Geometryczne podstawy teorii pola

Paweł Urbański
Division of Mathematical Methods in Physics
University of Warsaw
Hoża 74, 00-682 Warszawa

1. Różniczkowania w algebrze form różniczkowych.

1.1. Algebry, różniczkowania w algebrach. *Algebrą* nazywamy przestrzeń wektorową Φ z działaniem mnożenia, które jest rozdzielne względem dodawania. Algebra $(\Phi, \cdot)$ jest *łączna*, jeżeli mnożenie jest łączne. Algebra $(\Phi, \cdot)$ jest *algebrą Leibniza*, jeżeli mnożenie spełnia *tożsamość Jacobiego*

$$f \cdot (f' \cdot f) = f \cdot f' + f \cdot f.$$

Jeżeli ponadto mnożenie jest antyprzemienne, $f \cdot f' = -f' \cdot f$, to algebra jest *algebrą Liego*

Definicja 1. odwzorowanie liniowe $a\colon \Phi \to \Phi$ nazywamy *różniczkowaniem w algebrze*, jeżeli dla każdej pary $f, f' \in \Phi$ mamy

$$a(f \cdot f') = f \cdot a(f') + a(f) \cdot f'.$$

Przykłady.

(1) Tożsamość Jacobiego w definicji algebry Liego oznacza, że mnożenie jest różniczkowaniem względem siebie.
(2) Pole wektorowe na rozmaitości jest różniczkowaniem w algebrze funkcji gładkich.
(3) Niech Φ będzie algebrą łączną. Dla każdego $f \in \Phi$ odwzorowanie

$$D_f\colon \Phi \to \Phi\colon g \mapsto f \cdot g - g \cdot f$$

jest różniczkowaniem w Φ:

$$D_f(g \cdot g') = f \cdot (g \cdot g') - (g \cdot g') \cdot f = (f \cdot g - g \cdot f) \cdot g' + g \cdot (f \cdot g' - g' \cdot f) = D_f(g) \cdot g' + g \cdot D_f(g').$$

Różniczkowanie takie nazywamy *różniczkowaniem wewnętrznym.*

Oznaczmy przez $\mathrm{Der}(\Phi)$ zbiór różniczkowań w algebrze Φ. Oczywistym jest, że tworzą one przestrzeń wektorową oraz że złożenie dwóch różniczkowań nie jst różniczkowaniem.

Stwierdzenie 1. *Niech $a, b \in \mathrm{Der}(\Phi)$. Wówczas ich komutator $ab - ba$ też jest różniczkowaniem w Φ.*

Dowód:

$$\begin{aligned}(ab - ba)(f \cdot g) &= a(b(f) \cdot g + f \cdot b(g)) - b(a(f) \cdot g + f \cdot a(g)) \\ &= ab(f) \cdot g + f ab(g) - ba(f) \cdot g - f \cdot ba(g) \\ &= (ab - ba)(f) \cdot g + f \cdot (ab - ba)(g)\end{aligned}$$

■

Stwierdzenie 2. $(\mathrm{Der}(\Phi), [\,,\,])$, *gdzie $[a, b] = ab - ba$, jest algebrą Liego.*

Dowód: $[a,b] = -[b,a]$, więc mnożenie jest antyprzemienne. Pokazujemy, że spełniona jest tożsamość Jacobiego:

$$\begin{aligned}
[a,[b,c]] &= [a, bc - cb] = abc - acb - bca_c ba \\
&= abc - bac - cab + cba + bac - bca - acb + cab \\
&= [[a,b],c] + [a,[b,c]].
\end{aligned}$$

■

1.2. Różniczkowania między algebrami. Niech będą dane dwie algebry Φ i Φ', oraz homomorfizm algebr $F\colon \Phi \to \Phi'$, to znaczy jest to odwzorowanie liniowe zachowujące mnożenie:

$$F(ab) = F(a)F(b).$$

Liniowe odwzorowanie $D\colon \Phi \to \Phi'$ nazywamy F-różniczkowaniem, jeżeli

$$D(ab) = D(a)F(b) + F(a)D(b).$$

Przykład: wektor v styczny do rozmaitości M w punkcie q jest różniczkowaniem z algebry funkcji gładkich w algebrę liczb, względem homomorfizmu $f \mapsto f(q)$.

Stwierdzenie 3. *Złożenie różniczkowania z homomorfizmem algebr jest różniczkowaniem.*

Dowód: Oczywisty. ■

1.3. Algebry z gradacją. Algebra $(\Phi, \cdot)$ nazywana jest *algebrą z gradacją*, jeżeli przestrzeń wektorowa Φ jest sumą prostą $\Phi = \oplus \Phi^q$, gdzie $q \in \mathbb{Z}$ (ogólniej - q należy do grupy abelowej, np. Z_2, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ itp), a mnożenie spełnia warunek

$$\text{jeżeli } f \in \Phi^q,\ f' \in \Phi^{q'} \text{ to } f \cdot f' \in \Phi^{q+q'}. \tag{1}$$

Algebrę z gradacją nazywamy łączną, jeżeli jest łączna w zwykłym sensie, przemienną jeżeli

$$f \in \Phi^q,\ f' \in \Phi^{q'} \text{ to } f \cdot f' = (-1)^{qq'} f' \cdot f \in \Phi^{q+q'}, \tag{2}$$

antyprzemienną jeżeli

$$f \in \Phi^q,\ f' \in \Phi^{q'} \text{ to } f \cdot f' = -(-1)^{qq'} f' \cdot f \in \Phi^{q+q'}. \tag{3}$$

Mnożenie w algebrze z gradacją spełnia (gradowaną) tożsamość Jacobiego, jeżeli

$$f \in \Phi^q,\ g \in \Phi^r \text{ to } g \cdot (f \cdot f') = (g \cdot f)f' + (-1)^{qr} f \cdot (g \cdot f'). \tag{4}$$

Algebra jest gradowaną algebrą Liego, jeżeli mnożenie jest antyprzemienne i spełnia gradowaną tożsamość Jacobiego.

Przykład: Algebra zewnętrzna form różniczkowych $(\Phi(M), \wedge)$ na rozmaitości M z jest gradowaną algebrą. Stopień w gradacji jest równy rzędowi formy. Algebra ta jest łączna i przemienna. Podobnie algebra zewnętrzna pól wielowektorowych.

1.4. Różniczkowania w algebrach z gradacją.

Definition 2. Liniowe odwzorowanie $a\colon \Phi \to \Phi$ nazywamy *gradowanym różniczkowaniem* stopnia r, jeżeli $a\colon \Phi^q \to \Phi^{q+r}$ oraz

$$a(f \cdot f')a(f) \cdot f' + (-1)^{rq} f \cdot a(f') \text{ dla } f \in \Phi^q. \tag{5}$$

Tożsamość Jacobiego (4) oznacza więc, że mnożenie przez element z Φ^r jest gradowanym różniczkowaniem stopnia r.

Przykłady.

(1) Różniczkowanie zewnętrzne $\mathrm{d}\colon \Phi(M) \to \Phi(M)$ jest gradowanym różniczkowaniem stopnia 1.
(2) Zwężenie z polem wektorowym X, $\iota_X\colon \Phi(M) \to \Phi(M)$ jest różniczkowaniem stopnia -1.
(3) Odwzorowanie $\iota\colon \Phi(M) \to \Phi(M)$, zdefiniowane następująco:

$$\iota\colon \Phi^k(M) \to \Phi^k(M)\colon \alpha \mapsto k\alpha$$

jest różniczkowaniem stopnia zerowego: dla $\alpha \in \Phi^k(M)$ i $\beta \in \Phi^l(M)$

$$\iota(\alpha \wedge \beta) = (k+l)\alpha \wedge \beta = (k\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (l\beta) = \iota(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \iota(\beta)$$

Oznaczmy przez $\mathrm{Der}(\Phi)$ zbiór gradowanych różniczkowań w zF. Podobnie, jak w przypzdku zwykłej algebry, zbiór różniczkowań jest przestrzenią wektorową, złżenie różniczkowań nie jest różniczkowaniem, ale komutator(gradowany) różniczkowań jest różniczkowaniem:

STWIERDZENIE 4. *Jężeli $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\Phi)$ sa odpowiednio stopnia r_1, r_2, to gradowany komutator*

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - (-1)^{r_1 r_2} D_2 D_1$$

jest różniczkowaniem stopnia $r_1 + r_2$.

DOWÓD: Niech $f \in \Phi^k$ i $g \in \Phi$, wówczas

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](f \cdot g) &= D_1(D_2(f \cdot g)) - (-1)^{r_1 r_2} D_2(D_1(f \cdot g)) \\
&= D_1(D_2(f) \cdot g + (-1)^{r_2 k} f \cdot D_2(g)) - (-1)^{r_1 r_2} D_2(D_1(f) \cdot g + (-1)^{r_1 k} f \cdot D_1(g)) \\
&= D_1(D_2(f)) \cdot g + (-1)^{(k+r_2) r_1} D_2(f) \cdot D_1(g) + (-1)^{r_2 k} D_1(f) D_2(g) \\
&+ (-1)^{r_2 k + r_1 k} f \cdot D_1(D_2(g)) - (-1)^{r_1 r_2} \Big(D_2(D_1(f)) \cdot g \\
&+ (-1)^{(k+r_1) r_2} D_1(f) \cdot D_2(g) + (-1)^{r_1 k} D_2(f) D_1(g) + (-1)^{r_1 k + r_2 k} f \cdot D_2(D_1(g)) \Big) \\
&= (D_1 D_2 - (-1)^{r_1 r_2} D_2 D_1)(f) \cdot g + (-1)^{(r_1 + r_2) k} f \cdot (D_1 D_2 - (-1)^{r_1 r_2} D_2 D_1)(g)
\end{aligned}$$

■

Podobnie sprawdzamy, że zachodzi gradowana tożsamość Jacobiego

$$[D_1, [D_2, D_3]] = [[D_1, D_2], D_3] + (-1)^{r_1 r_2} [D_2 [D_1, D_3]],$$

lub równoważnie,

$$(-1)^{r_1 r_3} [[D_1, D_2], D_3] + (-1)^{r_2 r_3} [[D_3, D_1], D_2] + (-1)^{r_1 r_2} [[D_2, D_3], D_1] = 0.$$

Przestrzeń $\mathrm{Der}(\Phi)$, z gradacją ze względu na stopień różniczkowania i gradowanym komutatorem jako mnożeniem, jest gradowaną algebrą Liego.

1.5. Ważny przykład. Podobnie jak formy różniczkowe, pola wielowektorowe na rozmaitości M tworzą przemienna i łączną algebrę z gradacją, z iloczynem zewnętrznym jako mnożeniem. Oznaczamy ją $\Psi(M)$. Ale pola wektorowe mają jeszcze jedno mnożenie, nawias Liego. Nawias ten, jak wiemy, rozszerza się do pochodnej Liego pól wielowektorowych. Potraktujmy ją jako definicję nawiasu pola wektorowego i pola wielowektorowego:

$$[X, T] = \mathcal{L}_X T, \text{ dla } X \in \Psi^1(M),\ T \in \Psi(M). \tag{6}$$

Aby tak zdefiniowany nawias miał własność nawiasu w algebrze z gradacją, pole wektorowe powinno mieć stopień zero. Ogólnie pole wielowektorowe z $\Psi^r(M)$ powinno mieć stopień gradowany $r-1$. Wprowadzamy więc w $zC(M)$ nową gradację

$$\Psi(M) = \oplus \Psi^{[r]}(M), \quad \text{gdzie} \quad \Psi^{[r]}(M) = \Psi^{r+1}(M). \tag{7}$$

W tej nowej gradacji pochodna Liego jest iloczynem gradowanym. Rozszerzamy ten nawias do wszystkich pól wielowektorowych żądając, by odwzorowanie

$$D_T \colon \Psi \to \Psi \colon S \mapsto [T, S]$$

było, dla $T \in \Psi^{[r]}(M)$, rożniczkowaniem stopnia r w gradowanej algebrze łącznej $(\Psi(M), \wedge)$, tzn. by

$$[T, Y \wedge Z] = [X, Y] \wedge Z + (-1)^{rl} X \wedge [X, Z], \quad \text{dla} \quad X \in \Psi^l(M).$$

Jest to możliwe, bo pochodna Liego ma własność

$$\mathcal{L}_X(T \wedge S) = \mathcal{L}_X(T) \wedge S + T \wedge (\mathcal{L}_X S).$$

Otrzymany w ten sposób nawias, zwany *nawiasem Schoutena*, jest gradowanym mnożeniem w $\Psi(M) = \oplus \Psi^{[r]}(M)$. Sprawdza się bezpośrednim rachunkiem, że nawias Schoutena nadaje $\Psi(M)$ strukturę gradowanej algebry Liego. Mamy więc w $\Psi(M)$ dwie struktury algebry z gradacją:

(1) strukturę łącznej i przemiennej algebry względem naturalnej gradacji,
(2) strukturę algebry Liego względem przesuniętej gradacji. Mnożenie tej algebry jest różniczkowaniem w algebrze łącznej.

Mówimy, że $(\Psi, \wedge, [\,,\,])$ jest algebrą Gerstenhabera.

1.6. Różniczkowania w algebrze form. Zajmiemy się teraz różniczkowaniami w algebrze zewnętrznej form różniczkowych na rozmaitości M.

Stwierdzenie 5. *Różniczkowanie w $\Phi(M)$ jest operacją lokalną, tzn. jeżeli forma ω jest równa zero na zbiorze otwartym U i a jest różniczkowaniem, to $a(\omega)$ też est zero na U.*

Dowód: Niech $\omega = 0$ w otoczeniu O punktu $q \in M$. Istnieje funkcja f równa 1 w pewnym otoczeniu $O' \subset O$ punktu q i taka, że $f\omega = 0$ na M. Ponieważ a jest różniczkowaniem, to

$$0 = a(f\omega) = a(f) \wedge \omega + f a(\omega).$$

Ponieważ ω jest równe zero na O, to $0 = fa(\omega)$ na O i $a(\omega) = 0$ na O'. Stąd wynika teza. ■

Na rozmaitości parazwartej każda forma jest skończoną sumą iloczynów zewnętrznych funkcji i różniczek funkcji. Stąd różniczkowanie w $\Phi(M)$ jest jednoznacznie wyznaczone przez swoje wartości na $\Phi^0(M)$ i $\mathrm{d}\Phi^0(M)$. W dalszym ciągu użyteczne będzie następujące stwierdzenie.

Proposition 6. *Niech (x^i) będzie lokalnym układem współrzędnych na $O \subset M$. Dla każdej funkcji f i każdego różniczkowania a*

$$a(f)(q) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) a(x^i)(q) \quad \text{dla} \quad q \in O. \tag{8}$$

Dowód: Z lokalności różniczkowań wynika, że możemy ograniczyć sie do f z nośnikiem w O. Z wzoru całkowego na resztę funkcji jednej zmiennej dostajemy, że istnieją gładkie funkcje g_{ij} takie, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)(x^i - x^0) + g_{ij}(x)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j).$$

Stąd

$$a(f)(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) a(x^i)(x_0).$$

(różniczkowanie na funkcjach stałych daje zero). ■

Definicja 3. Różniczkowanie a jest typu ι_*, jeżeli na funkcjach jest zero. Różniczkowanie a jest typu d_*, jeżeli komutuje z d czyli $a\mathrm{d} - (-1)^r \mathrm{d}a = 0$, gdzie r jest stopniem różniczkowania a.

Stwierdzenie 7. *Każde odwzorowanie lokalne $\bar{a}: \Phi^0(M) \to \Phi^r(M)$ takie, że*

$$\bar{a}(fg) = g\bar{a}(g) + f\bar{a}(g), \tag{9}$$

można jednoznacznie rozszerzyć do różniczkowania a typu d_*, stopnia r.

Dowód: Jednoznaczność jest oczywista. Pokażemy istnienie. Z lokalności $\bar{a}$ wynika, że wystarczy zdefiniować a na 1-formach o nośniku w dziedzinie lokalnego układu współrzędnych. Niech więc $\alpha = \sum \alpha_i \mathrm{d}x^i$. Jeżeli a ma być rozszerzeniem $\bar{a}$, to

$$a(\alpha) = \sum (a(\alpha_i) \wedge \mathrm{d}x^i + (-1)^r \sum \alpha_i \mathrm{d}a(x^i)) = \sum (\bar{a}(\alpha_i) \wedge \mathrm{d}x^i + (-1)^r \sum \alpha_i \mathrm{d}\bar{a}(x^i)).$$

Przyjmijmy to wyrażenie jako definicję $a_x(\alpha)$. Trzeba teraz pokazać, że wynik nie zależy od wyboru układu współrzędnych. W układzie współrzędnych (y^i) mamy $\alpha = \sum \alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}y^j$ i

$$\begin{aligned}
a_y(\alpha) &= \sum \bar{a}(\alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}) \wedge \mathrm{d}y^j + (-1)^r \sum \alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}\bar{a}(y^j) \\
&= \sum \bar{a}(\alpha_i) \wedge (\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}y^j) + \sum \alpha_i \bar{a}(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}) \wedge \mathrm{d}y^j + (-1)^r \sum \alpha_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}\bar{a}(y^j) \\
&= \sum \bar{a}(\alpha_i) \wedge \mathrm{d}x^i + \sum \alpha_i \left(\bar{a}(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}) \wedge \mathrm{d}y^j + (-1)^r \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}\bar{a}(y^j) \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

Trzeba zatem pokazać, że

$$\mathrm{d}\bar{a}(x^i) = (-1)^r \sum \bar{a}(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}) \wedge \mathrm{d}y^j + \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}\bar{a}(y^j).$$

Wyprowadzając wzór (8) korzystaliśmy tylko z własności (9) różniczkowania a. Analogicznie więc, mamy

$$\bar{a}(f)(q) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) \bar{a}(x^i)(q) \quad \text{dla} \quad q \in O \tag{11}$$

i stąd

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{a}(x^i) &= \sum \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} \mathrm{d}y^k \wedge \bar{a}(y^j) + \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}\bar{a}(y^j) \\
&= \sum \mathrm{d}y^k \wedge \bar{a}(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}) + \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}\bar{a}(y^j) \\
&= (-1)^r \sum \bar{a}(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}) \wedge \mathrm{d}y^k + \sum \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \mathrm{d}\bar{a}(y^j).
\end{aligned}$$

Zatem $a_x = a_y = a$. Pozostaje do sprawdzenia, że $a(g\alpha) = a(g) \wedge \alpha + ga(\alpha)$. Korzystając z (9) dostajemy

$$\begin{aligned}
a(g\alpha) &= \sum \bar{a}(g\alpha_i) \wedge \mathrm{d}x^i + \sum g\alpha_i \mathrm{d}\bar{a}(x^i) \\
&= \bar{a}(g) \wedge \sum \alpha_i \mathrm{d}x^i + g \left(\sum a(\alpha_i) \wedge \mathrm{d}x^i + \alpha_i \mathrm{d}a(x^i) \right) \\
&= a(g) \wedge \alpha + ga(\alpha).
\end{aligned}$$

■

Oczywistym jest, że komutator ι_*-różniczkowań jest ι_*-różniczkowaniem. Podobnie, komutator d_*-różniczkowań jest d_*-różniczkowaniem:

$$[\mathrm{d}, [a_1, a_2]] = [[\mathrm{d}, a_1], a_2] + (-1)^r [a_1, [\mathrm{d}, a_2]] = 0.$$

Stwierdzenie 8. *Każde różniczkowanie w $\Phi(M)$ rozkłada się jednoznacznie na sumę różniczkowania typu ι_* i różniczkowania typu d_*.*

Dowód: Niech a będzie różniczkowaniem w $\Phi(M)$, więc obcięte do $\Phi^0(M)$ spełnia warunek (9). Na mocy Stwierdzenia 7 istnieje (jednoznacznie wyznaczone) różniczkowanie a_2 typu d_*, ktore na funkcjach jest równe a. Różnicz $a_1 = a - a_2$ jest różniczkowaniem typu ι_*, więc mamy istnienie i jednoznaczność rozkładu. ∎

Stwierdzenie 9. *Każde różniczkowanie a typu d_* jest komutatorem $[b, \mathrm{d}]$, gdzie b jest jednoznacznie wyznaczonym różniczkowaniem typu ι_*.*

Dowód: Sprawdźmy najpierw, że każdy komutator d różniczkowania b typu ι_* jest typu d_*. Z tożsamości Jacobiego

$$[\mathrm{d}, [b, \mathrm{d}]] = [[\mathrm{d}, b], \mathrm{d}] - [b, [\mathrm{d}, \mathrm{d}]] = [[\mathrm{d}, b], \mathrm{d}] = -[\mathrm{d}, [b, \mathrm{d}]]$$

więc $[\mathrm{d}, [\mathrm{d}, b]] = 0$. Niech teraz a bedzie typu d_*. Jeżeli $a = [b, \mathrm{d}]$, to $b(\mathrm{d}f) = a(f)$ i ogólniej, $b(g\mathrm{d}f) = g(a(f)$. Pokażemy, ża ta formuła jednoznacznie wyznacza wart/c b na jednoformach i, w konsekwencji, różniczkowanie na całej algebrze $\Phi(M)$. Mamy w lokalnym układzie współrzędnych $\mathrm{d}f = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$, więc b jest dobrze określone, jeżeli

$$a(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} a(x^i),$$

ale to byó już wykazane w Stwierdzeniu 6. Istnieje więc (dokładnie jedno) różniczkowanie b typu ι_* mające własność $b(\mathrm{d}f) = a(f)$. Komutator $[b, \mathrm{d}]$ jest różniczkowaniem typu d^*, które na funkcjach jest równe a. Stąd $a = [b, \mathrm{d}]$. ∎

Powyższe rozważania możemy podsumować w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 1.

(1) *Każde lokalne odwzorowanie $\bar{a}\colon \Phi^0(M) \oplus \mathrm{d}\Phi^0(M) \to \Phi(M)$ takie, że*

$$\bar{a}\Phi^0(M) \subset \Phi^r(M), \quad \bar{a}\mathrm{d}\Phi^0(M) \subset \Phi^{r+1}(M), \quad \bar{a}(fg) = \bar{a}(f)g + f\bar{a}(g),$$

da się jednoznacznie przedłużyć do różniczkowania w $\Phi(M)$.

(2) *Każde różniczkowanie a w $\Phi(M)$ ma jednoznaczną reprezentację $a = a' + [a'', \mathrm{d}]$, gdzie a', a'' są różniczkowaniami typu ι_*.*

1.7. Różniczkowania typu ι_*. Niech a będzie różniczkowaniem typu ι_* stopnia r. Jest ono zadane przez swoje wartości na jednoformach, więc przez odwzorowanie $\bar{a}\colon \Phi^1(M) \to \Phi^{r+1}(M)$ o własności $\bar{a}(f\alpha) = f\bar{a}(\alpha)$. Wiemy, że takie odwzorowania pochodzą od odzorowań liniowych odpowiednich wiązek wektorowych, więc $\bar{a}(\alpha) = A^* \circ \alpha$, gdzie $A^*\colon \mathsf{T}^*M \to \bigwedge^{r+1} \mathsf{T}^*M$ jest jednoznacznie wyznaczonym odwzorowaniem liniowym wiązek wektorowych, nad jednością w bazie. Odwzorowanie dualne $A\colon \bigwedge^{r+1} \mathsf{T}M \to \mathsf{T}M$ jest $(r+1)$-formą o wartościach wektorowych. Dostaliśmy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między różniczkowaniami typu ι_* i formami o wartościach wektorowych. Odpowiedniość tą można zapisać następującym wzorem

$$\langle w, a(\alpha)\rangle = \langle A(w), a\rangle, \quad w \in \bigwedge^{r+1} \mathsf{T}M.$$

Różniczkowanie typu ι_* odpowiadające formie o wartościach wektorowych A oznaczamy ι_A, a d_*-różniczkowanie $[\iota_A, \mathrm{d}]$ oznaczać będziemy d_A.

Przykłady.

(1) Pole wektorowe X na M jest 0-formą o wartościach wektorowych. Różniczkowanie ι_X jest różniczkowaniem stopnia -1, więc dla 1-fomy α, $\iota_X(\alpha)$ jest funkcją, $\iota_X(\alpha) = \langle X, \alpha\rangle$. Różniczkowanie $d_X = [\iota_X, \mathrm{d}] = \mathrm{d}\iota_X + \iota_X\mathrm{d}$ jest pochodną Liego $\mathcal{L}_X$ (wzór

Cartana). Żeby to udowodnić, wystaczy porównać wartości obu różniczkowań na funkcjach:

$$\mathcal{L}_X(f) = X(f) = \langle X, \mathrm{d}f\rangle = \iota_X \mathrm{d}(f) = [\iota_X, \mathrm{d}](f).$$

(2) Odwzorowanie tożsamościowe $id\colon \mathsf{T}M \to \mathsf{T}M$ jest 1-formą o wartościach wektorowych. Różniczkowanie ι_{id} jest stopnia zero i dla 1-formy α, $\iota(\alpha) = \alpha$, więc $\iota_{id} = \iota$, to znaczy formę mnoży przez jej rząd.

(3) Odpowiadające ι różniczkowanie typu d_*, $d_{id} = [\iota, \mathrm{d}] == \iota\mathrm{d} - \mathrm{d}\iota = \mathrm{d}$.

Niech będą dane dwie formy o warościach wektorowych, A i B. Różniczkowania ι_A i ι_B są typu ι_*, więc ich komutator też jest typu ι_*. Zatem istnieje forma o wartościach wektorowych C taka, że $\iota_C = [\iota_A, \iota_B]$. Formę C oznaczamy $[A, B]_{R-N}$ i nazywamy *nawiasem Richardsona-Nijenhuisa* form A i B. Nawias ten ma charakter czysto algebraiczny i da się uogólnić na przypadek odwzorowań wieloliniowych przestrzeni wektorowej w siebie. Na formach o wartościach wektorowych można zdefiniować drugi nawias. Komutator $[d_A, d_B]$ jest różniczkowaniem typu d_*, więc jest postaci $[\iota_D, \mathrm{d}]$, gdzie D jest jednoznacznie wyznaczoną formą o wartościach wektorowych. Nazywamy ją *nawiasem Frölichera-Nijenhuisa* frm A i B i oznaczamy $[A, B]_{F-N}$. Nawias ten spełnia bardzo ważną role w geometrii rózniczkowej.

1.8. Różniczkowanie d_T. Jak wiemy, można mówić o różniczkowaniach z algebry Φ do algebry Φ', jeżeli zadany jest homomorfizm między tymi algebrami. Zajmiemy się szczególnym przypadkiem $\Phi = \Phi(M)$ i $\Phi' = \Phi(\mathsf{T}M)$. Homomorfizm zadany jest przez przeciągnięcie (pull-back) τ_M^* form względem kanonicznego rzutowania $\tau_M\colon \mathsf{T}M \to M$. Podobnie jak w przypadku różniczkowań w $zF(M)$, możemy wyróżnić różniczkowania typu ι_*, zerujące funkcje, i typu d_* (różniczkowanie zewnętrzne jest zdefiniowane na każdej rozmaitości, więc ma sens warunek $a\mathrm{d} = (-1)^r \mathrm{d}a$). Mamy też jednoznaczny rozkład różniczkowania na różniczkowanie typu ι_* i różniczkowanie typu d_*. Różniczkowania typu ι_* i stopnia $r-1$ są zadane odwzorowaniami wiązek wektorowych $A\colon \bigwedge^r \mathsf{T}\mathsf{T}M \to \mathsf{T}M$ nad rzutowaniem τ_M. Mówimy o formach na $\mathsf{T}M$ o wartościach wektorowych na M.

Przykład. Odwzorowanie identycznościowe $id\colon \mathsf{T}M \to \mathsf{T}M$ traktujemy teraz jako 0-formę na $\mathsf{T}M$ o wartościach wektorowych na M. Odpowiadające jej różniczkowanie ι_T typu ι_* jest stopnia -1 i na formach dana jest związkiem

$$\iota_T\alpha(v) = \langle v, \alpha\rangle.$$

Z kolei odpowiednie różniczkowanie d_T jest różniczkowaniem stopnia 0, nazywane totalną pochodną, kompletnym podniesieniem stycznym itp Uzasadnieniem nazwy 'totalna pochodna' jest następujący związek, zachodzący dla każdego pola wektorowego $X\colon M \to \mathsf{T}M$:

$$X^*\mathrm{d}_T(\alpha) = \mathcal{L}_X\alpha,$$

czyli $\mathrm{d}_T\alpha$ zawiera w sobie informacje o wszystkich pochodnych Liego formy α. Aby udowodnić tą równość, wystarczy sprawdzić ją na funkcjach, bo zarówno $\mathcal{L}_X$ jak i $X^*\mathrm{d}_T$ są różniczkowaniami w $\Phi(M)$ typu d_*. Dla funkcji zaś

$$\mathcal{L}_X(f) = X(f) = \mathcal{L}_X(f).$$

W lokalnym układzie wspólrzędnych, jeżeli jednoforma $\alpha = \sum \alpha_i \mathrm{d}x^i$, to

$$\mathrm{d}_T\alpha = \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}\dot{x}^j \mathrm{d}x^i + \sum \alpha_i \mathrm{d}\dot{x}^i.$$

Różniczkowanie d_T spełnia bardzo istotną rolę w geometrycznym podejściu do mechaniki analitycznej. W szczególności, jeżeli (P, ω) jest rozmaitością symplektyczną, to $(\mathsf{T}P, \mathrm{d}_T\omega)$ jest też formą symplektyczną. Zamkniętość formy $\mathrm{d}_T\omega$ wynika z przemienności d_T z d:

$$\mathrm{d}\mathrm{d}_T\omega = \mathrm{d}_T\mathrm{d}\omega = 0,$$

zaś niezdegenerowanie jest widoczne w lokalnym układzie współrzednych: dla współrzędnych kanonicznych (x^i, p_j) (zawsze takie istnieją) mamy $\omega = \sum \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$ i stąd

$$\mathrm{d}_T\omega = \sum(\mathrm{d}\dot{p}^i \wedge \mathrm{d}x^i + \mathrm{d}p^i \wedge \mathrm{d}\dot{x}^i).$$

2. Podwójne wiązki wektorowe.

2.1. Uwagi o przestrzeniach wektorowych i wiązkach wektorowych. W standardowej definicji przestrzeni wektorowej zakłada się istnienie dwóch działań: dodawania i mnożenia przez liczbe, a następnie formułuje się warunki ich zgodności. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że informacja o mnożeniu jest zakodowana już w dodawaniu: mnożenie przz liczbę całkowitą sprowadza sią do dodawania. Dzielenie wektora v przez liczbę całkowitą k jest rozwiązywaniem równania $kx = v$. Stąd mnożenie przez liczby wymierne i z ciągłości - przez liczby rzeczywiste. Ważny jest proces odwrotny: znając mnożenie w przestrzeni wektorowej (wymiary skończonego) V możemy odtworzyć dodawanie. Mnożenie pozwala wskazać rodzinę funkcji jednorodnych na V. Różniczkowalne funkcje jednorodne są liniowe, więc znajomość mnożenia przez liczbę daje znajomość przestrzeni funkcji liniowych na V. Stąd odtwarzamy całą strukturę przestrzeni liniowej. Mnożenie przez liczby jest działaniem monoidu multyplikatywnego $\mathbb{R}_+ \cup 0$, którego polem fundamentalnym jest pole Eulera (we współrzędnych $v^i\partial_i$). Dokładniej: na przestrzeni wektorowej V, wektor $X_V(v)$ pola Eulera (w punkcie $v \in V$) jest reprezentowany prostą $t \mapsto v + tv$. Stąd w polu Eulera zakodowana jest struktura przestrzeni wektorowej. Podobnie mamy dla wiązek wektorowych.

2.2. Wiązka styczna do wiązki wektorowej. Niech $\tau\colon E \to M$ będzie wiązką wektorową. Rozmaitość $\mathsf{T}E$ jest wiązką wektorową $\tau_E\colon \mathsf{T}M \to E$, ale posiada też strukturę wiązki wektorowej, odziedziczoną z E przez zastosowanie odwzorowania stycznego do rzutowania i działań w wiązce E. Zastosowanie odwzorowania stycznego do τ daje odwzorowanie $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$. Jest to rozwłóknienie lokalnie trywialne, a trywializację nad $\mathsf{T}O$ dostajemy stosując odwzorowanie styczne do trywializacji E nad O. Podobnie, działanie dodawania w wiązce E jest odwzorowaniem $+\colon E \times_M E \to E$. Stosując funktor styczny, dostajemy odwzorowanie

$$\dot{+}\colon \mathsf{T}E \times_{\mathsf{T}M} \mathsf{T}E \to \mathsf{T}E,$$

które określa działanie we włóknach $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$. Mnożenie przez liczbę $r \in \mathbb{R}$ definiujemy jako odzorowanie styczne do mnożenia w E, $E \to E\colon y \mapsto ry$. Tak wprowadzone mnożenie przez liczby oznaczać będziemy $\bullet$. W lokalnym układzie współrzędnych, powyższe konstrukcje wyglądają następująco:
Niech (x^i) będą współrzędnymi na M, a (x^i, y^a) współrzędnymi na E, zgodnymi ze strukturą wiązki wektorowej. Odpowiednie współrzędne na $\mathsf{T}E$ oznaczamy $(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b)$. W tym układzie współrzędnych działania $\cdot$, $+$, $\bullet$, $\dot{+}$, określone są wzorami

$$\begin{aligned} x^i(a\cdot v) &= x^i(v)\\ y^a(a\cdot v) &= y^a(v)\\ \dot{x}^j(a\cdot v) &= a\dot{x}^j(v)\\ \dot{y}^b(a\cdot v) &= a\dot{y}^b(v), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} x^i(a\bullet v) &= x^i(v)\\ y^a(a\bullet v) &= ay^a(v)\\ \dot{x}^j(a\bullet v) &= \dot{x}^j(v)\\ \dot{y}^b(a\bullet v) &= a\dot{y}^b(v), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x^i(v+w) &= x^i(v) = x^i(w)\\ y^a(v+w) &= y^a(v) = y^a(w)\\ \dot{x}^j v+w) &= \dot{x}^j(v) + \dot{x}^j(w)\\ \dot{y}^b(v+w) &= \dot{y}^b(v) + \dot{y}^b(w), \end{aligned} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
x^i(v \dot{+} w) &= x^i(v) = x^i(w) \\
y^a(v \dot{+} w) &= y^a(v) + y^a(w) \\
\dot{x}^j(v \dot{+} w) &= \dot{x}^j(v) = \dot{x}^j(w) \\
\dot{y}^b(v \dot{+} w) &= \dot{y}^b(v) + \dot{y}^b(w).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Widać stąd, że działania $\bullet$ i $\dot{+}$ zadają strukturę przestrzeni wektorowej we włóknach $\mathsf{T}\tau$. Ponadto,

(1) rzutowanie $\tau_E\colon \mathsf{T}E \to E$ jest morfizmem wiązek wektorowych

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{T}E \arrow[r, "\tau_E"] \arrow[d, "\mathsf{T}\tau"'] & E \arrow[d, "\tau"] \\
\mathsf{T}M \arrow[r, "\tau_M"] & M
\end{tikzcd}\quad , \tag{16}
$$

(2) rzutowanie $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$ jest morfizmem wiązek wektorowych

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{T}E \arrow[r, "\mathsf{T}\tau"] \arrow[d, "\tau_E"'] & \mathsf{T}M \arrow[d, "\tau_M"] \\
E \arrow[r, "\tau"] & M
\end{tikzcd}\quad , \tag{17}
$$

zachodzą równości

$$
(v_1 + v_2)\dot{+}(v_3 + v_4) = (v_1\dot{+}v_3) + (v_2\dot{+}v_4) \tag{18}
$$

tam, gdzie mają sens, tzn. gdy

$$
\tau_E(v_1) = \tau_E(v_2),\ \tau_E(v_3) = \tau_E(v_4),\ \mathsf{T}\tau(v_1) = \mathsf{T}\tau(v_3),\ \mathsf{T}\tau(v_2) = \mathsf{T}\tau(v_4). \tag{19}
$$

Z (19) i z faktu, że $\mathsf{T}\tau$ oraz τ_E są morfizmami wiązek wektorowych ((16) i (17)), mamy

$$
\mathsf{T}\tau(v_1 + v_2) = \mathsf{T}\tau(v_1) + \mathsf{T}\tau(v_2) = \mathsf{T}\tau(v_3) + \mathsf{T}\tau(v_4) = \mathsf{T}\tau(v_3 + v_4)
$$

oraz

$$
\tau_E(v_1\dot{+}v_3) = \tau_E(v_1) + \tau_E(v_3) = \tau_E(v_2) + \tau_E(v_4) = \tau_E(v_2\dot{+}v_4),
$$

czyli równość (18) ma sens. Oznacza ona, że dodawania względem jednej struktury są morfizmami względem drugiej.

Mamy więc na $\mathsf{T}E$ dwie struktury wiązki wektorowej, spełniające pewne warunki zgodności. Mamy tu do czynienia z przykładem *podwójnej wiązki wektorowej*. Przedstawiamy ją przemiennym diagramem

$$
\begin{tikzcd}
& \mathsf{T}E \arrow[dl, "\mathsf{T}\tau"'] \arrow[dr, "\tau_E"] & \\
\mathsf{T}M \arrow[dr, "\tau_M"'] & & E \arrow[dl, "\tau"] \\
& M &
\end{tikzcd} \tag{20}
$$

2.3. Kilka uwag. Pierwsza uwaga: strukturę wiązki wektorowej w rozwłóknieniu $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$ można opisać używając reprezentantów wektorów, czyli krzywych. Niech $v_1 = \mathsf{t}\gamma_1(0)$ i $v_1 = \mathsf{t}\gamma_1(0)$. Równość $\mathsf{T}\tau(v_1) = \mathsf{T}\tau(v_2)$ oznacza, że możemy wybrać krzywe γ_i tak, by $\tau \circ \gamma_1 = \tau \circ \gamma_2$. Suma $v_1 \dot{+} v_2$ jest reprezentowana krzywą $t \mapsto \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$, gdzie dodawanie odbywa się we włóknach E. Podobnie, wektor $a \bullet \mathsf{t}\gamma(0)$ jest reprezentowany krzywą $t \mapsto a\gamma(t)$.

Druga uwaga: Jak już wcześniej zauważyliśmy, struktura wiązki wektorowej jest zakodowana w polu Eulera. Dla wiązki E jest to pole $y^a \dfrac{\partial}{\partial y^a}$. Na $\mathsf{T}E$ mamy zatem dwa pola Eulera

$$X_{\tau_E} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} + \dot{y}^a \frac{\partial}{\partial \dot{y}^a}, \quad X_{\mathsf{T}\tau} = y^a \frac{\partial}{\partial y^a} + \dot{y}^a \frac{\partial}{\partial \dot{y}^a}\ .$$

Łatwo sprawdzić, ż pola te komutują, $[X_{\tau_E}\,, X_{\mathsf{T}\tau}] = 0$.

Uwaga trzecia: Dla każdej wiązki wektorowej $\tau\colon E \to M$ mamy dualną do niej wiązkę wektorową $\pi\colon E^* \to M$. Jej włókno E^*_q jest przestrzenią dualną (w sensie przestrzeni wektorowych) do włókna E_q wiązki E

$$E^*_q = (E_q)^*. \tag{21}$$

Jest to definicja abstrakcyjna. W praktyce często utożsamiamy wiązkę dualną z wiązką wprowadzoną innymi sposobami. Przykładem jest utożsamianie wiązki dualnej do wektorów stycznych z wiązką różniczek funkcji, a z drugiej strony, utożsamianie wiązki wektorów stycznych z wiązką różniczkowań. Utożsamienia takie wynikają z istnienia kanonicznej ewaluacji między odpowiednimi wiązkami.

Odszukamy teraz kandydata na reprezentanta wiązki dualnej do wiązki $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$.

Istnieje kanoniczna ewaluacja

$$\langle\,,\,\rangle\colon E^* \times_M E \longrightarrow \mathbb{R} \tag{22}$$

Niech teraz wektory styczne $v \in \mathsf{T}E$ i $w \in \mathsf{T}^*E$ będą takie, że $\mathsf{T}\tau(v) = \mathsf{T}\pi(w)$ i niech $\gamma_v\colon \mathbb{R} \to E$ oraz $\gamma_w\colon \mathbb{R} \to E^*$ będą takimi reprezentantami wektorów v i w, że $\tau \circ \gamma_v = \pi \circ \gamma_w$. Mamy funkcję

$$\mathbb{R} \ni t \to \langle \gamma_w(t), \gamma_v(t)\rangle \tag{23}$$

i jej pochodną w zerze

$$\langle w, v\rangle' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \gamma_w(\cdot), \gamma_v(\cdot)\rangle(0). \tag{24}$$

Pochodna ta jest funkcją na wiązce stycznej $\mathsf{T}(E^* \times_M E)$, którą kanoniczne utożsamiamy z wiązką $\mathsf{T}E^* \times_{\mathsf{T}M} \mathsf{T}E$. Z konstrukcji wynika, że ewaluacja styczna (z primem) jest wynikiem zastosowania różniczkowania d_T do ewaluacji kanonicznej. W lokalnym układzie współrzędnych ((x^i, f_a) są współrzędnymi w E^*)

$$\langle \gamma_w(t), \gamma_v(t)\rangle = f_a(\gamma_w(t)) y^a(\gamma_v(t)) \tag{25}$$

i stąd

$$\langle w, v\rangle' = f_a(w)\dot{y}^a(v) + \dot{f}_a(w) y^a(v). \tag{26}$$

Z tych wzorów widać, że funkcja $\langle w, v\rangle'$ jest biliniowa ze względy na styczne struktury wektorowe w $\mathsf{T}E$ i $\mathsf{T}E^*$ oraz niezdegenerowana. Wiązkę dualną do $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$ możemy zatem utożsamić z wiązką $\mathsf{T}\pi\colon \mathsf{T}E^* \to \mathsf{T}M$.

2.4. Wiązka kostyczna do wiązki wektorowej. Podobnie jak $\mathsf{T}E$, rozmaitość T^*E ma dwie struktury wiązki wektorowej. Odnalezienie tej drugiej, obok kanonicznej, jest nieco bardziej skomplikowane. Oznaczmy przez C wykres operacji dodawania w E będący podrozmaitością w $E \times E \times E$:

$$C = \{E \times E \times E \ni (u, w, w) \colon w = u + v\}. \tag{27}$$

Podrozmaitość ta (dokładniej - funkcja zerowa na niej) generuje podrozmaitość lagranżowską N w $\mathsf{T}^*(E \times E \times E)$. Podrozmaitość ta jest anihilatorem wiązki stycznej $\mathsf{T}C$. Utożsamimy teraz $\mathsf{T}^*(E \times E \times E)$ z $\mathsf{T}^*E \times \mathsf{T}^*E \times \mathsf{T}^*E$ w następujący sposób:

Niech $(a, b, c) \in \mathsf{T}^*E \times \mathsf{T}^*E \times \mathsf{T}^*E$ oraz $(u, v, w) \in \mathsf{T}E \times \mathsf{T}E \times \mathsf{T}E$, to

$$\langle(\alpha, \beta, \psi), (u, v, w)\rangle = \langle\alpha, u\rangle + \langle\beta, v\rangle - \langle\psi, w\rangle \tag{28}$$

(oczywiście dla takich trójek, dla których to ma sens, czyli $\pi_E(\alpha) = \tau_E(u)$, $\pi_E(\beta) = \tau_E(v)$ i $\pi_E(\psi) = \tau_E(w)$).

Pokażemy teraz, używając lokalnych współrzednych, że N określa strukturę wiązki wektorowej w T^*E. Niech $(x^\lambda, y^a, p_\kappa, \pi_b)$ będą współrzędnymi w T^*E. Trójka α, β, ψ należy do N wtedy i tylko wtedy, gdy $(\pi_E(\alpha), \pi_E(\beta), \pi_E(\psi)) \in C$ oraz

$$\langle\alpha, u\rangle + \langle\beta, v\rangle - \langle\psi, w\rangle \tag{29}$$

dla wszystkich $(u, v, w) \in \mathsf{T}C$ takich, że

$$(\pi_E(\alpha), \pi_E(\beta), \pi_E(\psi)) = (\tau_E(u), \tau_E(w), \tau_E(w)). \tag{30}$$

Ponieważ $\mathsf{T}C$ jest wykresem dodawania $\dot{+}$, to z wzorów (14), (15) mamy

$$\begin{aligned} x^i(\alpha) &= x^\kappa(\beta) = x^i(\psi) \\ y^a(\psi) &= y^a(\alpha) + y^a(\beta) \\ \dot{x}^j(u)p_\lambda(\psi) &= \dot{x}^j(u)p_\lambda(\alpha) + \dot{x}^j(u)p_\lambda(\beta) \\ (\dot{y}^b(u) + \dot{y}^b(v))\pi_b(\psi) &= \dot{y}^b(u)\pi_b(\alpha) + \dot{y}^b(v)\pi_b(\beta), \end{aligned} \tag{31}$$

a ponieważ współrzędne $\dot{x}^j(u), \dot{y}^b(u)$, i $\dot{y}^b(v)$ mogą przybierać dowolne wartości, dostajemy, że $(\alpha, \beta, \psi) \in N$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} x^i(\alpha) &= x^\kappa(\beta) = x^i(\psi) \\ y^a(\psi) &= y^a(\alpha) + y^a(\beta) \\ p_j(\psi) &= p_\lambda(\alpha) + p_j(\beta) \\ \pi_b(\psi) &= \pi_b(\alpha) = \pi_b(\beta). \end{aligned} \tag{32}$$

Związki te definiują strukturę grupy abelowej we włóknach fibracji

$$\mathsf{T}^*\tau \colon \mathsf{T}^*E \to E^* \tag{33}$$

zdefiniowanej przez

$$\begin{aligned} x^j(\mathsf{T}^*\tau(\alpha)) &= x^j(\alpha), \\ f_a(\mathsf{T}^*\tau(\alpha)) &= \pi_a(\alpha). \end{aligned} \tag{34}$$

Kładziemy $\psi = \alpha \dot{+} \beta$. Mnożenie przez liczby jest jednoznacznie wyznaczone dodawaniem i jest określone wzorami

$$\begin{aligned} x^i(a \bullet \alpha) &= x^i(\alpha) \\ y^a(a \bullet \alpha) &= a y^a(\alpha) \\ p_j(a \bullet \alpha) &= a p_j(\alpha) \\ \pi_b(a \bullet \alpha) &= \pi_b(\alpha). \end{aligned} \tag{35}$$

Z tak określonymi działaniami rozwłóknienie $\mathsf{T}^*\tau$ jest wiązką wektorową.

Rozwłóknienie (33) łatwo zdefiniować bez użycia układu współrzędnych. Skorzystamy tu z odwzorowania

$$\chi[\tau]\colon E_M E \to \mathsf{T}E\colon (e, e') \mapsto \mathsf{t}\gamma(0), \quad \gamma(t) = e + te'$$

i dualnego do niego odwzorowania

$$\chi[\tau]^*\colon \mathsf{T}^*E \to E \times E^*.$$

Składając to odwzorowanie z kanonicznym rzutowaniem na E^* dostajemy rzut $\mathsf{T}^*\tau$, co łatwo sprawdzić w lokalnym układzie współrzędnych.

Również dodawanie można wprowadzić innym sposobem: niech $\alpha, \beta \in \mathsf{T}^*E$ będą takie, że $\mathsf{T}^*\tau(\alpha) = \mathsf{T}^*\tau(\beta) = f$. Niech $\varphi\colon M \to E$ będzie cięciem takim, że $\varphi(\pi(f)) = f$. Oznaczmy przez $\widetilde{\varphi}$ odpowiednią funkcję na E, liniową we włóknach. Oczywistym jest, że

$$\mathsf{T}^*(\mathrm{d}_e\widetilde{\varphi}) = \varphi(e) \tag{36}$$

i w konsekwencji, $\alpha - \mathrm{d}\widetilde{\varphi}$ oraz $\beta - \mathrm{d}\widetilde{\varphi}$ są kowektorami zerującymi się na wektorach pionowych. Odpowiadają im jednoznacznie kowektory $\overline{\alpha}$ i $\overline{\beta}$ z T^*M, zaczepione w tym samym punkcie $\pi(f)$. Kowektor $\psi \in \mathsf{T}^*E$ definiujemy jako jedyny kowektor zaczepiony w $\pi_E(\alpha) + \pi_E(\beta)$ taki, że $\mathsf{T}^*\tau(\psi) = f$ i $\psi - \mathrm{d}\widetilde{\varphi}$ definiuje kowektor $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

Możemy więc podsumować: struktura wiązki wektorowej w $\mathsf{T}\tau\colon \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$ jest podniesieniem stycznym struktury wiązki $\tau\colon E \to M$, zaś struktura wiązki wektorowej w $\mathsf{T}^*\tau\colon \mathsf{T}^*E \to E^*$ jest jej podniesieniem kostycznym (fazowym). Podobnie jak w przypadku wiązki $\mathsf{T}E$, dwie struktury wektorowe na T^*E spełniają warunki zgodności, analogiczne do (16), (17) i (18). Mamy więc diagram

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{T}^*E \arrow[dl, "\mathsf{T}^*\tau"'] \arrow[dr, "\pi_E"] & \\
E^* \arrow[dr, "\pi"] & & E \arrow[dl, "\tau"'] \\
& M &
\end{tikzcd} \tag{37}$$

2.5. Kanoniczne izomorfizmy.

2.6. Podwójne wiązki wektorowe.

2.7. Morfizmy podwójnych wiązek wektorowych.

2.8. d_T jako rozszerzenie funktora stycznego.

3. Wiązki główne i stowarzyszone.

3.1. Wiązki główne. Niech $\pi\colon B \to M$ będzie rozwłóknieniem a G grupą Liego (tzn grupą będącą rozmaitością różniczkową z gładkimi operacjami grupowymi).

Definition 4. Rozwłóknienie π nazywamy *wiązką główną* z grupą strukturalną G, jeżeli G działa na B z prawej strony, włókna π są orbitami działania G i równość $gp = p$ (dla pewnego p) implikuje $g = e$ (grupa działa swobodnie).

Przykładem wiązki głównej jest wiązka baz $B(E)$ wiązki wektorowej E. Grupą strukturalną jest $Gl(n)$. Jeżeli jest dana metryka, to bazy ortonormalne tworzą wiązkę główną z grupą strukturalną $O(n)$. Niech $\sigma\colon M \to B$ będzie cięciem rozwłóknienia π. Ponieważ G działa swobodnie i włókna są równe orbitom działania G, odwzorowanie

$$M \times G \to B\colon (q, g) \mapsto \sigma(q)g \tag{38}$$

jest dyfeomorfizmem. Istnienie globalnego cięcia wiązki głównej oznacza jej trywializowalność. Dyfeomorfizm (38) implikuje dyfeomorfizm włókna π i grupy G, przy wyborze dowolnego punktu we włóknie. Stąd naturalny izomorfizm przestrzeni wektorów pionowych V_pB i przestrzeni stycznej do grupy w jej jedności T_eG. Przestrzeń T_eG ma naturalną strukturę algebry Liego (algebra Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G). Stąd

$$\mathsf{V}B = B \times \mathfrak{g} \tag{39}$$

Uwaga. Działanie styczne do działania grupy na B, obcięte do $\mathsf{V}B$, **nie jest** - w reprezentacji (39) - trywialnym (tzn. identycznościowym na $\mathfrak{g}$) podniesieniem działania G na B.

3.2. Wiązki stowarzyszone. Niech dana będzie wiązka główna $\pi\colon B \to M$ z grupą strukturalną G. Niech F będzie rozmaitością, na której G działa z lewej strony. Zdefiniuję rozwłóknienie $\tau\colon N \to M$ z włóknem typowym F. Najpierw, na rozmaitości $B \times F$ zdefiniuję działanie grupy G z prawej strony wzorem

$$P \times F \times G \ni (p, f, g) \mapsto (pg, g^{-1}f) \in B \times F.$$

Oznaczmy przez N zbiór orbit tego działania. Rzutowanie π indukuje w oczywisty sposób rzutowanie $\tau\colon N \to M$. Niech teraz $\sigma\colon M \supset O \to P$ będzie lokalnym cięciem π. Dla każdego punktu $q \in M$ cięcie takie istnieje (w pewnym jego otoczeniu). W każdej orbicie y działania grupy G na $\pi^{-1}(O) \times F$ istnieje dokładnie jeden element postaci $(\sigma(q), f)$. Oznaczmy to f przez $\chi_\sigma(y)$. Mamy więc dobrze określoną lokalną trywializację

$$\tau^{-1}(O) \to O \times F \ni\colon y \mapsto (\tau(y), \chi_\sigma(y).$$

Trywializacje te wyznaczają strukturę rozmaitości różniczkowej na N i strukturę rozwłóknienia różniczkowego $\tau\colon N \to M$. Rozwłóknienie (wiązkę) nazywamy *wiązką stowarzyszoną* z wiązką główną $\pi\colon B \to M$ i z *włóknem typowym* F. Przykładem może być wiązka wektorowa E, która jest stowarzyszona z wiązką główną baz wiązki E. Włóknem typowym jest $\mathbb{R}^n$.

3.3. Powiązania w wiązce głównej. Niech $\mathsf{H}B$ będzie dystrybucją horyzontalną powiązania na wiązce głównej $\pi\colon B \to M$ z grupą strukturalną G. Oznaczmy

$$R_g\colon B \to B\colon p \mapsto pg.$$

Powiemy, że powiązanie jest zgodne ze strukturą wiązki głównej (jest powiązaniem wiązki głównej), jeżeli dla każdego $g \in G$, $\mathsf{H}_{gp} = \mathsf{T}R_g\mathsf{H}_p$. Podobnie jak w przypadku wiązki głównej baz wiązki wektorowej E, powiązanie wiązki głównej indukuje powiązanie w wiązce stowarzyszonej. Korzystając z utożsamienia (39), możemy traktować rzut pionowy P_V jako formę o wartościach w algebrze Liego grupy G.

3.4. Przykład:Wiązka pierwszych jetów. Niech $\tau\colon Z \to M$ będzie wiązką główną z grupą strukturalną $(\mathbb{R}, +)$. Innymi słowy, włókno wiązki jest jednowymiarową przestrzenią afiniczną. Jest zatem dobrze określona liczba dla pary punktów we włóknie – ich różnica. Stąd, dwóm cięciom wiązki przyporządkowana jest ich różnica – funkcja na rozmaitości bazowej M. Pierwszy jet w punkcie $q \in M$ cięcia wiązki τ można zdefiniować jako klasę równoważności cięć:

$$\sigma \simeq \sigma' \;\equiv\; \sigma(q) = \sigma'(g) \text{ oraz } \mathrm{d}_q(\sigma - \sigma') = 0. \tag{40}$$

Rozmaitość $J^1(\tau)$ pierwszych jetów cięć oznaczać będziemy $\mathsf{C}Z$. Podobnie, zastępując relację (40) relacją

$$\sigma \simeq \sigma' \;\equiv\; \mathrm{d}_q(\sigma - \sigma') = 0, \tag{41}$$

dostajemy rozmaitość $\mathsf{P}Z$ klas równoważności. Mamy naturalne rzutowania $\mathsf{C}Z \to \mathsf{P}Z \to M$ i oczywisty izomorfizm $\mathsf{C}Z = \mathsf{P}Z \times_M Z$. Rozwłóknienie $\mathsf{C}Z \to \mathsf{P}Z$ jest więc wiązką główną z grupą $(\mathbb{R}, +)$ i naturalnym powiązaniem zdefiniowanym następująco: horyzontalna w punkcie $\mathsf{j}\sigma(q)$ jest zadana cięciem

$$\mathsf{P}Z \ni p \mapsto \sigma(\pi(p)),$$

gdzie $\pi\colon \mathsf{P}Z \to M$ i gdzie skorzystaliśmy z utożsamienia $\mathsf{C}Z = \mathsf{P}Z \times_M Z$. Powiązanie to nazywane jest *kanoniczną strukturą kontaktową*.

4. Krzywizna powiązania.

4.1. Krzywizna dystrybucji. Niech dane będzie powiązanie na rozwłóknieniu $\tau\colon N \to M$ z dystrybucją horyzontalną $\mathsf{H}N$. Powiązanie nazwiemy *lokalnie płaskim*, jeżeli dystrybucja horyzontalna jest lokalnie całkowalna, czyli jest zadana przez lokalne cięcia rozwłóknienia τ. Powiązanie nazywamy płaskim, jeżeli dystrybucja horyzontalna jest globalnie całkowalna, tzn. jest zadana globalnymi cięciami. Jak wiadomo z twierdzenia Frobeniusa, dystrybucja jest lokalnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy pola wektorowe z tej dystrybucji są zamknięte ze względu na nawias Liego pól. Miarą niecałkowalności dystrybucji może być informacja, na ile nawias Liego pól należących do dystrybucji wystaje poza nią. W przypadku powiązania, może to być przyporządkowanie

$$\Psi^1(N) \ni X, Y \mapsto P_V[P_H X, P_H Y] \tag{42}$$

Istotne jest tu istnienie dwóch, dopełniających się, dystrybucji: wektorów pionowych i wektorów horyzontalnych. Łatwo się przekonać, że wzór (42) jest jednorodny ze względu na mnożenie przez funkcje:

$$P_V[P_H X, P_H(fY)] = f P_V[P_H X, P_H Y] + P_V((P_H X)(f) P_H Y = f P_V[P_H X, P_H Y],$$

bo $P_V((P_H X)(f) P_H Y = (P_H X)(f) P_V P_H Y = 0$. Zatem (42) pochodzi od morfizmu wiązek wektorowych

$$R\colon \mathsf{T}N \otimes_N \mathsf{T}N \to \mathsf{T}N \tag{43}$$

Ze względu na skośną symetrię, jest to dwuforma o wartościach wektorowych, zwana *formą krzywizny*.

Pokażemy teraz, istotne dla dalszych rozważań twierdzenie.

TWIERDZENIE 2. *Zachodzi związek*

$$[P_V, P_V]_{F-N} = 2R \tag{44}$$

DOWÓD: Niech $P\colon \mathsf{T}N \to \mathsf{T}N$ będzie rzutowniem (w każdej z przestrzeni stycznej) o stałym rzędzie. Jest to 1-forma o wartościach wektorowych. Niech I_P będzie i^*-różniczkowaniem, a D_P d^*-różniczkowaniem odpowiadającym P. Z definicji, nawias Frölichera-Nijenhuisa $[P, P]_{F-N}$ jest 2-formą o wartościach wektorowych, której d^*-różniczkowanie jest równe gradowanemu komutatorowi $[D_P, D_P]$. Z definicji gradowanego komutatora $[D_P, D_P] = D_P D_P + D_P D_P = 2 D_P D_P$, a z definicji różniczkowania D_P, $D_P = [I_P, \mathrm{d}] = I_P \mathrm{d} - \mathrm{d} I_P$. d^*-różniczkowanie jest określone przez swoje wartości na funkcjach, więc wystarczy obliczyć

$$\begin{aligned} 2D_P D_P(f) &= 2(I_P \mathrm{d} - \mathrm{d} I_P)(\mathrm{d}f \circ P) = 2(I_P \mathrm{d}(\mathrm{d}f \circ P) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f \circ P^2)) \\ &= 2(I_P - \mathrm{id})(\mathrm{d}(\mathrm{d}f \circ P)). \end{aligned} \tag{45}$$

Z wzoru Cartana na różniczkę zewnętrzną, dla dowolnych pól wektorowych X, Y mamy

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f \circ P)(X, Y) = X(\mathrm{d}f(PY)) - Y(\mathrm{d}f(PX)) - \mathrm{d}f(P[X, Y]). \tag{46}$$

Z drugiej strony, dla dowolnej 2-formy α

$$I_P\alpha(X,Y) = \alpha(PX,Y) + \alpha(X,PY), \tag{47}$$

więc, kładąc $\alpha = \mathrm{d}(\mathrm{d}f\circ P)$ i korzystając z (46),

$$\begin{aligned} I_P\mathrm{d}(\mathrm{d}f\circ P)(X,Y) &= PX(\mathrm{d}f(PY)) - Y(\mathrm{d}f(PPX)) - \mathrm{d}f(P[PX,Y]) \\ &\quad + X(\mathrm{d}f(PPY)) - PY(\mathrm{d}f(PX)) - \mathrm{d}f(P[X,PY]) \\ &= PX(\mathrm{d}f(PY)) - Y(\mathrm{d}f(PX)) - \mathrm{d}f(P[PX,Y]) \\ &\quad + X(\mathrm{d}f(PY)) - PY(\mathrm{d}f(PX)) - \mathrm{d}f(P[X,PY]). \end{aligned} \tag{48}$$

Stąd, z (46) i z wzoru Cartana

$$\begin{aligned} D_PD_P(f)(X,Y) &= (I_P - \mathrm{id})(\mathrm{d}(\mathrm{d}f\circ P))(X,Y) = I_P\mathrm{d}(\mathrm{d}f\circ P)(X,Y) - \mathrm{d}(\mathrm{d}f\circ P)(X,Y) \\ &= PX(\mathrm{d}f(PY)) - \mathrm{d}f(P[PX,Y]) - PY(\mathrm{d}f(PX)) - \mathrm{d}f(P[X,PY]) + \mathrm{d}f(P[X,Y]) \\ &= \mathrm{dd}f(PX,PY) + \mathrm{d}f([PX,PY]) - \mathrm{d}f(P[PX,Y]) - \mathrm{d}f(P[X,PY]) + \mathrm{d}f(P[X,Y]) \\ &= \mathrm{d}f\left([PX,PY]) - P[PX,Y] - P[X,PY] + P[X,Y]\right). \end{aligned} \tag{49}$$

Zatem

$$\begin{aligned} [P,P]_{F-N} &= 2([PX,PY]) - P[PX,Y] - P[X,PY] + P[X,Y]) \\ &= 2(\mathrm{id} - P)[PX,PY) + 2P[(\mathrm{id} - P)X, (\mathrm{id} - P)Y] \end{aligned} \tag{50}$$

Pierwszy składnik w (50) jest miarą niecałkowalności dystrybucji $\operatorname{im} P$, a drugi miarą niecałkowalności dystrybucji $\ker P$. Dla $P = P_V$, pierwszy składnik znika, bo dystrybucja pionowa jest całkowalna, i dostajemy

$$[P_V, P_V]_{F-N} = 2P_V[P_HX, P_HY] = 2R.$$

■

Stąd i z ogólnych własności różniczkowań wynika następujący ważny fakt.

TWIERDZENIE 3 TOŻSAMOŚCI BIANCHI. *Zachodzi związek*

$$[P_V, R]_{F-N} = 0 \tag{51}$$

DOWÓD: Z gradowanej tożsamości Jacobiego dla różniczkowań i, w konsekwencji, dla form o wartościach wektorowych,

$$[P_V, [P_V, P_V]_{F-N}]_{F-N} = 0 = 2[P_V, R]_{F-N}.$$

■

4.2. Krzywizna w lokalnym układzie wxspółrzędnych. Niech (x^i, y^a) będą współrzędnymi w N, zgodne z rozwłóknieniem. Zapiszemy we współrzednych związek

$$P_V[P_HX, P_HY] = R(X,Y),$$

definiujący krzywiznę powiązania. Dla $X = X^i(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x^i} + X^a(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y^a}$ oraz $Y = Y^i(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x^i} + Y^a(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y^a}$, mamy

$$\begin{aligned} P_HX &= X^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^a_iX^i\frac{\partial}{\partial y^a} \\ P_HY &= Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^a_iY^i\frac{\partial}{\partial y^a}, \end{aligned} \tag{52}$$

a stąd

$$[P_H X, P_H Y] = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - \Gamma^a_j X^j \frac{\partial Y^i}{\partial y^a} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^a_j Y^j \frac{\partial X^i}{\partial y^a} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$+ \left(-X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^a_i X^i) + \Gamma^b_i X^i \frac{\partial}{\partial y^b}(\Gamma^a_j Y^j) + Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^a_i X^i) - \Gamma^b_i Y^i \frac{\partial}{\partial y^b}(\Gamma^a_j X^j) \right) \frac{\partial}{\partial y^a}$$

i

$$P_V[P_H X, P_H Y] =$$
$$\left(-X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^a_i X^i) + \Gamma^b_i X^i \frac{\partial}{\partial y^b}(\Gamma^a_j Y^j) + Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^a_i X^i) - \Gamma^b_i Y^i \frac{\partial}{\partial y^b}(\Gamma^a_j X^j) \right) \frac{\partial}{\partial y^a}$$
$$+ \left(\Gamma^a_i \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - \Gamma^a_j X^j \frac{\partial Y^i}{\partial y^a} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^a_j Y^j \frac{\partial X^i}{\partial y^a} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y^a}$$
$$= \left(-X^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a_i \right) Y^i + \Gamma^b_i X^i \left(\frac{\partial}{\partial y^b} \Gamma^a_j \right) Y^j + Y^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a_i \right) X^i - \Gamma^b_i Y^i \left(\frac{\partial}{\partial y^b} \Gamma^a_j \right) X^j \right) \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Dostajemy współrzędne tensora krzywizny (dwuformy o wartościach wektorowych)

$$R^a_{ij}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a_i - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^a_j + \Gamma^b_i \frac{\partial}{\partial y^b} \Gamma^a_j - \Gamma^b_j \frac{\partial}{\partial y^b} \Gamma^a_i. \tag{53}$$

4.3. Krzywizna powiązania w wiązce głównej. Wartości formy (tensora) krzywizny są wektorami pionowymi. W przypadku wiązki głównej wektory pionowe utożsamiamy z elementami algebry liego $\mathfrak{g}$. Forma krzywizny uważana jest za formę o wartościach w algebrze Liego. Niezmienniczość dystrybucji horyzontalnej oznacza współzmienniczość formy krzywizny.

4.4. Tensor krzywizny powiązania liniowego. W przypadku powiązania liniowego na wiązce wektorowej $\tau\colon E \to M$, współczynniki koneksji są liniowe, $\Gamma^a_i(x,y) = \Gamma^a_{ib}(x) y^b$, i stąd wzór (53) daje

$$R^a_{ij}(x,y) = R^a_{ijb}(x) y^b,$$
$$R^a_{ijb} = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^a_{ib} - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^a_{jb} + \Gamma^c_{ib} \Gamma^a_{jc} - \Gamma^c_{jb} \Gamma^a_{ic}$$

Forma krzywizny może być uważana za dwuformę na bazie M o wartościach w $End(E)$.

4.5. Krzywizna struktury kontaktowej. Rozpatrzmy kanoniczne powiącanie w wiązce pierwszych jetów wiązki głównej $\tau\colon Z \to M$ z grupą strukturalną $(\mathbb{R}, +)$, tzn w wiązce $\mathsf{C}Z \to \mathsf{P}Z$.