

TEORIA GRUP II

1. Algebry, różniczkowania w algebrach.

Algebrą nazywamy przestrzeń wektorową A z działaniem mnożenia, które jest rozdzielne względem dodawania. Algebra (A, \cdot) jest *łączna*, jeżeli mnożenie jest łączne. Algebra (A, \cdot) jest *algebrą Leibniza*, jeżeli mnożenie spełnia *tożsamość Jacobiego*

$$a \cdot (a' \cdot a'') = (a \cdot a') \cdot a'' + a' \cdot (a \cdot a'').$$

Jeżeli ponadto mnożenie jest antyprzemienne, $a \cdot a' = -a' \cdot a$, to algebra jest *algebrą Liego*.

PRZYKŁADY 1.

- (1) Funkcje na dowolnej przestrzeni tworzą algebrę łączną i przemianą ze względu na mnożenie. Na przestrzeni topologicznej jej podalgebrą są funkcje ciągłe, na rozmaitości różniczkowej funkcje gładkie, a na przestrzeni wektorowej funkcje wielomianowe.
- (2) Niech V będzie przestrzenią wektorową. Zbiór endomorfizmów V , $\text{End}(V)$, jest przestrzenią wektorową, a ze względu na składanie odwzorowań algebrą łączną, nieprzemianą.
- (3) Endomorfizmy przestrzeni wektorowej \mathbb{R}^n utożsamiane są z macierzami kwadratowymi $n \times n$. Składaniu odwzorowań liniowych odpowiada mnożenie macierzy, więc przestrzeń macierzy $\mathbb{M}(n)$ z działaniem mnożenia jest nieprzemianą algebrą łączną.
- (4) W algebrze łącznej (A, \cdot) wprowadzamy działanie $[\cdot, \cdot]$:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a.$$

Dostajemy nową strukturę algebry. Oczywiście, $[a, b] = -[b, a]$. Ponadto, korzystając z łączności,

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] &= a \cdot (b \cdot c - c \cdot b) - (b \cdot c - c \cdot b) \cdot a = \\ &= (a \cdot b - b \cdot a) \cdot c - c \cdot (a \cdot b - b \cdot a) + b \cdot (a \cdot c - c \cdot a) - (a \cdot c - c \cdot a) \cdot b = [[a, b], c] + [b, [a, c]], \end{aligned}$$

czyli $(A, [\cdot, \cdot])$ jest algebrą Liego. W szczególności, komutator daje strukturę algebry Liego w $\text{End}(V)$ i w $\mathbb{M}(n)$.

- (5) Przestrzeń $\mathcal{X}(M)$ pól wektorowych jest algebrą Liego ze względu na komutator $[\cdot, \cdot]$ pól wektorowych.
- (6) Podprzestrzeń $\mathfrak{o}(n)$ macierzy spełniających warunek $a^T = -a$ tworzą podalgebrę $(\mathbb{M}(n), [\cdot, \cdot])$:

$$[a, b]^T = (ab - ba)^T = b^T a^T - a^T b^T = ba - ab = -[a, b].$$

W szczególności, dla $n = 3$, mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x' & z' \\ -x' & 0 & y' \\ -z' & -y' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & x' & z' \\ -x' & 0 & y' \\ -z' & -y' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & yz' - y'z & xy' - x'y \\ -yz' + y'z & 0 & zx' - z'x \\ -xy' + x'y & -zx' + z'x & 0 \end{bmatrix},$$

czyli $\mathfrak{o}(3)$ można utożsamić z z algebrą (\mathbb{R}^3, \times) z iloczynem wektorowym względem orientacji kanonicznej.

DEFINICJA 1. Odwzorowanie liniowe $D: A \rightarrow A$ nazywamy *różniczkowaniem w algebrze*, jeżeli dla każdej pary $a, a' \in A$ mamy

$$D(a \cdot a') = a \cdot D(a') + D(a) \cdot a'.$$

PRZYKŁADY 2.

- (1) Tożsamość Jacobiego w definicji algebry Liego oznacza, że mnożenie jest różniczkowaniem względem siebie.
- (2) Pole wektorowe na rozmaitości jest różniczkowaniem w algebrze funkcji gładkich.
- (3) Niech Φ będzie algebrą łączną. Dla każdego $f \in \Phi$ odwzorowanie

$$D_f: \Phi \rightarrow \Phi: g \mapsto f \cdot g - g \cdot f$$

jest różniczkowaniem w Φ :

$$D_f(g \cdot g') = f \cdot (g \cdot g') - (g \cdot g') \cdot f = (f \cdot g - g \cdot f) \cdot g' + g \cdot (f \cdot g' - g' \cdot f) = D_f(g) \cdot g' + g \cdot D_f(g').$$

Różniczkowanie takie nazywamy *różniczkowaniem wewnętrznym*.

Oznaczmy przez $\text{Der}(\Phi)$ zbiór różniczkowań w algebrze Φ . Oczywiście jest, że tworzą one przestrzeń wektorową oraz że złożenie dwóch różniczkowań nie jest różniczkowaniem.

STWIERDZENIE 1. Niech $a, b \in \text{Der}(\Phi)$. Wówczas ich komutator $ab - ba$ też jest różniczkowaniem w Φ .

DOWÓD:

$$\begin{aligned} (ab - ba)(f \cdot g) &= a(b(f) \cdot g + f \cdot b(g)) - b(a(f) \cdot g + f \cdot a(g)) \\ &= ab(f) \cdot g + fab(g) - ba(f) \cdot g - f \cdot ba(g) \\ &= (ab - ba)(f) \cdot g + f \cdot (ab - ba)(g) \end{aligned}$$

■

STWIERDZENIE 2. $(\text{Der}(\Phi), [,])$, gdzie $[a, b] = ab - ba$, jest algebrą Liego.

DOWÓD: $[a, b] = -[b, a]$, więc mnożenie jest antyprzemienne. Pokazujemy, że spełniona jest tożsamość Jacobiego:

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] &= [a, bc - cb] = abc - acb - bca + cba \\ &= abc - bac - cab + cba + bac - bca - acb + cab \\ &= [[a, b], c] + [b, [a, c]]. \end{aligned}$$

■

1.1. Różniczkowania między algebrami. Niech będą dane dwie algebry Φ i Φ' , oraz homomorfizm algebr $F: \Phi \rightarrow \Phi'$, to znaczy jest to odwzorowanie liniowe zachowujące mnożenie:

$$F(ab) = F(a)F(b).$$

Liniowe odwzorowanie $D: \Phi \rightarrow \Phi'$ nazywamy F -różniczkowaniem, jeżeli

$$D(ab) = D(a)F(b) + F(a)D(b).$$

Przykład: wektor v styczny do rozmaitości M w punkcie q jest różniczkowaniem z algebry funkcji gładkich w algebrę liczb, względem homomorfizmu $f \mapsto f(q)$.

STWIERDZENIE 3. Złożenie różniczkowania z homomorfizmem algebr jest różniczkowaniem.

DOWÓD: Oczywisty. ■

2. Przestrzeń dualna do algebry Liego.

Niech $(A, [,])$ będzie algebrą Liego wymiaru skończonego. Mamy kanoniczny izomorfizm między przestrzenią wektorową A i przestrzenią funkcji liniowych na A^* (przestrzeń dualna). Niech $a \rightarrow \hat{a}$ będzie tą odpowiednością. Zdefiniujmy nawias na funkcjach liniowych na A^*

$$\{\hat{a}, \hat{b}\} = \widehat{[a, b]} \quad (1)$$

Spełnia on tożsamość Jacobiego, bo $[,]$ ją spełnia i jest antyprzemienne. Zakładając spełnienie reguły Leibniza $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$ (nawias jest różniczkowaniem w algebrze łącznej funkcji na A^*) możemy zdefiniować nawias na wszystkich funkcjach wielomianowych, a przez ciągłość niemal jednostajną na wszystkich funkcjach na A^* . Nawias ten jest strukturą Poissona na A^* . I na odwrót, mając liniowy nawias Poissona na A^* (nawias funkcji liniowych jest liniowy), możemy przez relacje (1) wprowadzić w A strukturę algebry Liego. Mamy zatem wzajemnie jednoznaczność między strukturami algebry Liego w przestrzeni wektorowej A i liniowymi nawiasami Poissona na przestrzeni dualnej A^* .

Kilka uwag o strukturze Poissona na rozmaiłości M . Można ją zadawać przez strukturę algebry Liego (nawias Liego) na funkcjach lub, równoważnie, przez odzorowanie wiązek wektorowych $\Lambda: T^*M \rightarrow TM$ (warunek tożsamości Jacobiego jest tu trudniejszy do wypowiedzenia). Nawias na funkcjach zadany jest wzorem

$$\{f, g\} = \langle dg, \Lambda \circ df \rangle.$$

W każdym punkcie rozmaiłości M mamy podprzestrzeń przestrzeni stycznej - obraz odwzorowania Λ . Tożsamość Jacobiego oznacza, że podprzestrzenie te są styczne do podrozmaiłości w M . Podrozmaiłości te zadają foliację M . Liście tej foliacji nazywane są *liściami symplektycznymi* struktury Poissona.

PRZYKŁAD 3. Rozpatrujemy algebrę Liego (\mathbb{R}^3, \times) . Przestrzeń dualną do \mathbb{R}^3 utożsamiamy z \mathbb{R}^3 . W tym utożsamieniu dostajemy

$$\{x, y\} = z, \quad \{y, z\} = x, \quad \{z, x\} = y,$$

i odpowiednie odzorowanie

$$\begin{aligned} \Lambda_{(x,y,z)}(dx) &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \\ \Lambda_{(x,y,z)}(dy) &= -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}, \\ \Lambda_{(x,y,z)}(dz) &= -x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Zatem $\text{im } \Lambda_{(x,y,z)} = \{(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) : \dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z = 0\}$, czyli jest to przestrzeń styczna do sfery o środku w zerze. Liśćmi symplektycznymi dla tej struktury Poissona są sfery o środku w zerze.

W powyższych rozważaniach zakładaliśmy wymiar skończony algebry. Przyjrzyjmy się przykładowi podstawowemu algebrze Liego wymiaru nieskończonego - algebrze pól wektorowych na rozmaiłości M . Istotne jest, by elementy z algebry Liego móc utożsamiać z funkcjami. Pole wektorowe na M można utożsamiać z funkcją na T^*M , liniową na włóknach. Nawias pól wektorowych indukuje więc nawias na funkcjach liniowych na T^*M . Nie wystarcza to zdefiniowania nawiasu Poissona dla wszystkich funkcji. Trzeba jeszcze wiedzieć, jaki jest nawias funkcji stałych na włóknach między sobą i z funkcjami liniowymi. Nawiasy te wynikają z własności nawiasu Liego pól wektorowych względem mnożenia pól

przez funkcje. Mamy $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$ i stąd $\{\hat{X}, f\} = X(f)$. Użyliśmy tu jednego oznaczenia dla funkcji na M i odpowiedniej funkcji, stałej na włóknach, na T^*M . Równość $\{g\hat{X}, f\} = g\{\hat{X}, f\} + \hat{X}\{g, f\}$ implikuje $\{g, f\} = 0$, bo funkcja liniowa i stała na włóknach jest równa zero. W ten sposób dostajemy nawias na wszystkich funkcjach wielomianowych stopnia 1. Stąd, jak i dla algebry wymiaru skończonego, dostajemy nawias Poissona na T^*M . Jest to kanoniczny nawias na przestrzeni fazowej.

3. Działania grupy.

DEFINICJA 2. Lewym (prawym) działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\Phi: G \times X \rightarrow X$ spełniające dwa warunki

- (1) $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x)$, $(\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(hg, x))$
- (2) $\Phi(e, x) = x$.

Inaczej mówiąc, Φ zadaje homomorfizm (antyhomomorfizm) grupy G w grupę bijekcji zbioru X . Mając zadane lewe działanie Φ , prawe działanie $\bar{\Phi}$ dostajemy kładąc $\bar{\Phi}(g, x) = \Phi(g^{-1}, x)$. Możemy więc zawsze przejść od działania lewego do prawego i z powrotem. Jeżeli zbiór ma jakąś strukturę (różniczkową, algebraiczną), to na ogół żądamy, by bijekcje zbioru X respektowały te struktury.

PRZYKŁAD 4. Niech X będzie samą grupą, $X = G$. Lewe (prawe) działanie L (R) grupy G na sobie definiujemy przez

$$\begin{aligned} L(g, h) &= gh, & L_g(h) &= L(g, h) \\ R(g, h) &= hg, & R_g(h) &= R(g, h) \end{aligned}$$

Dla grupy Liego L_g i R_g są dyfeomorfizmami, ale nie homomorfizmami grup. Dla każdego $g \in G$ automorfizmem grupy jest odwzorowanie

$$\text{Ad}_g: G \rightarrow G: h \mapsto L_g R_{g^{-1}} h = ghg^{-1} = R_{g^{-1}} L_g h,$$

$$\text{Ad}_g(hh') = gh h' g^{-1} = ghg^{-1} g h' g^{-1} = \text{Ad}_g(h) \text{Ad}_g(h').$$

Sprawdzamy, że homomorfizmy Ad_g definiują lewe działanie grupy na sobie:

$$\text{Ad}_{gg'}(h) = (gg')h(gg')^{-1} = g(g'hg'^{-1})g^{-1} = \text{Ad}_g(\text{Ad}_{g'}(h)).$$

Ad nazywane jest działaniem dołączonym (reprezentacją dołączoną) grupy. Zauważmy tu, że $\text{Ad}_g(g) = ggg^{-1} = g$ i że dla grupy abelowej $\text{Ad}_g = \text{id}_G$.

4. Pola lewo- i prawo-niezmiennicze.

DEFINICJA 3. Polem lewo-niezmiennicznym na grupie G nazywamy pole X spełniające równość $(L_g)_* X = X$ dla każdego $g \in G$.

Zastępując L_g przez R_g dostajemy definicję pola prawo-niezmiennicze. Oznacza to, że jeżeli krzywa $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in G$ reprezentuje wektor $X(h)$ pola lewo-niezmiennicznego (prawo-niezmiennicznego), to krzywa $g\gamma: t \mapsto g\gamma(t)$ ($\gamma g: t \mapsto \gamma(t)g$) reprezentuje wektor $X(gh)$ ($X(hg)$). I dalej, jeżeli $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in G$ jest krzywą całkową pola lewo-niezmiennicznego (prawo-niezmiennicznego) X , to krzywa $g\gamma$ (γg) jest też krzywą całkową tego pola. W szczególności, wynika stąd, że jeżeli $\gamma(0) = e$, to

$$\gamma(s+t) = \gamma(t)\gamma(s) = \gamma(t)\gamma(s),$$

zarówno dla prawo- jak i lewo-niezmiennicznych pól. Krzywa całkową przechodząca przez e jest jednoparametrową podgrupą grupy G .

Z definicji pola niezmienniczego wiemy, że pole takie jest jednoznacznie wyznaczone przez swoją wartość w jednostce grupy. Dla każdego $v \in \mathbb{T}_e G$ mamy w punkcie $g \in G$ dwa wektory, należące odpowiednio do lewo- i prawo-niezmienniczego pola. Jaka jest między nimi relacja? Niech γ będzie krzywą reprezentującą wektor $v \in \mathbb{T}_e G$. Krzywa $g\gamma$ reprezentuje wektor ${}_v X(g)$ odpowiedniego pola lewo-niezmienniczego, a krzywa γg wektor $X_v(g)$ pola prawo-niezmienniczego. Stąd $g\gamma(t) = \text{Ad}_g(\gamma(t)g)$, $\gamma(t)g = \text{Ad}_{g^{-1}}(g\gamma(t))$ i

$${}_v X(g) = \mathbb{T} \text{Ad}_g(X_v(g)).$$

STWIERDZENIE 4. *Odwzorowanie $I_G: G \rightarrow G: g \mapsto g^{-1}$ zadaje odpowiedniość między polami lewo- i prawo-niezmienniczymi.*

DOWÓD: Niech γ będzie jednoparametrową podgrupą w G , więc krzywą całkową pola lewo- i prawo-niezmienniczego, odpowiadającą wektorowi $v \in \mathbb{T}_e G$. Krzywa $t \mapsto g\gamma(t)$ jest krzywą całkową pola lewo- niezmienniczego. Mamy

$$(g\gamma(t))^{-1} = (\gamma(t))^{-1}g^{-1} = \gamma(-t)g^{-1},$$

więc $I_G \circ \gamma$ jest krzywą całkową pola prawo-niezmienniczego, odpowiadającego wektorowi $-v$. ■

Mamy więc $(I_G)_* {}_v X = X_{-v}$.

5. Algebra Liego grupy Liego.

Dla każdego diffeomorfizmu $\Phi: M \rightarrow M$ mamy $\Phi_*([X, Y]) = [\Phi_*X, \Phi_*Y]$, więc nawias Liego pól lewo-niezmiennicznych (prawo-niezmiennicznych) jest też polem lewo-niezmiennicznym (prawo-niezmiennicznym). Pola lewo-niezmienniczne i pola prawo-niezmienniczne na grupie G tworzą podalgebry Liego algebry wszystkich pól wektorowych na G . Nazywamy je *algebrami Liego* grupy Liego G . Dla ujednocznienia, często przez algebrę Liego grupy rozumie się algebrę pól lewo-niezmiennicznych i oznacza \mathfrak{g} . Jako przestrzenie wektorowe, algebry Liego grupy są izomorficzne przestrzeni $\mathbb{T}_e G$ i na tą przestrzeń przenosi się strukturę algebry Liego. Trzeba tylko pamiętać którą. Jak już wiemy, odwzorowanie $(I_G)_*$ zadaje izomorfizm lewej i prawej algebry Liego. Z drugiej strony, na przestrzeni stycznej $\mathbb{T}_e G$ odwzorowanie $\mathbb{T}I_G$ jest minus identycznością, więc

$$[v, w]_l = -[-v, -w]_p = -[v, w]_p,$$

więc lewy i prawy nawias Liego na $\mathbb{T}_e G$ różnia się znakiem. Lewe przesunięcie L_g zadaje izomorfizm przestrzeni $\mathbb{T}_e G$ i $\mathbb{T}_g G$, więc zadaje też utożsamienie wiązki stycznej $\mathbb{T}G$ z iloczynem kartezjańskim $G \times \mathfrak{g}$. Ale TYLKO JAKO WIĄZKI WEKTOROWEJ!!, bo nawias Liego pól wektorowych NIE jest nawiasem funkcji o wartościach w \mathfrak{g} .

5.1. Uwaga ogólna. Redukcja Poissona. Algebry Liego grupy Liego G została zdefiniowana jako podalgebra algebry Liego pól wektorowych na G . Strukturą podstawową jest tu więc struktura wiązki stycznej, a strukturę algebry Liego grupy dostajemy przez jej redukcję. Z drugiej strony wiemy, że strukturze algebry Liego na przestrzeni wektorowej V wymiaru skończonego odpowiada jednoznacznie (liniowa) struktura Poissona na przestrzeni dualnej V^* (nawias Poissona funkcji na V^*). Mamy więc też strukturę Poissona na \mathfrak{g}^* . Ale wiemy też, że struktura wiązki stycznej (nawias Liego pól wektorowych) ma swój odpowiednik na wiązce dualnej do wiązki stycznej, na wiązce kostycznej. Strukturą tą jest kanoniczna struktura symplektyczna i odpowiadający jej nawias Poissona funkcji na wiązce kostycznej. Wszystko jest tu kanoniczne, powinna więc istnieć procedura otrzymywania nawiasu Liego funkcji na \mathfrak{g}^* . Wygląda ona tak: Mamy odwzorowanie

$$L_*: \mathbb{T}G \rightarrow \mathfrak{g}$$

i dualne odwzorowanie

$$L^*: \mathbb{T}^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Oczywistym jest, że dla $v \in \mathfrak{g}$, $L_*^{-1}(v)$ jest obrazem lewo-niezmienniczego pola ${}_vX$, a dla funkcji \hat{v} ,

$${}_v\widehat{X} = \hat{v} \circ L^*.$$

Dostajemy natychmiast, relację między nawiasami Poissona

$$\{\hat{v}, \hat{w}\}_{\mathfrak{g}} \circ L^* = \{{}_v\widehat{X}, {}_w\widehat{X}\}$$

i ogólnie, dla dowolnych funkcji f, g na \mathfrak{g}^* ,

$$\{f, g\}_{\mathfrak{g}} \circ L^* = \{f \circ L^*, g \circ L^*\}.$$

Relacja ta jest kanonicznym przykładem *redukcji Poissona*.

5.2. Przykład podstawowy. Niech $G = Gl(n)$. Jako rozmaitość różniczkowa, jest to otwarta podrozmaitość przestrzeni wektorowej $\mathbb{M}(n)$. Zatem jej przestrzeń styczną (w dowolnym punkcie) utożsamiamy z $\mathbb{M}(n)$. Przestrzeń $\mathbb{M}(n)$ jest algebrą łączną z działaniem mnożenia macierzy. Jak każda algebra łączna, jest też algebrą Liego z działaniem określonym przez komutator w algebrze łącznej. Pokażemy, że ta struktura algebry Liego pokrywa się ze strukturą algebry Liego grupy $Gl(n)$. Niech $v, w \in \mathbb{M}(n)$ i niech $t \mapsto e + tv$, $t \mapsto e + tw$ będą krzywymi w $Gl(n)$, reprezentującymi wektory $v, w \in T_eG$, gdzie e jest macierzą jednostkową (jednością w grupie). Wektory ${}_vX(a)$ i ${}_wX(a)$ są reprezentowane odpowiednio przez $t \mapsto a + tav$, $t \mapsto a + taw$. Dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(G)$ i dowolnego punktu $a \in Gl(n)$ obliczymy $[{}_vX, {}_wX](f)(a)$:

$$\begin{aligned} [{}_vX, {}_wX](f)(a) &= {}_vX({}_wX(f))(a) - {}_wX({}_vX(f))(a) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ({}_wX(f))(a + tav) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ({}_vX(f))(a + taw) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f((a + tav) + s(a + tav)w) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f((a + taw) + s(a + taw)v) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(a + tav + saw + staww) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(a + taw + sav + stawv) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f'(a + tav)(aw + tavw) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f'(a + taw)(aw + tawv) \\ &= f''(a)(av, aw) + f'(a)(avw) - f''(a)(aw, av) + f'(a)(awv) = f'(a)(a(vw - wv)) \\ &= [v, w]X(f)(a), \end{aligned}$$

gdzie $[v, w]$ oznacza komutator macierzy v i w . Pokazaliśmy więc, że nawias Liego w algebrze Liego $\mathfrak{gl}(n)$ jest równy komutatorowi macierzy.

5.3. Podgrupy i podalgebry. Wiadomo, co to jest podgrupa grupy. Sprawa się komplikuje, gdy mówimy o podgrupach w kontekście grup Liego. Nie wystarczy zajmować się podgrupami, które są podrozmaitościami w zwykłym sensie (podrozmaitość jest lokalnie wykresem odzworowania). Przykładem jest jednoparametrowa podgrupa na torusie: może ona dawać gęste nawinięcie na torus. Trzeba zatem dopuścić podgrupy (w zwykłym sensie), które posiadają własną strukturę rozmaitości różniczowej czyniąc z niej grupę Liego, a włożenie podgrupy w grupę jest immersją rozmaitości (tzn. pochodna ma maksymalny rząd).

STWIERDZENIE 5. Niech $\iota: H \hookrightarrow G$ będzie podgrupą Liego w G . Wówczas \mathfrak{h} jest podalgebrą Liego w \mathfrak{g} , przy naturalnym utożsamieniu \mathfrak{h} z $T\iota(T_eH)$.

DOWÓD: Każdy wektor $v \in \mathfrak{h}$ definiuje pole lewo-niezmiennicze ${}_vX$ na H i pole lewo-niezmiennicze ${}_vY$ na G . Ponieważ ι jest injektywną immersją, na $H \subset G$ pole ${}_vY$ pokrywa się z obrazem pola ${}_vX$. Lokalnie (w H), obraz ι jest podrozmaitością w zwykłym sensie, więc nawias Liego $[{}_vY, {}_wY]$ pokrywa się z nawiasem Liego $[{}_vX, {}_wX]$. ■

TWIERDZENIE 1. Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego grupy G i niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ będzie jej podalgebrą Liego. Wówczas istnieje dokładnie jedna spójna podgrupa Liego $H \hookrightarrow G$ taka, że \mathfrak{h} jest algebrą Liego grupy.

DOWÓD: Jednoznaczność wynika z tego, że spójna grupa Liego H jest generowana przez otoczenie jedynek. Niech teraz $v \in \mathfrak{h}$ i niech ${}_v X$ będzie lewo-niezmienniczym polem na G . Wektory takich pól lewo-niezmiennicznych rozpinają w każdym punkcie $g \in G$ podprzestrzeń styczną D_g przestrzeni $T_g G$. Jest to dystrybucja spełniająca założenia twierdzenia Frobeniusa. Istotnie, jeżeli Y_1, Y_2 są polami należącymi do dystrybucji D , to $Y_i = \sum_j f_i^j e_j X$, gdzie (e_j) jest bazą \mathfrak{h} i dostajemy

$$[Y_1, Y_2] = \sum_{j,k} f_j^1 f_k^2 [e_j X, e_k X] + f_j^1 e_j X (f_k^2)_{e_k} X - f_k^2 e_k X (f_j^1)_{e_j} X.$$

Każdy z tych składników należy do dystrybucji D , więc D jest zamknięta ze względu na nawias Liego. Na mocy twierdzenia Frobeniusa z geometrii różniczkowej (w wersji globalnej) istnieje maksymalna spójna (zanurzona) podrozmaitość całkowa dla D przechodząca przez $e \in G$. Nazwijmy H . Pokażemy, że H jest podgrupą Liego w G (wystarczy pokazać, że podzbiór H jest zamknięty ze względu na mnożenie i branie odwrotności). Ponieważ H jest łukowo spójna, dla $a \in H$ istnieje gładka krzywa $\gamma : [0, 1] \rightarrow H$ taka, że $\gamma(0) = e$ i $\gamma(1) = a$. Dystrybucja D jest niezmiennicza na dyfeomorfizm $L_{a^{-1}}$, więc krzywa $t \mapsto L_{a^{-1}}(\gamma(1-t))$ leży w H i łączy e z a^{-1} . Podobnie, jeżeli $\check{\gamma} : [0, 1] \rightarrow H$ jest taka, że $\check{\gamma}(0) = e$ i $\check{\gamma}(1) = b$, to kawałkami gładka krzywa

$$[0, 2] \ni t \mapsto \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t \leq 1, \\ L_a(\check{\gamma}(1-t)) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

jest krzywą całową dla dystrybucji D . Łączy ona e z ab . ■

Kończymy tą część twierdzeniem o istnieniu grupy Liego dla każdego skończonego wymiarowej algebry Liego. Twierdzenie to jest (między innymi) konsekwencją twierdzenia Ado, które mówi, że każda skończone wymiarowa algebra Liego może być wiernie reprezentowana jako podalgebra $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}, n)$ dla pewnego n .

TWIERDZENIE 2. Niech \mathfrak{g} będzie skończone wymiarową algebrą Liego nad \mathbb{R} . Wówczas istnieje dokładnie jedna spójna i jednospójna grupa Liego G taka, że \mathfrak{g} jest algebrą Liego grupy G .

6. Algebry Liego najważniejszych grup Liego.

6.1. SU(2).

Niech $G = \text{SU}(2)$. Algebra Liego tej grupy oznaczana jest symbolem $\mathfrak{su}(2)$. Grupa $\text{SU}(2)$ może być opisana na kilka sposobów:

$$\begin{aligned} \text{SU}(2) &= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{bmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Innymi słowy, $\text{SU}(2)$ jest zbiorem macierzy 2×2 takich, że $\bar{A}^T = A^{-1}$ i $\det A = 1$. Wynika stąd, że jako rozmaitość różniczkowa $\text{SU}(2)$ jest dyfeomorficzna z trójwymiarową sferą w \mathbb{R}^4 . Algebra Liego $\mathfrak{su}(2)$ jest podalgebrą $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ macierzy spełniających warunki $A^T = -\bar{A}$ i $\text{Tr} A = 0$. Przykładową bazą $\mathfrak{su}(2)$ jest

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tak więc $\mathfrak{su}(2) = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że relacje komutacyjne pomiędzy e_1, e_2 i e_3 są następujące:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2e_3, \\ [e_3, e_1] &= -2e_2, \\ [e_2, e_3] &= -2e_1, \end{aligned}$$

6.2. $SU(n)$.

Dla $v \in \mathfrak{su}(n)$ mamy $e^{tv} \in SU(n)$, czyli

$$(e^{tv}x | e^{tv}y) = (x | y)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{C}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Różniczkujemy obie strony po t i kładziemy $t = 0$, by otrzymać

$$(vx | y) + (x | vy) = 0$$

dla wszystkich x, y . Oznacza to, że $v^* = -v$, czyli v jest macierzą antyhermitowską. Ponadto wzór $\det e^v = e^{\text{Tr}v}$ pokazuje, że macierze z algebry $\mathfrak{su}(n)$ muszą być bezśladowe. I na odwrót, jeżeli v jest bezśladową macierzą hermitowską, to

$$(e^v)^{-1} = e^{-v} = e^{v^*} = (e^v)^* \quad \text{i} \quad \det(e^v) = e^{\text{Tr}v} = 1,$$

czyli $t \mapsto e^{tv}$ jest jednoparametrową podgrupą w $SU(n)$. Wnioskujemy, że algebrą $\mathfrak{su}(n)$ jest przestrzeń macierzy antyhermitowskich o śladzie zero. Jej wymiar wynosi $2n^2 - 2$.

6.3. $SL(n, \mathbb{K})$. Ze wzoru $\det e^m = e^{\text{Tr}m}$ widzimy, że $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ jest przestrzenią macierzy $n \times n$ o wyrazach z \mathbb{K} i o śladzie równym 0. Teraz zauważmy, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mamy

$$\dim SL(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$$

czyli jest to wymiar przestrzeni macierzy bezśladowych. Podobnie dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mamy

$$\dim SL(n, \mathbb{C}) = 2n^2 - 2$$

czyli rzeczywisty wymiar przestrzeni bezśladowych macierzy zespolonych $n \times n$.

6.4. $Sp(2n, \mathbb{R})$.

Grupa

$$Sp(2n, \mathbb{R})$$

jest to grupa przekształceń symplektycznych przestrzeni symplektycznej wymiaru $2n$ (czyli przestrzeni wektorowej nad \mathbb{R} wymiaru $2n$ z wyróżnioną niezdegenerowaną antysymetryczną formą biliniową). Można ją konkretnie zdefiniować jako zbiór takich macierzy $m \in M_{2n}(\mathbb{R})$, że

$$m^\top J_n m = J_n,$$

gdzie

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

Zauważmy, że $Sp(2n, \mathbb{R}) \subset SL(2n, \mathbb{R})$. Algebra Liego grupy $Sp(2n, \mathbb{R})$ składa się z macierzy $m \in M_{2n}(\mathbb{R})$ takich, że

$$m^\top J_n + J_n m = 0.$$

6.5. $Sp(n)$.

Grupa $Sp(n)$ jest to podgrupa grupy $GL(n, \mathbb{H})$ (która z kolei jest podgrupą $GL(4n, \mathbb{R})$) złożona z przekształceń zachowujących formę

$$\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \ni (u, w) \mapsto \sum_{i=1}^n \bar{u}_i w_i$$

gdzie sprzężenie kwaternionu $x = a + bi + cj + dk$ definiujemy jako

$$\bar{x} = a - bi - cj - dk.$$

Jest to rzeczywista (i zwarta) grupa Liego wymiaru $n(2n + 1)$. Jej algebrę Liego można zrealizować jako algebrę antyhermitowskich¹ macierzy kwaternionowych $n \times n$.

¹Należy w definicji sprzężenia hermitowskiego macierzy użyć sprzężenia kwaternionów

7. Jednospójność i grupy nakrywające.

Niech X będzie łukowo spójną przestrzenią topologiczną. Pętlą w X nazywamy ciągle odwzorowanie $\mathbb{T} \rightarrow X$. Pętla γ jest *ściągalna*, jeśli istnieje odwzorowanie $h : \mathbb{T} \times [0, 1] \rightarrow X$ takie, że $h(z, 1) = \gamma(z)$ i $h(z, 0) = \gamma(1)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{T}$ i $h(1, t) = \gamma(1)$ dla $t \in [0, 1]$. Przestrzeń X nazwiemy przestrzenią *jednospójną*, jeśli każda pętla w X jest ściągalna.

Dla każdej odpowiednio regularnej przestrzeni X (półlokalnie jednospójnej, czyli każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U takie, że każdą pętlę przy x zawartą w U można ściągnąć do punktu, ale niekoniecznie wewnątrz U ; każda rozmaitość jest taka) istnieje przestrzeń topologiczna \tilde{X} wraz z odwzorowaniem $p : \tilde{X} \rightarrow X$ taka, że

- X jest jednospójna,
- p jest nakryciem (każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U takie, że $p^{-1}(U)$ jest sumą rozłączną $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\iota \in \mathcal{I}} V_\iota$ zbiorów otwartych $(V_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}}$ i dla każdego ι odwzorowanie $p|_{V_\iota} : V_\iota \rightarrow U$ jest homeomorfizmem).

Przestrzeń \tilde{X} jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do homotopijnej równoważności. Nazywamy ją *nakryciem uniwersalnym* przestrzeni X . Jeśli X jest rozmaitością, to jest nią również \tilde{X} .

Ważnym faktem jest to, że jeśli X jest grupą Liego, to \tilde{X} również jest grupą Liego, a kanoniczny rzut $p : \tilde{G} \rightarrow G$ jest homomorfizmem grup Liego. Zgodnie z punktem • powyżej, jądro tego homomorfizmu jest dyskretną podgrupą w \tilde{G} .

7.1. Przykłady.

- (1) Niech $X = \mathbb{T}$. Wówczas nakryciem uniwersalnym X jest (może być) przestrzeń $\tilde{X} = \mathbb{R}$. Odwzorowanie $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest dane wzorem

$$p(t) = e^{i\pi t}.$$

- (2) Grupa $SL(2, \mathbb{C})$ jest nakryciem uniwersalnym grupy przekształceń Lorentza zachowujących kierunek czasu i orientację przestrzenną.
- (3) Grupa $SU(2)$ jest nakryciem uniwersalnym grupy $SO(3)$.

8. Homomorfizmy grup Liego.

TWIERDZENIE 3. Niech $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ będzie ciąglym homomorfizmem. Wówczas istnieje wektor $v \in \mathfrak{g}$ taki, że

$$\gamma(t) = \exp(tv) \tag{2}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

DOWÓD: Niech \mathcal{U} i cV będą otoczeniami $0 \in \mathfrak{g}$ a \mathcal{O} i \mathcal{W} otoczeniami $e \in G$ takimi, że

- \exp jest dyfeomorfizmem \mathcal{U} na \mathcal{O} ,
- $\mathcal{V} + \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$,
- $\mathcal{W} = \exp \mathcal{V}$,
- $\mathcal{W}^2 \subset \mathcal{O}$.

(Aby skonstruować takie otoczenia zaczynamy od pary \mathcal{U}, \mathcal{O} spełniającej pierwszy warunek. Dalej niech \mathcal{W}_1 będzie takie, że $\mathcal{W}_1^2 \subset \mathcal{O}$ (takie otoczenie istnieje na mocy ciągłości mnożenia w G , zauważmy, że w szczególności $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{O}$) i niech $\mathcal{V}_1 = \exp^{-1}(\mathcal{W}_1)$. Niech \mathcal{V}_2 będzie takie, że $\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}$ (istnieje na mocy ciągłości dodawania w \mathfrak{g}) i niech $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. Wówczas spełniony jest drugi warunek. Niech $\mathcal{W} = \exp(\mathcal{V})$ (spełniony jest więc warunek trzeci). Mamy $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1$, więc $\mathcal{W} = \exp(\mathcal{V}) \subset \exp(\mathcal{V}_1) = \mathcal{W}_1$, a więc $\mathcal{W}^2 \subset \mathcal{O}$.)

Odwzorowanie γ jest ciągle, więc istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\gamma(t) \in \mathcal{W}$ dla $|t| < \varepsilon$. Ustalmy $a \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Wówczas istnieje $v \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ taki, że

$$\gamma(a) = \exp v.$$

Ponadto istnieje $w \in \mathcal{V}$ taki, że

$$\gamma\left(\frac{a}{2}\right) = \exp w.$$

Ponieważ $\gamma\left(\frac{a}{2}\right)\gamma\left(\frac{a}{2}\right) = \gamma(a)$ mamy

$$\exp(w)\exp(w) = \exp(v).$$

Pamiętajmy, że $t \mapsto \exp(tw)$ jest jednoparametrową podgrupą, więc $\exp(w)\exp(w) = \exp(2w)$. Ponadto $2w \in \mathcal{V} + \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, a \exp jest jednoznaczne na \mathcal{U} . Stąd $v = 2w$, a więc

$$\gamma\left(\frac{a}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}v\right).$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\gamma\left(\frac{a}{2^n}\right) = \exp\left(\frac{1}{2^n}v\right).$$

dla wszystkich n , a korzystając ponownie z tego, że γ i $t \mapsto \exp(tv)$ są homomorfizmami mamy

$$\gamma\left(\frac{m}{2^n}a\right) = \exp\left(\frac{m}{2^n}v\right)$$

dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ liczby

$$\left\{\frac{m}{2^n}a \mid m \in \mathbb{Z} \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

tworzą zbiór gęsty w \mathbb{R} i zarówno γ i $t \mapsto \exp(tv)$ są ciągle względem t otrzymujemy (2). ■

WNIOSEK 1.

- (1) Każda ciągła jednoparametrowa podgrupa G jest gładka.
- (2) Istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem ciągłych jednoparametrowych podgrup w G i \mathfrak{g} .

Korzystając z wniosku 1(1) można udowodnić również następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 4. Niech $\phi : G \rightarrow H$ będzie ciągłym homomorfizmem. Wówczas ϕ jest gładki. W szczególności każda skończenie wymiarowa reprezentacja grupy Liego jest gładka.

STWIERDZENIE 6. Niech $\phi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem grup Liego. Wówczas ϕ' ma stały rząd.

DOWÓD: Niech $a, b \in G$. Wykażemy, że

$$L'_{\phi(ab^{-1})}\phi'(b) = \phi'(a)L'_{ab^{-1}}. \quad (3)$$

Ponieważ lewe przesunięcia są dyfeomorfizmami, z (3) wynika, że rzędy $\phi'(a)$ i $\phi'(b)$ są równe.

Niech $v \in T_bG$ będzie reprezentowany krzywą γ , wówczas $\phi'v$ jest reprezentowane krzywą $\phi \circ \gamma$ a $L'_{ab^{-1}}v$ krzywą $ab^{-1}\gamma$. Stąd $L'_{\phi(ab^{-1})}\phi'(b)$ jest reprezentowane krzywą

$$t \mapsto \phi(ab^{-1})\phi(\gamma(t)) = \phi(ab^{-1}\gamma(t))$$

(ϕ jest homomorfizmem), a wektor $\phi'(a)L'_{ab^{-1}}v$ jest reprezentowany krzywą

$$t \mapsto \phi(ab^{-1}\gamma(t)).$$

Stąd rządana równość. ■

WNIOSEK 2. Niech $\phi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem grup Liego. Wówczas istnieje otoczenie \mathcal{U} elementu neutralnego w G takie, że $\phi(\mathcal{U})$ jest podrozmaitością w H .

Wniosek 2 jest konsekwencją „twierdzenia o stałym rzędzie”.

TWIERDZENIE 5. Niech $\phi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem grup Liego. Oznaczmy algebrę Liego H przez \mathfrak{h} . Wówczas

- (1) Odwzorowanie $\phi'(e) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem algebr Liego.
- (2) Diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi'(e)} & \mathfrak{h} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

jest przemienny.

DOWÓD: Zajmijmy się na początek punktem (2). Niech $v \in \mathfrak{g}$. Wówczas $t \mapsto \phi(\exp(tv))$ jest jednoparametrową podgrupą w H . Podobnie $t \mapsto \exp(t\phi'(e)v)$. Obie podgrupy mają tę samą pochodną w $e \in H$ więc są równe. Stąd $\exp(\phi'(e)v) = \phi(\exp(v))$.

Niech $X \in \mathcal{X}(G)$ będzie polem lewo niezmienniczym. Zauważmy najpierw, że pola takie można transportować przy pomocy homomorfizmów grup. Obetnijmy to pole do otoczenia \mathcal{U} takiego jak we wniosku 2. Wówczas ϕ_*X jest polem na $\phi(\mathcal{U})$ niezmienniczym na lewe przesunięcia o elementy $\phi(G)$,² gdyż na mocy (3) mamy

$$\begin{aligned} L_{\phi(c)_*}(\phi_*X)(d) &= L'_{\phi(c)}(\phi_*X)(c^{-1}d) \\ &= L'_{\phi(c)}\phi'(c^{-1}d)X(c^{-1}d) \\ &= \phi'(d)L'_cX(c^{-1}d) \\ &= \phi'(d)X(d) = (\phi_*X)(d) \end{aligned}$$

czyli $L_{\phi(c)_*}(\phi_*X) = (\phi_*X)$ (korzystając ze wzoru (3) podstawiamy $c = ab^{-1}$ i $b = c^{-1}d$, co daje $a = d$ i $ab^{-1} = d$).

Pole ϕ_*X lewo niezmiennicze na $\phi(\mathcal{U})$ można rozszerzyć do pola lewo niezmienniczego na otoczeniu $e \in H$ (do tego wystarczy tylko znać jego wartość w $e \in H$). Zatem $\phi'(e)\mathfrak{g}$ jest podalgebrą Liego w \mathfrak{h} . Odwzorowanie $\phi'(e)$ jest homomorfizmem algebr Liego na mocy wzoru

$$\Phi_*[X, Y] = [\Phi_*X, \Phi_*Y]$$

słusznego dla transportowalnych pól wektorowych. ■

WNIOSEK 3. Załóżmy, że G jest spójna i niech $\phi_1, \phi_2 : G \rightarrow H$ będą homomorfizmami grup Liego takimi, że $\phi'_1(e) = \phi'_2(e)$. Wówczas $\phi_1 = \phi_2$.

DOWÓD: Niech \mathcal{U} będzie otoczeniem $e \in G$ takim, że \exp jest dyfeomorfizmem otoczenia $0 \in \mathfrak{g}$ na \mathcal{U} . Dla $a \in \mathcal{U}$ mamy $a = \exp(v)$ dla dokładnie jednego $v \in \mathfrak{g}$. Zatem

$$\phi_1(a) = \phi_1(\exp(v)) = \exp(\phi'_1(e)v) = \exp(\phi'_2(e)v) = \phi_2(\exp(v)) = \phi_2(a).$$

Ponieważ każdy element G jest skończony iloczynem elementów z \mathcal{U} , mamy $\phi_1 = \phi_2$. ■

TWIERDZENIE 6. Niech G będzie spójna i jednospójna i niech H będzie grupą Liego o algebrze Liego \mathfrak{h} . Niech $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup Liego $\phi : G \rightarrow H$ taki, że

$$\lambda = \phi'(e). \tag{4}$$

DOWÓD: Jednoznaczność wynika natychmiast z wniosku 3.

Rozważmy grupę Liego $G \times H$. Jej algebrą Liego jest $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ z nawiasem

$$[(v_1, w_1), (v_2, w_2)] = ([v_1, v_2], [w_1, w_2]).$$

²Trzeba tu brać tylko "małe" przesunięcia, czyli takie, które nie wyprowadzają poza \mathcal{U} .

Niech

$$\check{\mathfrak{g}} = \{(v, \lambda v) \mid v \in \mathfrak{g}\}.$$

Wówczas $\check{\mathfrak{g}}$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, więc na mocy twierdzenia 1 istnieje podgrupa Liego \check{G} w $G \times H$ taka, że $\check{\mathfrak{g}}$ jest jej algebrą Liego. Pokażemy, że jest ona wykresem homomorfizmu ϕ spełniającego (4).

Niech π_1 i π_2 będą rzutami \check{G} na współrzędne. Jest jasne, że odpowiadające im homomorfizmy algebr Liego są rzutami:

$$\begin{aligned}\pi'_1(e) : (v, \lambda v) &\longmapsto v \in \mathfrak{g}, \\ \pi'_2(e) : (v, \lambda v) &\longmapsto \lambda v \in \mathfrak{h}.\end{aligned}$$

Jasne jest również, że $\pi'_1(e)$ jest izomorfizmem. Oznacza to, że obraz π_1 zawiera otoczenie jedności w G , a więc na mocy spójności G homomorfizm ten jest surjekcją o dyskretnym jądrze. Nietrudno teraz wykazać, że $\pi_1 : \check{G} \rightarrow G$ jest w istocie nakryciem.³

Teraz z jednospojności G wynika, że π_1 jest dyfeomorfizmem. Oznacza to, że możemy zdefiniować $\phi = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. ■

9. Działanie grup na rozmaitości.

Przypomnijmy, że (lewym) działaniem grupy G na rozmaitości M nazywamy gładkie odwzorowanie $\Phi: G \times M \rightarrow M$ spełniające warunki

- (1) $\forall p \in M, \Phi(e, p) = p$, gdzie e jest elementem neutralnym grupy,
- (2) dla wszystkich $g, h \in G$ oraz $p \in M$ mamy $\Phi(gh, p) = \Phi(g, \Phi(h, p))$.

Będziemy też oznaczać: punkt $\Phi(g, p)$ po prostu gp , odwzorowanie $M \rightarrow M: p \mapsto gp$ przez Φ_g i odwzorowanie $G \rightarrow M: g \mapsto \Phi(g, p)$ przez Φ_p . Działanie nazywamy

- (1) *efektywnym*, jeżeli dla każdego $g \neq e$ istnieje $p \in M$ takie, że $gp \neq p$. Innymi słowy, $\Phi_g = \text{id}_M$ tylko dla $g = e$,
- (2) *tranzytywnym*, jeżeli dla każdej pary $p, p' \in M$ istnieje $g \in G$ takie, że $p' = gp$,
- (3) *wolnym*, jeżeli dla każdego $g \neq e$ i dla każdego $p \in M$ mamy $gp \neq p$,

DEFINICJA 4. Niech Φ będzie działaniem grupy G na rozmaitości M . *Stabilizatorem (podgrupą izotropii)* punktu $p \in M$ nazywamy zbiór

$$G_p = \{g \in G \mid \Phi(g, p) = p\}.$$

Orbitą punktu $p \in M$ nazywamy zbiór $O_p = \Phi_p(G)$.

Łatwo sprawdzamy, że G_p jest domkniętą podgrupą: jest to zbiór domknięty, bo równy $\Phi_p^{-1}(p)$ i podgrupą, bo $e \in G_p$ i dla $g, h \in G_p$ mamy $(gh)p = g(hp) = p$ i $g^{-1}p = g^{-1}(gp) = p$. Dla domkniętej podgrupy grupy G zbiór orbit prawego działania jest rozmaitością oznaczaną G/H . Fakt ten przyjmujemy bez dowodu. Na G/H przenosi się lewe działanie L . Jest ono tranzytywne z podgrupą izotropii klasy elementu neutralnego równą H .

STWIERDZENIE 7. Niech G_p będzie podgrupą izotropii punktu p dla działania Φ grupy G na rozmaitości M . Dla $p' = gp$ podgrupą izotropii $G_{p'}$ sprzężoną z G_p :

$$G_{p'} = gG_p g^{-1}.$$

DOWÓD: Mamy dla $h \in G_p$

$$(ghg^{-1})p' = gh(g^{-1}gp) = g(hp) = gp = p',$$

czyli $ghg^{-1} \in G_{p'}$ i w drugą stronę: dla $h' \in G_{p'}$

$$(g^{-1}h'g)p = g^{-1}(h'p') = g^{-1}p' = p,$$

czyli $g^{-1}h'g \in G_p$. ■

³Prześledzenie szczegółów dowodu tego faktu jest to dobrym zadaniem dla czytelnika.

STWIERDZENIE 8. Odwzorowanie $\Phi_p: G \rightarrow M$ indukuje bijekcję $G/G_p \rightarrow O_p$.

DOWÓD: Niech $p' = gp$. Równość $\Phi_p(h) = \Phi_p(h') = p'$ jest równoważna

$$\Phi(h, p) = \Phi(h', p) = \Phi(g, p)$$

i

$$\Phi(g^{-1}, \Phi(h, p)) = \Phi(g^{-1}h, p) = \Phi(g^{-1}h', p) = p,$$

czyli $g^{-1}h, g^{-1}h' \in G_p$ i $h, h' \in gG_p$. Oznacza to, że $\Phi_p(h) = \Phi_p(h')$ wtedy i tylko wtedy, gdy h i h' rzutują się na ten sam element w G/G_p . ■

9.1. Pochodne działanie algebry. Niech $\Phi: G \times M \rightarrow M$ będzie działaniem grupy G na rozmaitości M . Mamy stąd styczne odwzorowanie

$$\mathbb{T}\Phi: \mathbb{T}G \times \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{T}M.$$

Nieco później pokażemy, że $\mathbb{T}G$ ma strukturę grupy i że odwzorowanie $\mathbb{T}\Phi$ jest działaniem tej grupy na $\mathbb{T}M$. Oczywiście, działaniem grupy G na $\mathbb{T}M$ jest odwzorowanie

$$G \times \mathbb{T}M \ni (g, v) \mapsto \mathbb{T}\Phi_g(v) \in \mathbb{T}M.$$

Nazywamy je *działaniem stycznym* grupy G .

Z kolei odwzorowanie styczne ze względu na argument grupowy

$$\mathbb{T}G \times M \ni (v, p) \mapsto \mathbb{T}\Phi_p(v) \in \mathbb{T}M,$$

obcięte do przestrzeni \mathbb{T}_eG jest odwzorowaniem

$$\mathfrak{g} \times M \ni (v, p) \mapsto \mathbb{T}\Phi_p(v) \in \mathbb{T}M.$$

Dla ustalonego $v \in \mathfrak{g}$ jest to pole wektorowe. Nazywamy je *polem fundamentalnym* dla $-v$ i oznaczamy $-vX_M$. Dobór znaków motywowany jest poniższym twierdzeniem (punkt (c)).

TWIERDZENIE 7. Niech $v, w \in \mathfrak{g}$. Wówczas

- (a) Pole ${}_vX_M$ jest zupełne.
- (b) Niech $p \in M$, to pola $-X_v$ i ${}_vX_M$ są związane przez Φ_p , tzn.

$$(\Phi_p)_*X_v = -{}_vX_M.$$

- (c) Przyporządkowanie $v \mapsto {}_vX_M$ jest homomorfizmem algebr Liego, czyli

$$[{}_vX_M, {}_wX_M] = [v, w]X_M.$$

DOWÓD:

- (a) Niech $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow G$ będzie jednoparametrową podgrupą odpowiadającą $-v \in \mathfrak{g}$. Krzywa $s \mapsto \gamma(t+s)p = \gamma(s)(\gamma(t)p)$ reprezentuje wektor ${}_vX_M(\gamma(t)p)$, więc odwzorowanie $\Phi_p \circ \gamma$ jest krzywą całkową pola ${}_vX_M$ przechodzącą przez $p \in M$.
- (b) Niech krzywa γ reprezentuje $v \in \mathbb{T}_eG = \mathfrak{g}$, to $t \mapsto \gamma(-t)$ reprezentuje $-v = -X_v(e)$. Stąd $t \mapsto \gamma(-t)g$ reprezentuje $-X_v(g)$ i $t \mapsto \Phi_p(\gamma(-t)g, p)$ reprezentuje $(-\Phi_p)_*X_v(gp)$. Ale

$$\Phi_p(\gamma(-t)g, p) = \Phi(\gamma(-t), \Phi(g, p))$$

reprezentuje ${}_vX_M(gp)$, co dowodzi żądanej równości.

- (c) Z ogólnych własności transportu pól wektorowych i z poprzedniego,

$$(\Phi_p)_*[-X_v, -X_w] = [-(\Phi_p)_*X_v, -(\Phi_p)_*X_w] = [{}_vX_M, {}_wX_M],$$

ale, pamiętając o związku między lewym i prawym nawiasem w \mathbb{T}_eG , mamy ($[\cdot, \cdot]_p$ oznacza prawy nawias)

$$[X_v, X_w] = X_{[v, w]_p} = X_{-[v, w]},$$

czyli

$$(\Phi_p)_*[-X_v, -X_w] = (\Phi_p)_*X_{-[v, w]} = [v, w]X_M.$$

Odpowiednikiem punktu (b) powyższego twierdzenia jest następujące stwierdzenie. ■

STWIERDZENIE 9. Dla $g \in G$ i $v \in \mathfrak{g}$ zachodzi związek

$$(\Phi_g)_* v X_M = (\text{Ad}_g v) X_M.$$

DOWÓD: Niech krzywa γ reprezentuje v , wówczas $t \mapsto \Phi(\gamma(-t), p)$ reprezentuje $v X_M(p)$, a $t \mapsto \Phi(g, \Phi(\gamma(-t), p))$ reprezentuje $(\Phi_g)_*(v X_M)$ w punkcie $\Phi(g, p)$. Z drugiej strony,

$$t \mapsto \Phi(g, \Phi(\gamma(-t), p)) = \Phi(g\gamma(-t), p) = \Phi(g\gamma(-t)g^{-1}, gp)$$

reprezentuje $(\text{Ad}_g v) X_M(gp)$, co dowodzi tezy. \blacksquare

9.2. Struktura różniczkowa orbity działania grupy. Jak pokazaliśmy w Stwierdzeniu 8, odwzorowanie $\Phi_p: G \rightarrow M$ indukuje bijekcję $G/G_p \rightarrow O_p$. Pokażemy, że ta bijekcja jest immersją, czyli że orbita jest podrozmaitością immersyjną.

LEMAT 1.

$$\ker \Phi'_p(e) = \mathfrak{g}_p,$$

gdzie \mathfrak{g}_p jest algebrą Liego podgrupy G_p .

DOWÓD: Zawieranie $\ker \Phi'_p(e) \supset \mathfrak{g}_p$ jest oczywiste. Niech teraz $v \in \ker \Phi'_p(e)$. Oznacza to, że dla $f \in C^\infty(M)$ mamy

$$0 = v(f \circ \Phi_p) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)p) \Big|_{t=0}, \quad (5)$$

gdzie γ jest jednoparametrową podgrupą w G , odpowiadającą v . Weźmy teraz w miejsce funkcji f we wzorze (5) funkcję $q \mapsto g(q) = f(\gamma(s)q)$. Dostajemy

$$0 = v(g \circ \Phi_p) = \frac{d}{dt} f(\gamma(s)\gamma(t)p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(\gamma(s+t)p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{ds} f(\gamma(s)p). \quad (6)$$

Oznacza to, że funkcja $s \mapsto f(\gamma(s)p)$ jest stała. Ponieważ jest tak dla każdej funkcji f na M , to $\gamma(s) = p$, czyli $\gamma(s) \in \Gamma_p$. Stąd $v \in \mathfrak{g}_p$. \blacksquare

TWIERDZENIE 8. Indukowane przez działanie grupy odwzorowanie $\Psi_p: G/G_p \rightarrow O_p \subset M$ jest immersją.

DOWÓD: Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi_p} & M \\ \pi_p \downarrow & & \nearrow \Psi_p \\ G/G_p & & \end{array},$$

gdzie π_p jest kanonicznym rzutowaniem. Z Lematu 1

$$\ker \pi'_p(e) = \mathfrak{g}_p = \ker \Phi'_p,$$

a zastępując p przez $q = gp$

$$\ker \pi'_q(e) = \mathfrak{g}_q = \ker \Phi'_q.$$

Ale $\dim \mathfrak{g}_p = \dim \mathfrak{g}_q$, bo $G_q = gG_p g^{-1}$ (Stwierdzenie 7), więc rząd Φ_p jest stały i z twierdzenia o stałym rzędzie wynika teza. \blacksquare

WNIOSEK 4.

(1)

$$\mathbb{T}_q O_p = \{v X_M(q) \mid v \in \mathfrak{g}\},$$

(2)

$$\mathfrak{g}_p = \{v \in \mathfrak{g} \mid v X_M(p) = 0\}.$$

9.3. Przykłady.

- (1) Niech $M = V$ będzie przestrzenią wektorową, a $G = \text{Aut}(V)$ grupą automorfizmów przestrzeni V . Algebrą Liego grupy G jest, jak wiemy, przestrzeń wszystkich endomorfizmów z komutatorem jako nawiasem Liego. Z drugiej strony, ponieważ $TV = V \times V$, odwzorowanie $A \in \text{End}(V)$ możemy interpretować jako pole wektorowe \tilde{A} na V . Mamy więc na V dwa pola wektorowe: pole fundamentalne ${}_A X_V$ i pole \tilde{A} . W lokalnym układzie współrzędnych A jest reprezentowane macierzą $[a^i_j]$ i

$$\tilde{A} = a^i_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Stąd, dla $A, B \in \text{End}(V)$

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = a^i_j x^j b^k_i \frac{\partial}{\partial x^k} - b^i_j x^j a^k_i \frac{\partial}{\partial x^k} = (a^i_j b^k_i - b^i_j a^k_i) x^j \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (7)$$

czyli

$$[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{C},$$

gdzie $[c^i_j] = a^k_j b^i_k - b^k_j a^i_k$. Stąd $C = BA - AB$. Zobaczmy teraz, jak wygląda pole fundamentalne ${}_A X_V$. W punkcie $x \in V$ jest ono reprezentowane prostą $t \mapsto (Id - tA)x = x - tAx$, czyli ${}_A X_V = -\tilde{A}$.

- (2) Grupa Liego działa na sobie przez lewe działanie, $L: G \times G \ni (g, h) \mapsto gh$. Działanie to jest tranzytywne i wolne. Zgodnie z Twierdzeniem 7, punkt (b),

$${}_v X_G = -(R_h)_* X_v = -X_v.$$

10. Reprezentacje dołączone.

Lewe i prawe działania grupy na sobie nie respektują struktury grupy, tzn. nie działają poprzez homomorfizmy grup. Działaniem respektującym strukturę grupy jest $\text{Ad}: G \times G: (g, h) \mapsto L_g R_{g^{-1}} h = ghg^{-1}$. Pole fundamentalne ${}_v X_G$ tego działania jest, w punkcie $h \in G$, reprezentowane krzywą $\text{Ad}(\gamma(-t), h) = \gamma(-t)h\gamma(t)$, gdzie γ jest jednoparametrową podgrupą odpowiadającą $v \in \mathfrak{g}$. Dostajemy stąd

$${}_v X_G = {}_v X - X_v.$$

Ponieważ $\text{Ad}_g(e) = e$ dla każdego g , styczne odzorowanie $T\text{Ad}_g$ zachowuje przestrzeń $T_e G$. G działa więc na algebrze \mathfrak{g} poprzez odwzorowania liniowe. Działanie to też będziemy oznaczać Ad . Podsumowując, mamy homomorfizmy grup

$$\begin{aligned} \text{Ad}: G &\rightarrow \text{Hom}(G), \\ \text{Ad}: G &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

i odpowiedni homomorfizm algebr

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}).$$

Przypomnijmy, że każda algebra Liego wymiaru skończonego może być wiernie reprezentowana jako podalgebra $\text{End}(V)$ dla pewnej przestrzeni wektorowej V . Stąd otoczenie jedności w G może być traktowane jak otoczenie tożsamości w $\text{Aut}(V)$. Jeżeli więc $g, h \in \text{Aut}(V)$, to $\text{Ad}_g h = ghg^{-1}$ i podobnie, dla $v \in \mathfrak{g} \subset \text{End}(V)$, $\text{Ad}_g v = gvg^{-1}$. Stąd, dla $v, w \in \mathfrak{g}$,

$$\text{ad}_v w = \text{ad}(v)w = \left. \frac{d}{dt} \gamma(t)w\gamma(-t) \right|_{t=0} = vw - wv = [v, w] \quad (8)$$

STWIERDZENIE 10. Dla działania Ad na \mathfrak{g} zachodzi równość

$${}_v X_{\mathfrak{g}} = \widetilde{-\text{ad}(v)},$$

gdzie $\widetilde{\text{ad}(v)}$ jest polem na \mathfrak{g} , opisywanym endomorfizmem $\text{ad}(v)$.

DOWÓD: Wynika bezpośrednio z (8) i z pierwszego przykładu w poprzedniej sekcji. ■

10.1. Działanie ko-dołączone. Działanie Φ grupy G na przestrzeni wektorowej V , poprzez odwzorowania liniowe, można przenieść na przestrzeń dualną V^* wzorem

$$\Phi_g^* = (\Phi_{g^{-1}})^*. \quad (9)$$

g^{-1} pojawiło się, by zapewnić działanie z lewej strony. W szczególności, mamy działanie G na ko-algebrze \mathfrak{g}^* , oznaczamy je Ad^* , i odpowiednie działanie algebry ad^* . Ponieważ $\text{Ad}_g^* = (\text{Ad}_{g^{-1}})^*$, to $\text{ad}^*(v) = -(\text{ad}(v))^*$.

TWIERDZENIE 9. Niech G będzie spójna. Orbits działania Ad^* pokrywają się z liśćmi symplektycznymi struktury Poissona na \mathfrak{g}^* , indukowanej przez strukturę algebry Liego \mathfrak{g} .

DOWÓD: Ponieważ G jest spójna, wystarczy porównać przestrzenie styczne, czyli dystrybucje zadane przez strukturę Poissona z jednej, i przez pola fundamentalne z drugiej strony (patrz Rozdział 2 i wniosek (1) z Twierdzenia 8). Przestrzeń styczna do orbity składa się z wartości pól fundamentalnych, zaś styczna do liścia symplektycznego jest obrazem odwzorowania $\Lambda: \mathbb{T}^*\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{T}\mathfrak{g}^*$, charakteryzującego strukturę Poissona na \mathfrak{g}^* . Mamy $\mathbb{T}_a\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$ i $\mathbb{T}_a^*\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, dla każdego $a \in \mathfrak{g}^*$. Przy tej identyfikacji przestrzeni stycznej, pola fundamentalne są postaci $a \mapsto \text{ad}^*(v)a$, gdzie $v \in \mathfrak{g}$. Z drugiej strony, dla liniowej funkcji \hat{v} na \mathfrak{g}^* mamy $d_a\hat{v} = v$ dla każdego $a \in \mathfrak{g}^*$. Stąd

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}^*(v)a, w \rangle &= \langle a, \text{ad}(v)w \rangle \\ &= \langle a, [v, w] \rangle \\ &= \{ \hat{v}, \hat{w} \}(a) \\ &= \langle \Lambda_a(v), w \rangle, \end{aligned}$$

czyli $\text{ad}^*(v)a = \Lambda_a(v)$. ■

11. Działanie symplektyczne grupy. Odwzorowanie momentu.

11.1. Rozmaitości symplektyczne.

DEFINICJA 5. *Rozmaitością symplektyczną* nazywamy parę (P, ω) , gdzie P jest rozmaitością różniczkową, zaś ω zamkniętą, $d\omega = 0$, i niezdegenerowaną 2-formą na P .

Niezdegenerowanie oznacza, że stowarzyszone z ω odwzorowanie wiązek wektorowych

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}: \mathbb{T}P &\rightarrow \mathbb{T}^*P \\ : v &\mapsto \omega(v, \cdot) \end{aligned} \quad (10)$$

jest izomorfizmem wiązek wektorowych. Wynika stąd, że przyporządkowanie polu wektorowemu X formy $\tilde{\omega} \circ X$ jest wzajemnie jednoznaczne. Formę $\tilde{\omega} \circ X$ oznacza się X^\flat (obniżenie wskaźników), a pole odpowiadające formie a oznacza się a^\sharp (podnoszenie wskaźników).

STWIERDZENIE 11. *Rozmaitość symplektyczna jest wymiaru parzystego.*

DOWÓD: W lokalnym układzie współrzędnych macierz odwzorowania jest antysymetryczna z wyznacznikiem różnym od zera. Jeżeli jednak mamy antysymetryczną (skośnie symetryczną) macierz A rozmiaru $n \times n$, to

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Stąd $\det A = 0$ dla nieparzystego n . ■

Kanonicznym przykładem rozmaitości symplektycznej jest wiązka kostyczna \mathbb{T}^*M z formą ω_M zdefiniowaną wzorem

$$\omega_M = d\theta_M, \quad \langle \theta_M, v \rangle = \langle \tau_{\mathbb{T}^*M}(v), \mathbb{T}\pi_M(v) \rangle, \quad \text{dla } v \in \mathbb{T}\mathbb{T}^*M.$$

W lokalnym układzie współrzędnych (x^i, p_j) na \mathbb{T}^*M forma $\theta_M = p_i dx^i$ oraz $\omega_M = dp_i \wedge dx^i$. Okazuje się (Twierdzenie Darboux), że na dowolnej rozmaitości symplektycznej (P, ω) wymiaru $2m$ można wprowadzić (lokalnie) taki układ współrzędnych (x^i, p_j) , że $\omega = dp_i \wedge dx^i$. Taki układ współrzędnych nazywamy kanonicznym. W kanonicznym układzie współrzędnych odwzorowanie $\tilde{\omega}$ wygląda tak:

$$\begin{aligned} x^i \circ \tilde{\omega} &= x^i \\ p_j \circ \tilde{\omega} &= p_j \\ \pi_k \circ \tilde{\omega} &= \dot{p}_k \\ \varphi^i \circ \tilde{\omega} &= -\dot{x}^i, \end{aligned}$$

gdzie $(x^i, p_j, \dot{x}^k, \dot{p}_l)$ są współrzędnymi w $\mathbb{T}P$, a $(x^i, p_j, \pi_k, \varphi^l)$ współrzędnymi w \mathbb{T}^*P . Stąd

$$(-dH)^\# = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Na rozmaitości symplektycznej zdefiniować możemy nawias Poissona funkcji wzorem

$$\{f, g\} = \omega((df)^\#, (dg)^\#) = (dg)^\#(f).$$

Przestrzeń funkcji gładkich na P z tak określonym działaniem jest algebrą Liego.

PRZYKŁAD 5. Polu wektorowemu X na rozmaitości M przypisujemy funkcję \widehat{X} na \mathbb{T}^*M wzorem

$$\mathbb{T}^*M \ni p \mapsto \langle p, X(\pi_M(p)) \rangle,$$

gdzie $\pi_M: \mathbb{T}^*M \rightarrow M$ jest kanonicznym rzutowaniem.

Bezpośrednim rachunkiem możemy sprawdzić, że zachodzi związek

$$[\widehat{X}, \widehat{Y}] = \{\widehat{X}, \widehat{Y}\}, \quad (11)$$

czyli przyporządkowanie $X \mapsto \widehat{X}$ jest morfizmem algebry Liego pól wektorowych w algebrę Liego-Poissona funkcji na \mathbb{T}^*M .

11.2. Pola kanoniczne i hamiltonowskie. Odwzorowanie momentu. Pole wektorowe X na rozmaitości symplektycznej (P, ω) nazywamy kanonicznym, jeżeli $\mathcal{L}_X \omega = 0$, gdzie \mathcal{L}_X oznacza pochodną Liego wzdłuż pola X . Z wzoru Cartana na pochodną Liego form różniczkowych,

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X d\omega + di_X \omega = di_X \omega,$$

czyli znikanie pochodnej Liego jest równoważne warunkowi $di_X \omega = 0$, czyli zamkniętości formy $i_X \omega = X^\flat$. Lokalnie, forma zamknięta jest zupełna, czyli jest różniczką funkcji. Jeżeli forma X^\flat jest zupełna, czyli $X^\flat = -dH$, gdzie H jest funkcją gładką na P , to mówimy, że pole X jest *hamiltonowskie* i funkcję H nazywamy jego hamiltonianem. Hamiltonian jest określony z dokładnością do funkcji lokalnie stałej (stałej na składowych spójnych P). Przykładem jest pole hamiltonowskie na \mathbb{T}^*M z hamiltonianem \widehat{X} , gdzie X jest polem wektorowym na M . Pole to nazywamy *podniesieniem kostycznym* pola X i oznaczamy je $d_{\mathbb{T}^*} X$. Odwzorowanie $X \mapsto d_{\mathbb{T}^*} X$ jest homomorfizmem algebr Liego pól wektorowych.

Działanie grupy G na rozmaitości symplektycznej nazywamy *hamiltonowskim*, jeżeli pola fundamentalne tego działania są hamiltonowskie. Przy ustalonym wyborze hamiltonianów mamy odwzorowanie

$$\begin{aligned} J: \mathfrak{g} \times P &\rightarrow \mathbb{R} \\ &: (v, p) \mapsto H_v(p), \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie H_v jest hamiltonianem pola fundamentalnego ${}_v X_P$. Zawsze możemy dobrać hamiltoniany tak, by dla każdego p odwzorowanie $v \mapsto H_v(p)$ było liniowe. W tym celu wystarczy dowolny wybór hamiltonianów dla wektorów bazowych algebry. Dwa takie wybory różnią się o element z \mathfrak{g}^* . Od tego miejsca zakładamy, że J jest liniowy ze względu na \mathfrak{g} . Mamy więc odwzorowanie, oznaczając je będziemy też symbolem J ,

$$J: P \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Odwzorowanie to nazywamy *odwzorowaniem momentu* działania hamiltonowskiego grupy G na P .

Odwzorowanie momentu nazywamy *mocnym*, jeżeli stowarzyszone odwzorowanie $H: \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(P): v \mapsto H_v$ jest homomorfizmem algebr Liego.

TWIERDZENIE 10 ZASADA ZACHOWANIA. Niech Φ będzie działaniem hamiltonowskim grupy G na rozmaitości symplektycznej (P, ω) , z odwzorowaniem momentu J . Niech $\Phi_g^* H = H$ dla każdego $g \in G$. Wówczas J jest stałe na trajektoriach pola hamiltonowskiego $X = -(dH)^\#$.

DOWÓD: Niech $t \mapsto x(t) \in P$ będzie trajektorią pola X i niech $v \in \mathfrak{g}$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J(x(t)), v \rangle &= -\langle d\langle J, v \rangle, (dH)^\# \rangle(x(t)) \\ &= -\omega((dH)^\#, (d\langle J, v \rangle)^\#)(x(t)) \\ &= -\langle dH, {}_v X_P \rangle = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

■

11.3. Przykłady odwzorowania momentu. Niech $\Phi: G \times M \rightarrow M$ będzie działaniem grupy G na rozmaitości M . Dla każdego $g \in G$ mamy odpowiedni dyfeomorfizm wiązki kostycznej $(\Phi_g)^*: T^*M \rightarrow T^*M$ i diagram

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{(\Phi_g)^*} & T^*M \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ M & \xrightarrow{\Phi_g^{-1}} & M \end{array},$$

jest przemienny. Przyporządkowanie $g \mapsto \Phi_{g^{-1}}^*$ jest działaniem grupy G na T^*M , *podniesieniem* działania Φ . Oznaczać je będziemy Φ^* .

STWIERDZENIE 12. *Podniesienie kostyczne Φ^* działania Φ jest działaniem hamiltonowskim z mocnym odwzorowaniem momentu danym wzorem*

$$J(v, p) = \langle p, {}_v X_M(\pi_M(p)) \rangle \quad (14)$$

DOWÓD: Polem fundamentalnym działania podniesionego Φ^* jest podniesienie $d_{T^*v} X_M$ pola fundamentalnego ${}_v X_M$ działania Φ . Mamy ciąg homomorfizmów algebr:

- (1) $v \mapsto {}_v X_M$ z algebry \mathfrak{g} w algebrę pól wektorowych na M ,
- (2) $X \mapsto \widehat{X}$ z algebry pól na M w algebrę Poissona funkcji na T^*M ,
- (3) $H \mapsto -(dH)^\#$ z algebry Poissona w algebrę pól wektorowych na T^*M .

Stąd wynika teza. ■

Teraz kilka szczególnych przykładów.

- Hamiltonian jako odwzorowanie momentu.
Niech X będzie polem hamiltonowskim z hamiltonianem H na rozmaitości symplektycznej (P, ω) . Załóżmy, że pole to jest zupełne, tzn. jego przepływ jest zdefiniowany

globalnie i można go uważać za działanie grupy addytywnej \mathbb{R} na P . Mamy oczywistą równość ${}_1X_P = -X$, więc działanie jest hamiltonowskie z odwzorowaniem momentu $J: 1 \mapsto H$. Można zatem hamiltonian uważać za odwzorowanie momentu.

- Podniesienie działania liniowego.

Niech V będzie przestrzenią wektorową. Algebrą Liego grupy $\text{Aut}(V)$ jest przestrzeń $\text{End}(V)$ z komutatorem jako nawiasem Liego. Mamy równość (patrz sekcja 9.3) ${}_AX_V = -\tilde{A}$. Zatem, zgodnie ze Stwierdzeniem 12, podniesienie działania $\text{Aut}(V)$ do $\mathbb{T}^*V = V \times V^*$ ma odwzorowanie momentu

$$V \times V^* \ni (v, f) \mapsto \langle f, {}_AX_V(v) \rangle = -\langle f, Av \rangle.$$

- Pęd jako moment grupy przesunięć.

Niech M będzie przestrzenią afiniczną z modelową przestrzenią wektorową V . Grupa abelowa $G = V$ działa na M jako przesunięcia: $\Phi(v, x) = v + x$. Oczywiście $\mathfrak{g} = V$ z zerowym nawiasem i

$${}_vX_M: M \rightarrow V: x \mapsto -v.$$

Hamiltonian podniesionego do $\mathbb{T}^*M = M \times V^*$ pola jest dany wzorem

$$M \times V^*(x, p) \mapsto \langle p, -v \rangle = -\langle p, v \rangle.$$

Stąd odwzorowanie momentu

$$J: \mathbb{T}^*M \rightarrow \mathfrak{g}^* = V^*: (x, p) \mapsto -p.$$

- Moment lewego działania grupy na sobie.

Jak wiemy (9.3), polem fundamentalnym lewego działania, odpowiadającym wektorowi $v \in \mathfrak{g}$ jest pole prawo-niezmiennicze $-X_v$. Stąd hamiltonian podniesionego pola

$$J_v: \mathbb{T}^*G \rightarrow \mathbb{R}: a \mapsto -\langle a, X_v(\pi_G(a)) \rangle = -\langle \hat{a}, v \rangle,$$

gdzie $\hat{a} \in \mathfrak{g}^*$ odpowiada a przez prawe przesunięcia.

- Moment pędu jako moment grupy obrotów. Grupą obrotów na \mathbb{R}^3 jest grupa $SO(3)$ macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1. Jej algebrą Liego $\mathfrak{o}(3)$ są macierze $A^\top = -A$. Odwzorowaniem momentu podniesienia kostycznego grupy jest odwzorowanie

$$J_A: \mathbb{T}^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: (\vec{x}, \vec{p}) \mapsto -(\vec{p} | A \vec{x})$$

12. Iloczyn półprosty grup i algebr.

12.1. Iloczyn półprosty grup. Niech G, H będą grupami Liego i niech $\Phi: G \times H \rightarrow H$ będzie działaniem grupy G przez automorfizmy, tzn. dla każdego $g \in G$ odwzorowanie Φ_g jest homomorfizmem grupy H . W iloczynie kartezjańskim $G \times H$ wprowadzamy działanie

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1\Phi(g_1, h_2)). \quad (15)$$

Jak już wiemy z pierwszego semestru wykładu, $G \times H$ z tak określone działaniem jest grupą, *iloczynem półprostym* grup. Oznaczamy ją $G \ltimes H$. Jako przykład weźmy grupę obrotów $G = SO(V)$ przestrzeni wektorowej V z iloczynem skalarnym g oraz grupę abelową translacji $H = V$. Działanie G definiujemy wzorem

$$\Phi(g, h) = gh.$$

Iloczyn półprosty $G \ltimes H$ możemy interpretować jako grupę afinicznych przekształceń euklidesowych przestrzeni V . Para (g, h) działa na V w sposób następujący:

$$(g, h)v = gv + h.$$

12.2. Grupa TG jako iloczyn półprosty. Wiemy, że TG ma kanoniczną strukturę grupy. Jeżeli $v_i \in TG$ jest reprezentowany przez krzywą $\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow G$, $i = 1, 2$, to $v_1 \cdot v_2$ jest reprezentowane krzywą $t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Używając prawych przesunięć możemy utożsamić wiązkę styczną (jako rozmaitość) z iloczynem kartezjańskim $G \times \mathfrak{g}$. Jeżeli w tym utożsamieniu $v_i = (g_i, w_i)$, to wektor $w_i \in T_e G$ jest reprezentowany krzywą $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i g_i^{-1}$. Podobnie, jeżeli $v_1 \cdot v_2$ jest reprezentowany parą $(g_1 g_2, w)$, to w jest reprezentowany krzywą

$$t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)(g_1 g_2)^{-1} = \gamma_1(t)\gamma_2(t)g_2^{-1}g_1^{-1} = \tilde{\gamma}_1(t)g_1\tilde{\gamma}_2(t)g_1^{-1}. \quad (16)$$

Krzywa ta reprezentuje wektor $w_1 + \text{Ad}_{g_1} w_2$, co sprawdzamy bezpośrednim różniczkowaniem. Zatem grupę TG możemy interpretować jako iloczyn półprosty grupy G i grupy abelowej \mathfrak{g} względem reprezentacji dołączonej Ad .

UWAGA! Jeżeli w powyższej konstrukcji prawe przesunięcia zastąpimy lewymi przesunięciami, to zamiast krzywej (16) dostaniemy krzywą

$$t \mapsto g_2^{-1}\tilde{\gamma}_1(t)g_2\tilde{\gamma}_2(t)$$

reprezentującą wektor $w_2 + \text{Ad}_{g_2^{-1}} w_1$. Sugeruje to, że w definicji iloczynu półprostego wzór (15) możemy zastąpić wzorem

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, \Phi(g_2^{-1}, h_1)h_2)$$

i też otrzymamy strukturę grupy na $G \times H$. Odwzorowanie $(g, h) \mapsto (g, \Phi(g, h))$ zadaje izomorfizm tej wersji iloczynu półprostego z iloczynem półprostym zdefiniowanym wzorem (15).

12.3. Działanie algebry. Działanie grupy G na grupę H poprzez automorfizmy indukuje działanie na algebrze Liego \mathfrak{h} grupy H przez obcięcie działania stycznego G na TH do przestrzeni $T_e H$. Działanie to, tak jak działanie na H jest poprzez automorfizmy, czyli mamy homomorfizm grup

$$G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{h}), \quad g[v, w] = [gv, gw], \quad (17)$$

gdzie $g \in G$ i $v, w \in \mathfrak{h}$. Homomorfizm grup indukuje homomorfizm algebr

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{h}),$$

przy czym z warunku $g(t)[v, w] = [g(t)v, g(t)w]$ wynika, że działanie algebry spełnia warunek

$$a[v, w] = [av, w] + [v, aw],$$

gdzie $a \in T_e G$ jest reprezentowany krzywą $t \mapsto g(t)$. Oznacza to, że algebra \mathfrak{g} działa na \mathfrak{h} przez różniczkowania. Stąd *działaniem algebry Liego* \mathfrak{g} na algebrze \mathfrak{h} nazywamy homomorfizm algebr

$$\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{h}).$$

Możemy teraz zdefiniować iloczyn półprosty algebr definiując nawias Liego na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ wzorem

$$[(a, v), (b, w)] = ([a, b], [v, w] + \varphi(a)w - \varphi(b)v).$$

W szczególności, algebra Liego iloczynu półprostego grup jest iloczynem półprostym odpowiednich algebr.

13. Algebry nilpotentne.

13.1. Ideały w algebrze Liego. Niech \mathfrak{g} będzie algebrą Liego, a \mathfrak{a} ideałem w tej algebrze, tzn. \mathfrak{a} jest podalgebrą i $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$. Struktura algebry w \mathfrak{g} indukuje strukturę algebry Liego w przestrzeni ilorazowej $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

STWIERDZENIE 13. Jeżeli \mathfrak{b} jest podalgebrą \mathfrak{g} i kanoniczne rzutowanie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ indukuje izomorfizm $\mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, to \mathfrak{g} jest iloczynem półprostym \mathfrak{b} i \mathfrak{a} .

DOWÓD: Oczywiście jest, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$ jako przestrzenie wektorowe. Mamy zatem (nawias w algebrze \mathfrak{g}) dla $a, a' \in \mathfrak{a}$ i $b, b' \in \mathfrak{b}$

$$[b + a, b' + a'] = [b, b'] + [b, a'] + [a, b'] + [a, b'].$$

Ponieważ \mathfrak{a} jest ideałem, $[b, a'], [b', a] \in \mathfrak{a}$, więc odwzorowanie $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a} \ni (b, a) \mapsto [b, a]$ określa działanie algebry \mathfrak{b} na algebrze \mathfrak{a} . Reszta oczywista. ■

Jeżeli $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są ideałami w \mathfrak{g} , to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też jest ideałem. Jeżeli \mathfrak{a} jest ideałem, a \mathfrak{b} podalgebrą, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ jest podalgebrą. Zbiór

$$\mathfrak{c} = \{a \in \mathfrak{g} \mid [a, x] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

jest oczywiście ideałem w \mathfrak{g} . Nazywamy go *centrum* algebry \mathfrak{g} .

13.2. Algebry nilpotentne. Niech $A, B \subset \mathfrak{g}$ będą podzbiórami algebry Liego \mathfrak{g} . Symbolem $[A, B]$ oznaczamy podprzestrzeń wektorową w \mathfrak{g} rozpiętą przez elementy postaci $[a, b]$, gdzie $a \in A, b \in B$. Jeżeli A, B są ideałami, to $[A, B]$ też jest ideałem. Istotnie, niech $x \in \mathfrak{g}$ i $a_i \in A, b_i \in B$. Wówczas, z tożsamości Jacobiego,

$$[x, \sum_i [a_i, b_i]] = \sum_i [[x, a_i], b_i] + \sum_i [a_i, [x, b_i]].$$

Ponieważ A i B są ideałami, pierwszy składnik w tej sumie należy do A , a drugi do B . Mamy więc *centralny ciąg ideałów* w algebrze \mathfrak{g} :

$$C^1 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad C^n \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{n-1} \mathfrak{g}], \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Łatwo sprawdzić (korzystając z tożsamości Jacobiego), że

$$[C^r \mathfrak{g}, C^s \mathfrak{g}] \subset C^{r+s} \mathfrak{g}. \quad (18)$$

TWIERDZENIE 11. Następujące warunki są równoważne:

- (1) istnieje n takie, że $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$,
- (2) istnieje n takie, że $[x_1, [x_2, [x_3, \dots, x_n]] \dots] = (\text{ad } x_1)(\text{ad } x_2) \dots (\text{ad } x_{n-1})x_n = 0$ dla dowolnych $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$,
- (3) istnieje ciąg ideałów

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{a}_n = \{0\} \quad (19)$$

takich, że $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ leży w centrum $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$, tzn. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$.

DOWÓD: Wynikania (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) są oczywiste. Pozostaje do wykazania (3) \Rightarrow (1). Mamy $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{g}$, więc

$$C^2 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{a}_2.$$

Podobnie

$$C^3 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^2 \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2] \subset \mathfrak{a}_3$$

i ogólnie,

$$C^i \mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_i.$$

W szczególności, $C^n \mathfrak{g} = \{0\}$. ■

DEFINICJA 6. Algebrę Liego \mathfrak{g} nazywamy *nilpotentną*, jeżeli spełniony jest jeden z warunków Twierdzenia 11.

13.3. Przykład. Niech V będzie przestrzenią wektorową. Flagę $\mathcal{F} = \{V_i\}$ w V nazywamy ciąg podprzestrzeni

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \cdots \subset V_n = V,$$

takich, że $\dim V_i = i$. Zdefiniujemy przestrzeń

$$\mathfrak{n}(\mathcal{F}) = \{x \in \text{End}(V) \mid xV_i \subset V_{i-1} \text{ dla } i \geq 1\}.$$

Jest to podalgebra łączna w $\text{End}(V)$ i stąd również podalgebra Liego. Jeżeli w V wybierzemy bazę zgodną z flagą (i pierwszych wektorów bazy rozpina V_i), to w tej bazie elementy z $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ reprezentowane są macierzami górno-trójkątnymi z zerami na diagonalu.

13.4. Podstawowe twierdzenia.

Twierdzenie 12 (ENGEL). Niech $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ będzie działaniem (reprezentacją) algebry \mathfrak{g} na przestrzeni wektorowej V i niech $\rho(x)$ będzie operatorem nilpotentnym dla każdego $x \in \mathfrak{g}$. Istnieje flaga $\mathcal{F} = \{V_i\}$ w V taka, że $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}(\mathcal{F})$.

Twierdzenie to jest równoważne następującemu

Twierdzenie 13. Przy założeniach twierdzenia Engela istnieje niezerowy (zakładamy, że $V \neq \{0\}$) wektor $v \in V$ taki, że $\rho(x)v = 0$ dla każdego $x \in \mathfrak{g}$.

Jeżeli prawdziwe jest twierdzenie Engela, to jako v w Twierdzeniu 13 wybieramy dowolny, niezerowy element z V_1 . W drugą stronę, jeżeli Twierdzenie 13 jest prawdziwe, to prawdziwość twierdzenia Engela dowodzimy indukcyjnie ze względu na wymiar V . Dla $\dim V = 1$ jest oczywiste. Niech $\dim V = n$. Wybieramy jako V_1 podprzestrzeń rozpiętą na wektorze v . V_1 zawiera się w jądrze każdego $\rho(x)$, więc ρ możemy rzutować do reprezentacji $\bar{\rho}$ na $\bar{V} = V/V_1$. Z założenia indukcyjnego istnieje flaga $\bar{\mathcal{F}} = \{\bar{V}_i\}$ taka że $\bar{\rho} \subset \mathfrak{n}(\bar{\mathcal{F}})$. Jako V_{i+1} wybieramy przeciwbraz $\{V_i\}$ względem kanonicznego rzutowania. Własność $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}(\mathcal{F})$ jest oczywista.

I jeszcze jedno twierdzenie.

Twierdzenie 14. Algebra Liego \mathfrak{g} jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{ad}(x)$ jest operatorem nilpotentnym dla każdego $x \in \mathfrak{g}$.

Dowód: Jeżeli \mathfrak{g} jest nilpotentna, to oczywiście każdy operator $\text{ad } x$ jest nilpotentny. Niech teraz Każdy $\text{ad } x$ będzie nilpotentny, czyli dla każdego $x \in \mathfrak{g}$ istnieje n_x takie, że $(\text{ad } x)^{n_x} = 0$. Z twierdzenia Engela istnieje flaga (\mathfrak{a}_i) w \mathfrak{g}

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \cdots \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$$

taka, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i-1}$, czyli \mathfrak{a}_i jest ideałem i spełniony jest trzeci z równoważnych warunków definiujących nilpotentność. ■

14. Algebry rozwiązalne.

Zdefiniujemy teraz *ciąg pochodny* ideałów

$$\mathfrak{g} = D^1 \mathfrak{g} \supset D^2 \mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^i \mathfrak{g} \cdots, \quad D^n \mathfrak{g} = [D^{i-1} \mathfrak{g}, D^{i-1} \mathfrak{g}].$$

Sprawdźmy najpierw, że to jest rzeczywiście ciąg ideałów.

$D^2 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem,

$D^3 \mathfrak{g} = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$ i z tożsamości Jacobiego

$$[\mathfrak{g}, [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]] \subset [[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] + [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]] \subset [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$$

i.t.d.

Twierdzenie 15. *Następujące warunki są równoważne:*

- (1) *istnieje n takie, że $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$,*
- (2) *istnieje n takie, że dla dowolnego zbioru 2^n elementów z \mathfrak{g} $[[[\dots], [\dots]], [[\dots], [\dots]]] = 0$,*
- (3) *Istnieje ciąg ideałów*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{a}_n = \{0\} \quad (20)$$

takich, że algebry $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ są abelowe tzn. $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$.

Dowód: Równoważność (1) i (2) oraz wynikanie (1) \Rightarrow (3) są oczywiste. Pozostaje do wykazania (3) \Rightarrow (1). Mamy

$$D^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{a}_2, \text{ stąd}$$

$$D^3 \mathfrak{g} = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \subset [\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2] \subset \mathfrak{a}_3$$

\vdots

$$D^i \mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_i$$

\vdots

W szczególności, $D^n \mathfrak{g} = \{0\}$. ■

Definicja 7. Algebrę Liego \mathfrak{g} nazywamy *rozwiązalną*, jeżeli spełniony jest jeden z warunków Twierdzenia 15.

W szczególności, algebra nilpotentna jest rozwiązalna.

14.1. Przykład. Niech V będzie przestrzenią wektorową i niech $\mathcal{F} = \{V_i\}$ będzie flagą w V . Zdefiniujemy przestrzeń

$$\mathfrak{b}(\mathcal{F}) = \{x \in \text{End}(V) \mid xV_i \subset V_i \text{ dla } i \geq 0\}.$$

Jest to podalgebra łączna w $\text{End}(V)$ i stąd również podalgebra Liego. Jeżeli w V wybierzemy bazę zgodną z flagą (i pierwszych wektorów bazy rozpina V_i), to w tej bazie elementy z $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ reprezentowane są macierzami górno-trójkątnymi. Widać stąd, że $[\mathfrak{b}(\mathcal{F}), \mathfrak{b}(\mathcal{F})] \subset \mathfrak{n}(\mathcal{F})$ (macierze górno-trójkątne z zerami na diagonalu). Z nilpotentności $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ wynika, że $[\mathfrak{b}(\mathcal{F}), \mathfrak{b}(\mathcal{F})]$ jest rozwiązalna, a zatem i $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ jest rozwiązalna.

14.2. Twierdzenie Liego. Udowodnimy teraz odpowiednik twierdzenia Engela.

Twierdzenie 16 (LIE). *Niech $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ będzie działaniem rozwiązalnej algebry Liego \mathfrak{g} w przestrzeni wektorowej V nad ciałem \mathbb{C} . Istnieje flaga $\mathcal{F} = (V_i)$ w przestrzeni V taka, że $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(\mathcal{F})$.*

Podobnie jak w przypadku twierdzenia Engela, mamy sformułowanie równoważne.

Twierdzenie 17. *Przy spełnionych założeniach twierdzenia 16 istnieje niezerowy wektor $v \in V$, własny dla wszystkich $\rho(x)$.*

Dowód: (Twierdzenia 17)

Zauważmy, że wektor v , o którym mówi twierdzenie indukuje odwzorowanie $\chi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że $\rho(x)v = \chi(x)v$ ($\chi(x)$ jest wartością własną $\rho(x)$ dla wektora v). Podstawą dowodu jest następujący lemat.

Lemat 2. *Niech \mathfrak{h} będzie ideałem w algebrze Liego \mathfrak{g} , ρ reprezentacją (działaniem) algebry \mathfrak{g} w V . Niech $v \in V$ będzie niezerowym wektorem takim, że dla pewnej funkcji $\chi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ mamy $\rho(x) = \chi(x)v$, $x \in \mathfrak{h}$. Wówczas $\chi([x, h]) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathfrak{g}$, $h \in \mathfrak{h}$.*

DOWÓD: Niech $0 \neq x \in \mathfrak{g}$. Tworzymy ciąg podprzestrzeni przestrzeni V

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 = \{v\} \subset V_2 = \{v, \rho(x)v\} \subset V_3 = \{v, \rho(x)v, \rho(x)^2v\} \subset \dots$$

V jest wymiaru skończonego, więc istnieje najmniejsze n takie, że $V_n = V_{n+1}$. Oczywiście, że $\dim V_i = i$ dla $i \leq n$ i $V_n = V_{n+k}$. Pokażemy teraz, że dla $h \in \mathfrak{h}$ mamy (xv oznacza tu $\rho(x)v$)

$$hx^i v = \chi(h)x^i v \pmod{V_i}. \quad (21)$$

Dowód jest indukcyjny względem i . Dla $i = 0$ mamy $hv = \chi(h)v$ z założenia. Dla $i > 0$

$$hx^i = xhx^{i-1}v - [x, h]x^{i-1}v.$$

Z założenia indukcyjnego,

$$\begin{aligned} hx^{i-1}v &= \chi(h)x^{i-1}v \pmod{V_{i-1}} \\ [x, h]x^{i-1}v &= \chi([x, h])x^{i-1}v \pmod{V_{i-1}}. \end{aligned}$$

Stąd, ponieważ $xV_{i-1} \subset V_i$,

$$xhx^{i-1}v = \chi(h)xx^{i-1}v \pmod{V_i}$$

i

$$[x, h]x^{i-1}v \in V_i,$$

co kończy dowód relacji (21). Wynika z niej, że w bazie $(v, xv, \dots, x^{n-1}v)$, macierz $[h_j^i]$ obcięcia $\rho(h)$ do V_n jest macierzą górno-trójkątną z $\chi(h)$ na diagonalu. Jest tak dla każdego $h \in \mathfrak{h}$. Ponieważ w tej bazie $\rho(x)$ (obcięte do V_n) jest macierzą $[x_j^i]$ z jedynkami bezpośrednio pod diagonalą, niezerową ostatnią kolumną i zerami na pozostałych miejscach, dostajemy bezpośrednim rachunkiem, że

$$\begin{aligned} n\chi([x, h]) &= \text{Tr}_{V_n}(\rho([x, h])) = \text{Tr}([x_j^i][h_j^i] - [h_j^i][x_j^i]) = \text{Tr}([x_j^i][h_j^i]) - \text{Tr}([h_j^i][x_j^i]) \\ &= \left(\sum_1^{n-1} h_{i+1}^i + \chi(h)x_n^n\right) - \left(\sum_1^{n-1} h_{i+1}^i + \chi(h)x_n^n\right) = 0. \end{aligned}$$

Stąd $\chi([x, h]) = 0$. ■

Wracamy do dowodu Twierdzenia Liego, indukcyjnego ze względu na wymiar algebry. Dla $\dim \mathfrak{g} = 0$ twierdzenie jest trywialne. Niech więc $\dim \mathfrak{g} \geq 0$. Ponieważ algebra \mathfrak{g} jest rozwiązalna, to $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$, czyli istnieje podprzestrzeń $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ko-wymiaru 1, zawierająca $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Z tego zawierania wynika, że \mathfrak{h} jest ideałem. Z założenia indukcyjnego wynika istnienie wektora $v \in V$, własnego dla wszystkich $\rho(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, czyli

$$\rho(h)v = \chi(h)v.$$

Wprowadźmy przestrzeń

$$W = \{w \in V \mid \rho(h)w = \chi(h)v, \quad h \in \mathfrak{h}\}.$$

Przestrzeń ta zawiera v , więc jest niepusta. Z Lematu wynika, że dla $x \in \mathfrak{g}$, $w \in W$, $h \in \mathfrak{h}$

$$\rho(h)\rho(x)w = \rho(h)\rho(h)w - \rho([x, h])w = \chi(h)\rho(x)w - \chi([x, h])w = \chi(h)\rho(x)w,$$

czyli $\rho(x)w \in W$. W jest podprzestrzenią niezmienniczą dla wszystkich $\rho(x)$. Wybierzmy $x \in \mathfrak{g}$ taki, że $x \notin \mathfrak{h}$. W przestrzeni V (nad ciałem \mathbb{C}) istnieje wektor własny v_0 operatora $\rho(x)$. Wynika stąd, że v_0 jest wektorem własnym dla wszystkich operatorów reprezentacji ρ . ■

Wnioski:

- (1) W algebrze rozwiązalnej istnieje flaga ideałów. Wystarczy zastosować twierdzenie Liego do reprezentacji ad.
- (2) Jeżeli \mathfrak{g} jest rozwiązalna, to algebra pochodna $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna.

14.3. Forma Killinga i kryterium Cartana. Niech $B: V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{K}$ będzie bilinową formą nad ciałem \mathbb{K} i niech ρ_i będzie działaniem algebry \mathfrak{g} na przestrzeni V_i . Mówimy, że forma B jest *niezmiennicza* względem działań algebry, jeżeli

$$B(\rho_1(x)v, w) + B(v, \rho_2(x)w) \quad \text{dla } x \in \mathfrak{g}.$$

Niech ρ będzie działaniem \mathfrak{g} na przestrzeni wektorowej V . Przykładem formy biliniowej jest odwzorowanie

$$B_\rho: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}: (x, y) \mapsto \text{Tr}_V(\rho(x)\rho(y)).$$

Forma ta jest symetryczna. Pokażemy, że jest niezmiennicza względem działania dołączonego ad . Istotnie,

$$\begin{aligned} B_\rho(\text{ad } x(x_1), x_2) + B_\rho(x_1, \text{ad } x(x_2)) &= \text{Tr}(\rho([x, x_1])\rho(x_2)) + \text{Tr}(\rho(x_1)\rho([x, x_2])) \\ &= \text{Tr}(\rho(x)\rho(x_1)\rho(x_2) - \rho(x_1)\rho(x)\rho(x_2) + \rho(x_1)\rho(x)\rho(x_2) - \rho(x_1)\rho(x_2)\rho(x)) = 0. \end{aligned}$$

TWIERDZENIE 18 (KRYTERIUM CARTANA). Niech \mathfrak{g} będzie podalgebrą algebry Liego endomorfizmów $\text{End}(V)$ przestrzeni wektorowej nad \mathbb{R} lub \mathbb{C} . Następujące warunki są równoważne:

- (1) algebra \mathfrak{g} jest rozwiązalna,
- (2) $\text{Tr}(xy) = 0$ dla $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

15. Algebry półproste.

15.1. Ideały rozwiązalne. Zaczniemy od prostego stwierdzenia.

STWIERDZENIE 14. Jeżeli \mathfrak{a} jest ideałem rozwiązalnym w algebrze \mathfrak{g} oraz algebra ilorazowa $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest rozwiązalna, to algebra \mathfrak{g} też jest rozwiązalna.

DOWÓD: Niech $\tau: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ będzie kanonicznym rzutowaniem. Z definicji algebry ilorazowej, $\tau^{-1}(D^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})) = D^i\mathfrak{g} + \mathfrak{a}$. Z rozwiązalności $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ istnieje n takie, że $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$. Zatem $D^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ i z rozwiązalności \mathfrak{a} wynika rozwiązalność \mathfrak{g} . ■

Jeżeli teraz \mathfrak{a} i \mathfrak{b} są ideałami rozwiązalnymi, to ideał $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ jest też rozwiązalny. Wystarczy zauważyć, że algebra

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$$

jest rozwiązalna (bo \mathfrak{b} jest rozwiązalna) i skorzystać ze Stwierdzenia 14. Wynika stąd, że w algebrze istnieje dokładnie jeden maksymalny ideał rozwiązalny. Nazywany jest *radykałem* algebry.

15.2. Algebry półproste i proste. Algebrę Liego nazywamy półprostą, jeżeli jej radykał jest zerowy. Równoważnie, algebra Liego \mathfrak{g} jest półprosta, jeżeli nie zawiera niezerowych ideałów abelowych. Istotnie, jeżeli istnieje niezerowy ideał abelowy, czyli rozwiązalny, to radykał jest niezerowy. Odwrotnie, jeżeli radykał \mathfrak{r} jest niezerowy, to ostatni nietrywialny ideał w ciągu pochodnym ideałów algebry \mathfrak{r} jest ideałem abelowym w \mathfrak{g} .

TWIERDZENIE 19. Algebra \mathfrak{g} jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy jej forma Killinga jest niezdegenerowana.

DOWÓD: Oznaczmy przez \mathfrak{n} przestrzeń wszystkich $x \in \mathfrak{g}$, dla których $\text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) = 0$ przy dowolnym $y \in \mathfrak{g}$. Sprawdzamy, że \mathfrak{n} jest ideałem w \mathfrak{g} . Istotnie, z niezmienniczości formy Killinga mamy, dla $x \in \mathfrak{n}$,

$$\forall z, y \in \mathfrak{g} \quad \text{Tr}(\text{ad}[z, x] \text{ ad } y) = -\text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad}[z, y]) = 0$$

i stąd $[z, x] \in \mathfrak{n}$. Dla $x \in \mathfrak{n}$ i $y \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ mamy $\text{Tr}(\text{ad } x \text{ ad } y) = 0$, czyli, na mocy kryterium Cartana 18 algebra $\text{ad}(\mathfrak{n})$ jest rozwiązalną podalgebrą $\text{End}(\mathfrak{g})$. Ale $\text{ad}(\mathfrak{n})$ jest ilorazem \mathfrak{n}

przez centrum algebry \mathfrak{g} , które jest abelowe, więc rozwiązalne. Ze Stwierdzenia 14 wynika, że ideał \mathfrak{n} jest rozwiązalny. Jeżeli algebra \mathfrak{g} jest półprosta, to $\mathfrak{n} = \{0\}$.

W drugą stronę. Mamy pokazać, że jeżeli forma Killinga jest niezdegenerowana, to ideał abelowy w \mathfrak{g} jest zerowy. Niech więc \mathfrak{a} będzie ideałem abelowym. Rozpatrzmy $\sigma = \text{ad } x \text{ ad } y$ dla $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{g}$. Mamy $\sigma z = [x, [y, z]] \in \mathfrak{a}$, więc $\sigma(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$. Ponadto, dla $z \in \mathfrak{a}$, $\sigma z = 0$, bo $[y, z] \in \mathfrak{a}$. Stąd $\sigma^2 = 0$ i $\text{Tr } \sigma = 0$. ■

Algebra \mathfrak{g} nazywa się *prostą*, jeżeli jest ona

- (i) nieabelowa,
- (ii) nie zawiera ideałów właściwych.

15.3. Podstawowe własności algebr półprostych.

TWIERDZENIE 20. Niech \mathfrak{a} będzie ideałem w algebrze półprostej \mathfrak{g} . Wówczas podprzestrzeń ortogonalna (względem formy Killinga) \mathfrak{a}^\perp jest też ideałem i $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$ (iloczyn prosty algebr Liego).

DOWÓD: Z niezmienniczości formy Killinga, dla $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{a}^\perp$, $z \in \mathfrak{a}$ mamy

$$\text{Tr}(\text{ad}[x, y] \text{ ad } z) = -\text{Tr}(\text{ad } y \text{ ad}[x, z]).$$

\mathfrak{a} jest ideałem, więc $[x, z] \in \mathfrak{a}$ i stąd $\text{Tr}(\text{ad } y \text{ ad}[x, z]) = 0$. Zatem $[x, y] \in \mathfrak{a}^\perp$, czyli \mathfrak{a}^\perp jest ideałem. Stąd i z niezmienniczości formy Killinga mamy, dla $x, y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$, $z \in \mathfrak{g}$,

$$\text{Tr}(\text{ad } z \text{ ad}[x, y]) = -\text{Tr}(\text{ad}[x, z] \text{ ad } y) = 0,$$

czyli $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ jest abelowym ideałem w \mathfrak{g} . Algebra jest półprosta, więc $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Jako przestrzeń wektorowa \mathfrak{g} jest sumą prostą \mathfrak{a} i \mathfrak{a}^\perp . Ponadto, dla $x \in \mathfrak{a}$ i $y \in \mathfrak{a}^\perp$ mamy $[x, y] = 0$, bo $[x, y] \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. Stąd \mathfrak{g} jest iloczynem prostym algebr Liego \mathfrak{a} i \mathfrak{a}^\perp . ■

Ideały w \mathfrak{a} , \mathfrak{a}^\perp są też ideałami w \mathfrak{g} . Algebry \mathfrak{a} , \mathfrak{a}^\perp są półproste, więc stosując indukcję dostajemy rozkład na algebry proste (nie posiadające ideałów właściwych).

STWIERDZENIE 15. Półprosta algebra Liego jest iloczynem prostym prostych algebr Liego.

Dla prostych algebr (więc nieabelowych) mamy oczywistą równość $D^i \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Stąd również dla algebr półprostych mamy $D^i \mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Zauważmy, że rozkład algebry półprostej na proste jest jednoznaczny. I jeszcze jeden, istotny fakt.

STWIERDZENIE 16. Każde różniczkowanie algebry półprostej \mathfrak{g} ma postać $\text{ad } x$.

15.4. Zwarte algebry i grupy. Zaczniemy od przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Grupy Liego są grupami analitycznymi, więc funkcje analityczne na zwartej grupie są stałe (zasada maximum dla funkcji analitycznych). W szczególności, przy ustalonej bazie w algebrze grupy, współczynniki macierzy Ad_g są funkcjami analitycznymi na grupie, więc stałymi dla grupy zwartej i spójnej. Na takiej grupie $\text{Ad}_g = \text{Id}$, czyli

$$g(\exp x)g^{-1} = \exp(\text{Ad}_g(x)) = \exp x.$$

Zatem grupa jest lokalnie, a stąd globalnie abelowa. Pokazuje się, że musi to być torus, czyli $G = \mathbb{C}^n/\Gamma$, gdzie Γ jest dyskretną podgrupą rzędu $2n$ w \mathbb{C}^n . Przypadek rzeczywisty jest mniej restrykcyjny.

TWIERDZENIE 21. Niech G będzie rzeczywistą, zwartą grupą Liego i niech \mathfrak{g} będzie jej algebrą. Wówczas $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$ (iloczyn prosty), gdzie \mathfrak{c} jest abelową, a \mathfrak{s} półprostą algebrą Liego z ujemnie określoną formą Killinga.

Mamy też twierdzenie odwrotne.

TWIERDZENIE 22. *Jeżeli rzeczywista algebra Liego jest postaci $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, gdzie \mathfrak{c} jest abelową, a \mathfrak{s} półprostą algebrą Liego z ujemnie określoną formą Killinga, to istnieje zwarta grupa Liego z algebrą Liego \mathfrak{g} . Jeżeli $\mathfrak{c} = 0$, to każda spójna grupa Liego z algebrą Liego \mathfrak{g} jest zwarta.*

15.5. Przykłady grup i algebr półprostych. Grupę spójną nazywamy półprostą (prostą), jeżeli jej algebra jest półprosta (prosta).

- (1) Składowa jedności w $\text{Aut}(V)$ nie jest półprosta, bo jej algebra Liego $\text{End}(V)$ zawiera ideał abelowy odwzorowań proporcjonalnych do identyczności.
- (2) Niech $\dim V = 2n$ z zadaną formą symplektyczną (skośnie symetryczną i niezdegenerowaną) Ω . Algebra $sp(V)$ endomorfizmów przestrzeni V , dla których forma Ω jest niezmiennicza, jest prosta.
- (3) Algebra $sl(V)$ endomorfizmów przestrzeni V ośladzie zerowym jest prosta dla $\dim V > 1$.
- (4) Algebra $o_B(V)$ endomorfizmów, dla których niezegenerowana i symetryczna forma biliniowa B jest niezmiennicza, jest półprosta dla $\dim V > 2$ a także prosta dla $\dim V > 4$.