkcją generującą D_0 względem hamiltonowskiej specjalnej struktury symplektycznej

$$\begin{tikzcd} (\mathsf{TT}^*M, \mathrm{i}_T\omega_M) \arrow[d, "\tau_{\mathsf{T}^*M}"] \\ \mathsf{T}^*M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{TT}^*M \arrow[r, "\beta_{(\mathsf{T}^*M,\omega_M)}"] \arrow[d, "\tau_{\mathsf{T}^*M}"] & \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M \arrow[d, "\pi_{\mathsf{T}^*M}"] \\ \mathsf{T}^*M \arrow[r, equal] & \mathsf{T}^*M \end{tikzcd} \tag{341}$$

rozmaitości $(\mathsf{TT}^*M, \mathrm{d}_T\omega_M)$. Funkcją generującą D_0 względem hamiltonowskiej specjalnej struktury symplektycznej jest funkcja

$$(L \circ \mathsf{T}\pi_M + G_M) \circ Z, \tag{342}$$

gdzie $G_M = -\mathrm{i}_T\vartheta_M$. Z

$$\mathsf{T}\pi_M \circ Z = \mathsf{T}\pi_M \circ {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda = \pi_{\mathsf{T}M} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda = \Lambda \tag{343}$$

i

$$\begin{aligned} -G_M(Z(p)) &= \mathrm{i}_T\vartheta_M(({\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda)(p)) \\ &= \langle \vartheta_M, ({\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda)(p) \rangle \\ &= \langle (\tau_{\mathsf{T}^*M} \circ {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda)(p), (\mathsf{T}\pi_M \circ {\alpha_M}^{-1} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda)(p) \rangle \\ &= \langle p, (\pi_{\mathsf{T}M} \circ \mathrm{d}L \circ \Lambda)(p) \rangle \\ &= \langle p, \Lambda(p) \rangle \end{aligned} \tag{344}$$

wynika, że

$$(L \circ \mathsf{T}\pi_M + G_M) \circ Z = -H. \tag{345}$$

Pole Z jest hamiltonowskim polem wektorowym, a funkcja H jest hamiltonianem dla tego pola, mamy bowiem

$$\mathrm{i}_Z\omega_M = Z^*\mathrm{i}_T\omega_M = -\mathrm{d}H. \tag{346}$$

Wzór

$$Z = -\beta^{-1}_{(\mathsf{T}^*M,\omega_M)} \circ \mathrm{d}H \tag{347}$$

jest wyrażeniem (równoważnym względem poprzedniego) pola Z za pomocą hamiltonianu. Trajektoria siły i pędu??? (ζ, η) należy do $\mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\dot{\eta}(t) = Z(\eta(t)) + \mu_{\pi_M}(\zeta(t), \eta(t)) \tag{348}$$

dla każdego $t \in I$.

Poissonowskie sformułowanie dynamiki.

Zdefiniujmy *tensor Poissona* $W_M \colon \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M \to \mathsf{TT}^*M$ przez $W_M = -\beta^{-1}_{(\mathsf{T}^*M,\omega_M)}$. *Nawias Poissona* dwóch funkcji F i G na T^*M jest funkcją $\{F, G\} = \langle \mathrm{d}F, W_M \circ \mathrm{d}G \rangle$. Pole wektorowe Z wyraża się wzorem $Z = W_M \circ \mathrm{d}H$, a pochodna Liego $\mathrm{d}_Z F = \langle \mathrm{d}F, Z \rangle$ funkcji F na T^*M jest nawiasem Poissona $\{F, H\}$. Trajektoria siły i pędu??? $(\zeta, \eta) \colon I \to Ph$ należy do $\mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{D}(F \circ \eta)(t) = \{F, H\}(\eta(t)) + \langle \mathrm{d}F, \mu_{\pi_M}(\zeta(t), \eta(t)) \rangle \tag{349}$$

dla każdej funkcji F na T^*M i każdego $t \in I$.