TEORIA GRUP II

1. Algebry, różniczkowania w algebrach.

Algebrą nazywamy przestrzeń wektorową A z działaniem mnożenia, które jest odwzorowaniem biliniowym. W szczególności, mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Algebra $(A,\cdot)$ jest *łączna*, jeżeli mnożenie jest łączne. Algebra $(A,\cdot)$ jest *algebrą Leibniza*, jeżeli mnożenie spełnia *tożsamość Jacobiego*

$$a\cdot(a'\cdot a'') = (a\cdot a')\cdot a'' + a'\cdot(a\cdot a'').$$

Jeżeli ponadto mnożenie jest antyprzemienne, $a\cdot a' = -a'\cdot a$, to algebra jest *algebrą Liego*.

Przykłady 1.

(1) Funkcje na dowolnej przestrzeni tworzą algebrę łączną i przemienną ze względu na mnożenie. Na przestrzeni topologicznej jej podalgebrą są funkcje ciągłe, na rozmaitości różniczkowej funkcje gładkie, a na przestrzeni wektorowej funkcje wielomianowe.
(2) Niech V będzie przestrzenią wektorową. Zbiór endomorfizmów V, $\mathrm{End}(V)$, jest przestrzenią wektorową, a ze względu na składanie odwzorowań algebrą łączną, nieprzemienną.
(3) Endomorfizmy przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ utożsamiane są z macierzami kwadratowymi $n\times n$. Składaniu odwzorowań liniowych odpowiada mnożenie macierzy, więc przestrzeń macierzy $\mathbb{M}(n)$ z działaniem mnożenia jest nieprzemienną algebrą łączną.
(4) W algebrze łącznej $(A,\cdot)$ wprowadzamy działanie $[\,,\,]$:

$$[a,b] = a\cdot b - b\cdot a.$$

Dostajemy nową strukturę algebry. Oczywiście, $[a,b] = -[b,a]$. Ponadto, korzystając z łączności,

$$\begin{aligned}[a,[b,c]] &= a\cdot(b\cdot c - c\cdot b) - (b\cdot c - c\cdot b)\cdot a\\ &= (a\cdot b - b\cdot a)\cdot c - c\cdot(a\cdot b - b\cdot a) + b\cdot(a\cdot c - c\cdot a) - (a\cdot c - c\cdot a)\cdot b\\ &= [[a,b],c] + [b,[a,c]],\end{aligned}$$

czyli $(A,[\,,\,])$ jest algebrą Liego. W szczególności, komutator daje strukturę algebry Liego w $\mathrm{End}(V)$ i w $\mathbb{M}(n)$. Mamy więc w A dwie struktury algebry: łącznej i Liego.
(5) Przestrzeń $\mathcal{X}(M)$ pól wektorowych jest algebrą Liego ze względu na komutator $[\,,\,]$ pól wektorowych.
(6) Podprzestrzeń $\mathfrak{o}(n)$ macierzy spełniających warunek $a^{\mathsf{T}} = -a$ tworzą podalgebrę algebry $(\mathbb{M}(n),[\,,\,])$:

$$[a,b]^{\mathsf{T}} = (ab-ba)^{\mathsf{T}} = b^{\mathsf{T}}a^{\mathsf{T}} - a^{\mathsf{T}}b^{\mathsf{T}} = ba - ab = -[a,b].$$

W szczególności, dla $n=3$, mamy

$$\begin{bmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & -x\\ -y & x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -z' & y'\\ z' & 0 & -x'\\ -y' & x' & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & -z' & y'\\ z' & 0 & -x'\\ -y' & x' & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & x\\ -y & x & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -xy'+x'y & zx'-z'x\\ xy'-x'y & 0 & -yz'+y'z\\ -zx'+z'x & yz'-y'z & 0\end{bmatrix},$$

czyli $\mathfrak{o}(3)$ można utożsamić z z algebrą $(\mathbb{R}^3,\times)$ z iloczynem wektorowym względem orientacji kanonicznej.

Definicja 1. Odwzorowanie liniowe $D: A \to A$ nazywamy *różniczkowaniem w algebrze*, jeżeli dla każdej pary $a, a' \in A$ mamy

$$D(a \cdot a') = a \cdot D(a') + D(a) \cdot a'.$$

Przykłady 2.

(1) Tożsamość Jacobiego w definicji algebry Liego oznacza, że mnożenie jest różniczkowaniem względem siebie.
(2) Pole wektorowe na rozmaitości jest różniczkowaniem w algebrze funkcji gładkich.
(3) Niech Φ będzie algebrą łączną. Dla każdego $f \in \Phi$ odwzorowanie

$$D_f: \Phi \to \Phi: g \mapsto f \cdot g - g \cdot f = [f, g]$$

jest różniczkowaniem w Φ:

$$D_f(g \cdot g') = f \cdot (g \cdot g') - (g \cdot g') \cdot f = (f \cdot g - g \cdot f) \cdot g' + g \cdot (f \cdot g' - g' \cdot f) = D_f(g) \cdot g' + g \cdot D_f(g').$$

Różniczkowanie takie nazywamy *różniczkowaniem wewnętrznym*. Widzimy więc, że komutator w algebrze łącznej jest różniczkowaniem zarówno w algebrze łącznej jak i algebrze Liego (z komutatorem jako działaniem).

Oznaczmy przez $\mathrm{Der}(\Phi)$ zbiór różniczkowań w algebrze łącznej Φ. Oczywistym jest, że tworzą one przestrzeń wektorową oraz że złożenie dwóch różniczkowań nie jest różniczkowaniem.

Stwierdzenie 1. *Niech $a, b \in \mathrm{Der}(\Phi)$. Wówczas ich komutator $ab - ba$ też jest różniczkowaniem w Φ.*

Dowód:

$$\begin{aligned}(ab - ba)(f \cdot g) &= a(b(f) \cdot g + f \cdot b(g)) - b(a(f) \cdot g + f \cdot a(g)) \\ &= ab(f) \cdot g + fab(g) - ba(f) \cdot g - f \cdot ba(g) \\ &= (ab - ba)(f) \cdot g + f \cdot (ab - ba)(g)\end{aligned}$$

■

Stwierdzenie 2. $(\mathrm{Der}(\Phi), [\ ,\ ])$, *gdzie $[a, b] = ab - ba$, jest algebrą Liego.*

Dowód: $[a, b] = -[b, a]$, więc mnożenie jest antyprzemienne. Pokazujemy, że spełniona jest tożsamość Jacobiego:

$$\begin{aligned}[a, [b, c]] &= [a, bc - cb] = abc - acb - bca + cba \\ &= abc - bac - cab + cba + bac - bca - acb + cab \\ &= [[a, b], c] + [b, [a, c]].\end{aligned}$$

■

Łatwo sprawdzić, że

$$[D_f, D_g] = D_{[f,g]},$$

czyli różniczkowania wewnętrzne tworzą podalgebrę algebry $(\mathrm{Der}(\Phi), [\ ,\ ])$ i naturalne odwzorowanie $\Phi \ni f \mapsto D_f \in \mathrm{Der}(\Phi)$ jest homomorfizmem algebr Liego.

Przykładem powyższej konstrukcji jest algebra Liego pól wektorowych na rozmaitości M. Jako algebrę Φ bierzemy algebrę funkcji gładkich na M. Pole wektorowe na M jest różniczkowaniem w algebrze Φ.

1.1. Różniczkowania między algebrami. Niech będą dane dwie algebry Φ i Φ', oraz homomorfizm algebr $F\colon \Phi \to \Phi'$, to znaczy jest to odwzorowanie liniowe zachowujące mnożenie:

$$F(ab) = F(a)F(b).$$

Liniowe odwzorowanie $D\colon \Phi \to \Phi'$ nazywamy F-różniczkowaniem, jeżeli

$$D(ab) = D(a)F(b) + F(a)D(b).$$

Przykład: wektor v styczny do rozmaitości M w punkcie q jest różniczkowaniem z algebry funkcji gładkich w algebrę liczb, względem homomorfizmu $f \mapsto f(q)$.

Stwierdzenie 3. *Złożenie różniczkowania z homomorfizmem algebr jest różniczkowaniem względem tego homomorfizmu.*

Dowód: Proste przeliczenie. ■

2. Przestrzeń dualna do algebry Liego.

Niech $(A, [\,,\,])$ będzie algebrą Liego wymiaru skończonego. Mamy kanoniczny izomorfizm między przestrzenią wektorową A i przestrzenią funkcji liniowych na A^* (przestrzeń dualna). Niech $a \to \hat{a}$ będzie tą odpowiedniością. Zdefiniujmy nawias na funkcjach liniowych na A^*

$$\{\hat{a}, \hat{b}\} = \widehat{[a, b]} \tag{1}$$

Spełnia on tożsamość Jacobiego, bo $[\,,\,]$ ją spełnia i jest antyprzemienny. Zakładając spełnienie reguły Leibniza $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$ (nawias jest różniczkowaniem w algebrze łącznej funkcji na A^*) możemy zdefiniować nawias na wszystkich funkcjach wielomianowych, a przez ciągłość niemal jednostajną na wszystkich funkcjach na A^*. Nawias ten jest strukturą Poissona na A^*. I na odwrót, mając liniowy nawias Poissona na A^* (nawias funkcji liniowych jest funkcją liniową), możemy przez relacje (1) wprowadzić w A strukturę algebry Liego. Mamy zatem wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między strukturami algebry Liego w przestrzeni wektorowej A i liniowymi nawiasami Poissona na przestrzeni dualnej A^*.

Kilka uwag o strukturze Poissona na rozmaitości M. Można ją zadawać przez strukturą algebry Liego (nawias Liego) na funkcjach lub, równoważnie, przez odzorowanie wiązek wektorowych $\Lambda\colon \mathsf{T}^*M \to \mathsf{T}M$ (warunek tożsamości Jacobiego jest tu trudniejszy do wypowiedzenia). Nawias na funkcjach zadany jest wzorem

$$\{f, g\} = \langle \mathrm{d}g, \Lambda \circ \mathrm{d}f \rangle.$$

W każdy punkcie rozmaitości M mamy podprzestrzeń przestrzeni stycznej - obraz odwzorowania Λ. Tożsamość Jacobiego oznacza, że podprzestrzenie te są styczne do podrozmaitości w M. Podrozmaitości te zadają foliację M. Liście tej foliacji nazywane są *liśćmi symplektycznymi* struktury Poissona.

Przykład 3. Rozpatrujemy algebrę Liego $(\mathbb{R}^3, \times)$. Przestrzeń dualną do $\mathbb{R}^3$ utożsamiamy z $\mathbb{R}^3$. W tym utożsamieniu dostajemy dla funkcji współrzędniowych

$$\{x, y\} = z,\ \{y, z\} = x,\ \{z, x\} = y.$$

Aby znać wektor styczny do rozmaitości, wystarczy wiedzieć jak działa na funcje współrzędniowe, więc, by zać $\Lambda(\mathrm{d}x)$, wystarczy wiedzieć, czemu są równe $\langle \mathrm{d}x, \Lambda(\mathrm{d})\rangle$, $\langle \mathrm{d}x, \Lambda(\mathrm{d})\rangle$ i $\langle \mathrm{d}x, \Lambda(\mathrm{d})\rangle$. Ale $\langle \mathrm{d}x, \Lambda(\mathrm{d})\rangle = \{x, x\} = 0$, $\langle \mathrm{d}y, \Lambda(\mathrm{d})\rangle = \{x, y\} = z$ i $\langle \mathrm{d}z, \Lambda(\mathrm{d})\rangle = \{x, z\} = -y$ i stąd

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Podobnie obliczamy $\Lambda(\mathrm{d}y)$, $\Lambda(\mathrm{d}z)$:

$$\Lambda_{(x,y,z)}(\mathrm{d}y) = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z},$$
$$\Lambda_{(x,y,z)}(\mathrm{d}z) = -x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}.$$

Zatem $\operatorname{im}\Lambda_{(x,y,z)} = \{(\dot{x},\dot{y},\dot{z})\colon \dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z = 0\}$, czyli jest to przestrzeń styczna do sfery o środku w zerze. Liśćmi symplektycznymi dla tej struktury Poissona są sfery o środku w zerze.

W powyższych rozważaniach zakładaliśmy wymiar skończony algebry. Przyjrzyjmy sie przykładowi podstawowemu algebry Liego wymiaru nieskończonego - algebrze pól wektorowych na rozmaitości M. Istotne jest, by elementy z algebry Liego móc utożsamić z funkcjami. Pole wektorowe na M można utożsamić z funkcją na T^*M, liniową na włóknach. Nawias pól wektorowych indukuje więc nawias na funkcjach liniowych na T^*M. Nie wystarcza to do zdefniowania nawiasu Poissona dla wszystkich funkcji. Trzeba jeszcze wiedzieć, jaki jest nawias funkcji stałych na włóknach między sobą i z funkcjami liniowymi. Nawiasy te wynikają z własności nawiasu Liego pól wektorowych względem mnożenia pól przez funkcje. Mamy $[X, fY] = f[X,Y] + X(f)Y$, czyli $\{\hat{X}, f\hat{Y}\} = f\{\hat{X},\hat{Y}\} + X(f)\hat{Y}$, i stąd $\{\hat{X}, f\} = X(f)$. Użyliśmy tu jednego oznaczenia dla funkcji na M i odpowiedniej funkcji, stałej na włóknach, na T^*M. Równość $\{g\hat{X}, f\} = g\{\hat{X}, f\} + \hat{X}\{g, f\}$, implikuje $\{g, f\} = 0$, bo funkcja liniowa i stała na włóknach jest równa zero. W ten sposób dostajemy nawias na wszystkich funkcjach wielomianowych stopnia 1. Stąd, jak i dla algebry wymiaru skończonego, dostajemy nawias Poissona na T^*M. Jest to kanoniczny nawias Poissona na przestrzeni fazowej (wiązce kostycznej).

3. Działania grup.

Definicja 2. *Lewym (prawym) działaniem* grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\Phi\colon G \times X \to X$ spełniające dwa warunki

(1) $\Phi(g, \Phi(h,x)) = \Phi(gh, x)$, $(\Phi(g, \Phi(h,x)) = \Phi(hg, x))$
(2) $\Phi(e, x) = x$.

Inaczej mówiąc, Φ zadaje homomorfizm (antyhomomorfizm) grupy G w grupę bijekcji zbioru X. Mając zadane lewe działanie Φ, prawe działanie $\bar{\Phi}$ dostajemy kładąc $\bar{\Phi}(g,x) = \Phi(g^{-1}, x)$. Możemy więc zawsze przejść od działania lewego do prawego i z powrotem. Jeżeli zbiór ma jakąś strukturę (rózniczkową, algebraiczną), to na ogół żądamy, by bijekcje zbioru X respektowały te struktury.

Przykład 4. Niech X będzie samą grupą, $X = G$. Lewe (prawe) działanie L (G) grupy G na sobie definiujemy przez

$$L(g,h) = gh, \;\; L_g(h) = L(g,h)$$
$$R(g,h) = hg, \;\; R_g(h) = R(g,h)$$

Odwzorownia L_g i R_g są bijekcjami, ale nie homomorfizmami grup. Dla każdego $g \in G$ automorfizmem (homomorfizm będący bijekcją) grupy jest odzorowanie

$$\mathrm{Ad}_g\colon G \to G\colon h \mapsto L_g R_{g^{-1}} h = ghg^{-1} = R_{g^{-1}} L_g h,$$

$$\mathrm{Ad}_g(hh') = ghh'g^{-1} = ghg^{-1}gh'g^{-1} = \mathrm{Ad}_g(h)\,\mathrm{Ad}_g(h').$$

Sprawdzamy, że homomorfizmy Ad_g definiują lewe działanie grupy na sobie:

$$\mathrm{Ad}_{gg'}(h) = (gg')h(gg')^{-1} = g(g'hg'^{-1})g^{-1} = \mathrm{Ad}_g(\mathrm{Ad}_{g'}(h)).$$

Ad nazywane jest działaniem dołączonym (reprezentacją dołączoną) grupy. Zauważmy tu, że $\mathrm{Ad}_g(g) = ggg^{-1} = g$ i że dla grupy abelowej $\mathrm{Ad}_g = \mathrm{id}_G$.

4. Grupy Liego.

Grupą Liego nazywamy grupę będącą rozmaitością różniczkową z różniczkowalnym działaniem grupowym. Okazuje się, że pociąga to za sobą analityczność, czyli grupa Liego jest rozmaitością analityczną z analitycznym działaniem grupowym. W piątym problemie Hilberta postawione jest pytanie: czy grupą Liego jest grupa topologiczna (grupa jest przestrzenią topologiczną z ciągłym działaniem grupowym)? Ostateczną odpowiedź daje Twierdzenie Yamabe (1953):
Lokalnie zwarta grupa topologiczna bez małych podgrup jest grupą Liego.
Bez małych podgrup oznacza, że istnieje otoczenie jedynki, które nie zawiera podgrupy. Tak więc, w kontekście grup Liego, ciągłość implikuje różniczkowalność, a nawet analityczność. Dla grupy Liego L_g i R_g są dyfeomorfizmami.

5. Pola lewo- i prawo-niezmiennicze.

Definicja 3. Polem *lewo-niezmienniczym* na grupie Liego G nazywamy pole X spełniające równość $(L_g)_*X = X$ dla każdego $g \in G$.

Zastępując L_g przez R_g dostajemy definicję pola prawo-niezmiennicze. Oznacza to, że jeżeli krzywa $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in G$ reprezentuje wektor $X(h)$ pola lewo-niezmienniczego (prawo-niezmienniczego), to krzywa $g\gamma: t \mapsto g\gamma(t)$ $(\gamma g: t \mapsto \gamma(t)g)$ reprezentuje wektor $X(gh)$ $(X(hg))$. I dalej, jeżeli $\gamma: t \mapsto \gamma(t) \in G$ jest krzywą całkową pola lewo-niezmienniczego (prawo-niezmienniczego) X, to krzywa $g\gamma$ (γg) jest też krzywą całkową tego pola. W szczególności, wynika stąd, że jeżeli $\gamma(0) = e$, to zarówno $s \mapsto \gamma(s+t)$ jak i $s \mapsto \gamma(t)\gamma(s)$ są krzywymi całkowymi pola. Z jednoznaczności dostajemy zatem

$$\gamma(s+t) = \gamma(t)\gamma(s) = \gamma(t)\gamma(s),$$

zarówno dla prawo- jak i lewo-niezmienniczych pól. Krzywa całkowa przechodząca przez e jest homomorfizmem grup $\gamma: \mathbb{R} \to G$ (jest jednoparametrową podgrupą grupy G).

Z definicji pola niezmienniczego wiemy, że pole takie jest jednoznacznie wyznaczone przez swoją wartość w jedności grupy. Dla każdego $v \in \mathsf{T}_eG$ mamy w punkcie $g \in G$ dwa wektory, należące odpowiednio do lewo- i prawo-niezmienniczego pola. Jaka jest między nimi relacja? Niech γ będzie krzywą reprezentującą wektor $v \in \mathsf{T}_eG$. Krzywa $g\gamma$ reprezentuje wektor ${}_vX(g)$ odpowiedniego pola lewo-niezmienniczego, a krzywa γg wektor $X_v(g)$ pola prawo-niezmienniczego. Stąd $g\gamma(t) = \mathrm{Ad}_g(\gamma(t)g)$ oraz $\gamma(t)g = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(g\gamma(t))$ i stąd

$${}_vX(g) = \mathsf{T}\,\mathrm{Ad}_g(X_v(g)).$$

Stwierdzenie 4. *Odwzorowanie $I_G: G \to G: g \mapsto g^{-1}$ zadaje odpowiedniość między polami lewo- i prawo-niezmienniczymi.*

Dowód: Niech γ będzie jednoparametrową podgrupą w G, więc krzywą całkową pola lewo- i prawo-niezmienniczego, odpowiadającą wektorowi $v \in \mathsf{T}_eG$. Krzywa $t \mapsto g\gamma(t)$ jest krzywą całkową pola lewo- niezmienniczego. Mamy

$$(g\gamma(t))^{-1} = (\gamma(t))^{-1}g^{-1} = \gamma(-t)g^{-1},$$

więc $I_G \circ \gamma$ jest krzywą całkową pola prawo-niezmienniczego, odpowiadającego wektorowi $-v$. ∎

Mamy więc $(I_G)_{*v}X = X_{-v}$.

6. Algebra Liego grupy Liego.

Stwierdzenie 5. *Dla każdego dyfeomorfizmu $\Phi: M \to N$ mamy $\Phi_*([X,Y]) = [\Phi_*X, \Phi_*Y]$*

Dowód: Niech $f \in C^\infty(N)$. Dla dowolnego pola wektorowego X Mamy

$$(\Phi_* X(f)) \circ \Phi = X(f \circ \Phi) \tag{2}$$

i stąd

$$\begin{aligned}(\Phi_*[X,Y](f)) \circ \Phi &= [x,Y](f \circ \Phi)\\ &= X(Y(f\circ\Phi)) - Y(X(f\circ\Phi)) = X\left((\Phi_* Y(f))\circ\Phi\right) - Y\left((\Phi_* X(f))\circ\Phi\right)\\ &= (\Phi_* X \Phi_* Y(f))\circ\Phi - (\Phi_* Y\Phi_* X(f))\circ\Phi\\ &= ([\Phi_* X, \Phi_* Y](f))\circ\Phi.\end{aligned}$$

■

Z tego stwierdzenie wynika, że nawias Liego pól lewo-niezmienniczych (prawo-niezmienniczych) jest też polem lewo-niezmienniczym (prawo-niezmienniczym). Pola lewo-niezmiennicze i pola prawo-niezmiennicze na grupie G tworzą podalgebry Liego algebry wszystkich pól wektorowych na G. Nazywamy je *algebrami Liego* grupy Liego G. Dla ujednoznacznienia, często przez algebrę Liego grupy rozumie się algebrę pól lewo-niezmienniczych i oznacza $\mathfrak{g}$. Jako przestrzenie wektorowe, algebry Liego grupy są izomorficzne przestrzeni T_eG i na tą przestrzeń przenosi się strukturę algebry Liego. Trzeba tylko pamiętać którą. Ze Stwierdze 4, 5 wynika, że odwzorowanie $(I_G)_*$ zadaje izomorfizm lewej i prawej algebry Liego. Z drugiej strony, na przestrzeni stycznej T_eG odwzorowanie $\mathsf{T}I_G$ jest minus identyczności,więc

$$[v,w]_l = -[-v,-w]_p = -[v,w]_p,$$

więc lewy i prawy nawias Liego na T_eG różnia się znakiem. Lewe przesunięcie L_g zadaje izomorfizm przestrzeni T_eG i T_gG, więc zadaje też utożsamienie wiązki stycznej $\mathsf{T}G$ z iloczynem kartezjańskim $G\times\mathfrak{g}$. Ale TYLKO JAKO WIĄZKI WEKTOROWEJ!!, bo nawias Liego pól wektorowych NIE jest nawiasem funkcji o wartościach w $\mathfrak{g}$.

6.1. Uwaga ogólna. Redukcja Poissona. Algebry Liego grupy Liego G została zdefiniowana jako podalgebra algebry Liego pól wektorowych na G. Strukturą podstawową jest tu więc struktura wiązki stycznej, a strukturę algebry Liego grupy dostajemy przez jej redukcję. Z drugiej strony wiemy, że strukturze algebry Liego na przestrzeni wektorowej V wymiaru skończonego odpowiada jednoznacznie (liniowa) struktura Poissona na przestrzeni dualnej V^* (nawias Poissona funkcji na V^*). Mamy więc też strukturę Poissona na $\mathfrak{g}^*$. Ale wiemy też, że struktura wiązki stycznej (nawias Liego pól wektorowych) ma swój odpowiednik na wiązce dualnej do wiązki stycznej, na wiązce kostycznej. Strukturą tą jest kanoniczna struktura symplektyczna i odpowiadający jej nawias Poissona funkcji na wiązce kostycznej. Wszystko jest tu kanoniczne, powinna więc istnieć procedura otrzymywania nawiasu Liego funkcji na $\mathfrak{g}^*$. Wygląda ona tak: Mamy odwzorowanie

$$L_*\colon \mathsf{T}G \to \mathfrak{g}$$

i dualne odwzorowanie

$$L^*\colon \mathsf{T}^*G \to \mathfrak{g}^*.$$

Oczywistym jest, że dla $v \in \mathfrak{g}$, $L_*^{-1}(v)$ jest obrazem lewo-niezmienniczego pola ${}_vX$, a dla funkcji $\hat{v}$,

$$\widehat{{}_vX} = \hat{v}\circ L^*.$$

Dostajemy natychmiast relację między nawiasami Poissona

$$\{\hat{v},\hat{w}\}_{\mathfrak{g}}\circ L^* = \{\widehat{{}_vX}, \widehat{{}_wX}\}$$

i ogólnie, dla dowolnych funkcji f, g na $\mathfrak{g}^*$,

$$\{f,g\}_{\mathfrak{g}}\circ L^* = \{f\circ L^*, g\circ L^*\}.$$

Relacja ta jest kanonicznym przykładem *redukcji Poissona.*

6.2. Przykład podstawowy. Niech $G = Gl(n)$. Jako rozmaitość różniczkowa, jest to otwarta podrozmaitość przestrzeni wektorowej $\mathbb{M}(n)$. Zatem jej przestrzeń styczną (w dowolnym punkcie) utożsamiamy z $\mathbb{M}(n)$. Przestrzeń $\mathbb{M}(n)$ jest algebrą łączną z działaniem mnożenia macierzy. Jak każda algebra łączna, jest też algebrą Liego z działaniem określonym przez komutator w algebrze łącznej. Pokażemy, że ta struktura algebry Liego pokrywa się ze strukturą algebry Liego grupy $Gl(n)$. Niech $v, w \in \mathbb{M}(n)$ i niech $t \mapsto e+tv,\ t \mapsto e+tw$ bądą krzywymi w $Gl(n)$, reprezentującymi wektory $v, w \in \mathsf{T}_eG$, gdzie e jest macierzą jednostkową (jednością w grupie). Wektory ${}_vX(a)$ i ${}_wX(a)$ są reprezentowane odpowiednio przez $t \mapsto a + tav,\ \ t \mapsto a + taw$. Dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(G)$ i dowolnego punktu $a \in Gl(n)$ obliczymy $[{}_vX, {}_wX](f)(a)$:

$$
\begin{aligned}
[{}_vX, {}_wX](f)(a) &= {}_v X({}_wX(f))(a) - {}_w X({}_vX(f))(a) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0}({}_wX(f))(a+tav) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0}({}_vX(f))(a+taw) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}_{|s=0} f((a+tav)+s(a+tav)w) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}_{|s=0} f((a+taw)+s(a+taw)v) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}_{|s=0} f(a+tav+saw+stavw) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}_{|s=0} f(a+taw+sav+stawv) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} f'(a+tav)(aw+tavw) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0} f'(a+taw)(aw+tawv) \\
&= f''(a)(av,aw) + f'(a)(avw) - f''(a)(aw,av) + f'(a)(awv) = f'(a)(a(vw-wv)) \\
&= {}_{[v,w]} X(f)(a),
\end{aligned}
$$

gdzie $[v, w]$ oznacza komutator macierzy v i w. Pokazaliśmy więc, że nawias Liego w algebrze Liego $\mathfrak{gl}(n)$ jest równy komutatorowi macierzy.

6.3. Podgrupy i podalgebry. Wiadomo, co to jest podgrupa grupy. Sprawa się komplikuje, gdy mówimy o podgrupach w kontekście grup Liego. Nie wystarczy zajmować się podgrupami, które są podrozmaitościami w zwykłym sensie (podrozmaitosść jest lokalnie wykresem odwzorowania). Przykładem jest jednoparametrowa podgrupa na torusie: może ona dawać gęste nawinięcie na torus. Trzeba zatem dopuścić podgrupy (w zwykłym sensie), które posiadają własną strukturę rozmaitości różniczowej czyniąc z niej grupę Liego, a włożenie podgrupy w grupę jest immersją rozmaitości (tzn. pochodna ma maksymalny rząd).

Stwierdzenie 6. *Niech $\iota\colon H \hookrightarrow G$ będzie podgrupą Liego w G. Wówczas $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$, przy naturalnym utożsamieniu $\mathfrak{h}$ z $\mathsf{T}\iota(\mathsf{T}_eH)$.*

Dowód: Każdy wektor $v \in \mathfrak{h}$ definiuje pole lewo-niezmiennicze ${}_vX$ na H i pole lewo-niezmiennicze ${}_vY$ na G. Ponieważ ι jest injektywną immersją, na $H \subset G$ pole ${}_vY$ pokrywa się z obrazem pola ${}_vX$. Lokalnie (w H), obraz ι jest podrozmaitością w zwykłym sensie, więc nawias Liego $[{}_vY, {}_wY]$ porywa się z nawiasem Liego $[{}_vX, {}_wX]$. ■

Twierdzenie 1. *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego grupy G i niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ będzie jej podalgebrą Liego. Wówczas istnieje dokładnie jedna spójna podgrupa Liego $H \hookrightarrow G$ taka, że $\mathfrak{h}$ jest algebrą Liego grupy.*

Dowód: Jednoznaczność wynika z tego, że spójna grupa Liego H jest generowana przez otoczenie jedynki. Niech teraz $v \in \mathfrak{h}$ i niech ${}_vX$ będzie lewo-niezmienniczym polem na G. Wektory takich pól lewo-niezmienniczych rozpinają w każdym punkcie $g \in G$ podprzestrzeń styczną D_g przestrzeni T_gG. Jest to dystrybucja spełniająca założenia twierdzenia Frobeniusa. Istotnie, jeżeli Y_1, Y_2 są polami należącymi do dystrybucji D, to $Y_i = \sum_j f_i^j\,{}_{e_j}X$, gdzie (e_j) jest bazą $\mathfrak{h}$ i dostajemy

$$[Y_1, Y_2] = \sum_{j,k} f_1^j f_2^k [{}_{e_j}X, {}_{e_k}X] + f_1^j\,{}_{e_j}X(f_2^k)\,{}_{e_k}X - f_2^k\,{}_{e_k}X(f_1^j)\,{}_{e_j}X.$$

Każdy z tych składników należy do dystrybucji D, więc D jest zamknięta ze względu na nawias Liego. Na mocy twierdzenia Frobeniusa z geometrii różniczkowej (w wersji globalnej) istnieje maksymalna spójna (zanurzona) podrozmaitość całkowa dla D przechodząca przez $e \in G$. Oznaczmy ją H. Pokażemy, że H jest podgrupą Liego w G (wystarczy pokazać, że podzbiór H jest zamknięty ze wględu na mnożenie i branie odwrotności). Ponieważ H jest łukowo spójna, dla $a \in H$ istnieje gładka krzywa $\gamma : [0,1] \to H$ taka, że $\gamma(0) = e$ i $\gamma(1) = a$. Dystrybucja D jest niezmiennicza na dyfeomorfizm $L_{a^{-1}}$, więc krzywa $t \mapsto L_{a^{-1}}\big(\gamma(1-t)\big)$ leży w H i łączy e z a^{-1}. Podobnie, jeżeli $\breve{\gamma} : [0,1] \to H$ jest taka, że $\breve{\gamma}(0) = e$ i $\breve{\gamma}(1) = b$, to kawałkami gładka krzywa

$$[0,2] \ni t \longmapsto \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t \leq 1, \\ L_a\big(\breve{\gamma}(1-t)\big) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

jest krzywą całową dla dystrybucji D. Łączy ona e z ab. ■

Kończymy tą część twierdzeniem o istnieniu grupy Liego dla każdej skończenie wymiarowej algebry Liego. Twierdzenie to jest (między innymi) konsekwencją twierdzenia Ado, które mówi, że każda skończenie wymiarowa algebra Liego może być wiernie reprezentowana jako podalgebra $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}, n)$ dla pewnego n.

Twierdzenie 2. *Niech $\mathfrak{g}$ będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad $\mathbb{R}$. Wówczas istnieje dokładnie jedna spójna i jednospójna grupa Liego G taka, ze $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego grupy G.*

7. Algebry Liego najważniejszych grup Liego.

7.1. SU(2).

Niech $G = \mathrm{SU}(2)$. Algebra Liego tej grupy oznaczana jest symbolem $\mathfrak{su}(2)$. Grupa SU(2) może być opisana na kilka sposobów:

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(2) &= \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \middle| \, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 + \mathrm{i}x_2 & x_3 + \mathrm{i}x_4 \\ -x_3 + \mathrm{i}x_4 & x_1 - \mathrm{i}x_2 \end{bmatrix} \middle| \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Innymi słowy, SU(2) jest zbiorem macierzy 2×2 takich, że $\bar{A}^{\mathsf{T}} = A^{-1}$ i $\det A = 1$ Wynika stąd, że jako rozmaitość różniczkowa SU(2) jest dyfeomorficzna z trójwymiarową sferą w $\mathbb{R}^4$. Algebra Liego $\mathfrak{su}(2)$ jest podalgebrą $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ macierzy spełniających warunki $A^{\mathsf{T}} = -\bar{A}$ i $\mathrm{Tr}A = 0$. Przykładową bazą $\mathfrak{su}(2)$ jest

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Tak więc $\mathfrak{su}(2) = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że relacje komutacyjne pomiędzy e_1, e_2 i e_3 są następujące:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2e_3, \\ [e_3, e_1] &= -2e_2, \\ [e_2, e_3] &= -2e_1, \end{aligned}$$

7.2. SO)(3)**.** Grupa SO)(3) jest składową jedynki grupy macierzy ortogonalnych O(3) tzn. takich, że $A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$. Algebra Liego $\mathfrak{so}(3)$ jest podalgebrą $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ macierzy spełniających warunki $A^{\mathsf{T}} = -A$, czyli postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Wybierając bazę

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

dostajemy relacje komutacyjne

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -2e_3, \\ [e_3, e_1] &= -2e_2, \\ [e_2, e_3] &= -2e_1, \end{aligned}$$

Zatem algebry $\mathfrak{so}(3)$ i $\mathfrak{su}(2)$ są izomorficzne.

7.3. SU(n)**.**

Dla $v \in \mathfrak{su}(n)$ mamy $\mathrm{e}^{tv} \in \mathrm{SU(n)}$, czyli

$$\left(\mathrm{e}^{tv}x \middle| \mathrm{e}^{tv}y\right) = \left(x \middle| y\right)$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{C}^n$ i $t \in \mathbb{R}$. Różniczkujemy obie strony po t i kładziemy $t = 0$, by otrzymać

$$\left(vx \middle| y\right) + \left(x \middle| vy\right) = 0$$

dla wszystkich x, y. Oznacza to, że $v^* = -v$, czyli v jest macierzą antyhermitowską. Ponadto wzór $\det \mathrm{e}^v = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr} v}$ pokazuje, że macierze z algebry $\mathfrak{su}(n)$ muszą być bezśladowe. I na odwrót, jeżeli v jest bezśladową macierzą hermitowską, to

$$(\mathrm{e}^v)^{-1} = \mathrm{e}^{-v} = \mathrm{e}^{v^*} = (\mathrm{e}^v)^* \quad \text{i} \quad \det(\mathrm{e}^v) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr} v} = 1,$$

czyli $t \mapsto \mathrm{e}^{tv}$ jest jednoparametrową podgrupą w SU(n). Wnioskujemy, że algebrą $\mathfrak{su}(n)$ jest przestrzeń macierzy antyhermitowskich o śladzie zero. Jej wymiar wynosi $2n^2 - 2$.

7.4. SO)(n)**.** Grupa SO)(n) jest składową jedynki grupy macierzy ortogonalnych O(n) tzn. takich, że $A^\mathsf{T} = A^{-1}$. Algebra Liego $\mathfrak{so}(n)$ jest podalgebrą $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ macierzy spełniających warunki $A^\mathsf{T} = -A$.

7.5. SL(n, $\mathbb{K}$)**.** Ze wzoru $\det \mathrm{e}^m = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr} m}$ widzimy, że $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ jest przestrzenią macierzy $n \times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$ i o śladzie równym 0. Teraz zauważmy, że dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mamy

$$\dim \mathrm{SL(n, \mathbb{R})} = n^2 - 1$$

czyli jest to wymiar przestrzeni macierzy bezśladowych. Podobnie dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mamy

$$\dim \mathrm{SL(n, \mathbb{C})} = 2n^2 - 2$$

czyli rzeczywisty wymiar przestrzeni bezśladowch macierzy zespolonych $n \times n$.

7.6. Sp(2n, $\mathbb{R}$)**.**

Grupa

$$\mathrm{Sp(2n, \mathbb{R})}$$

jest to grupa przekształceń symplektycznych przestrzeni symplektycznej wymiaru $2n$ (czyli przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$ wymiaru $2n$ z wyróżnioną niezdegenerowaną antysymetryczną formą biliniową). Można ją konkretnie zdefiniować jako zbiór takich macierzy $m \in M_{2n}(\mathbb{R})$, że

$$m^\mathsf{T} J_n m = J_n,$$

gdzie

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

Zauważmy, że $\mathrm{Sp}(2\mathrm{n},\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}(2\mathrm{n},\mathbb{R})$. Algebra Liego grupy $\mathrm{Sp}(2\mathrm{n},\mathbb{R})$ składa się z macierzy $m \in M_{2n}(\mathbb{R})$ takich, że

$$m^{\mathsf{T}} J_n + J_n m = 0.$$

7.7. Sp(n)**.**

Grupa Sp(n) jest to podgrupa grupy $\mathrm{GL}(\mathrm{n},\mathbb{H})$ (która z kolei jest podgrupą $\mathrm{GL}(4\mathrm{n},\mathbb{R})$) złożona z przekształceń zachowujących formę

$$\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \ni (u,w) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} w_i$$

gdzie sprzężenie kwaternionu $x = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ definiujemy jako

$$\overline{x} = a - b\mathrm{i} - c\mathrm{j} - d\mathrm{k}.$$

Jest to rzeczywista (i zwarta) grupa Liego wymiaru $n(2n+1)$. Jej algebrę Liego można zrealizować jako algebrę antyhermitowskich[1] macierzy kwaternionowych $n \times n$.

8. Jednospójność i grupy nakrywające.

Niech X będzie łukowo spójną przestrzenią topologiczną. *Pętlą* w X nazywamy ciągłe odwzorowanie $\mathbb{T} \to X$. Pętla γ jest *ściągalna,* jeśli istnieje odwzorowanie $h : \mathbb{T} \times [0,1] \to X$ takie, że $h(z,1) = \gamma(z)$ i $h(z,0) = \gamma(1)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{T}$ i $h(1,t) = \gamma(1)$ dla $t \in [0,1]$. Przestrzeń X nazwiemy przestrzenią *jednospójną,* jeśli każda pętla w X jest ściągalna.

Dla każdej odpowiednio regularnej przestrzeni X (półlokalnie jednospójnej, czyli każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U takie, że każdą pętlę przy x zawartą w U można ściągnąć do punktu, ale niekoniecznie wewnątrz U; każda rozmaitość jest taka) istnieje przestrzeń topologiczna $\widetilde{X}$ wraz z odwzorowaniem $p : \widetilde{X} \to X$ taka, że

- • przestrzeń $\widetilde{X}$ jest jednospójna,
- •• p jest nakryciem (każdy punkt $x \in X$ ma utoczenie U takie, że $p^{-1}(U)$ jest sumą rozłączną $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\iota \in \mathcal{I}} V_\iota$ zbiorów otwartych $(V_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}}$ i dla każdego ι odwzorowanie $p\big|_{V_\iota} : V_\iota \to U$ jest homeomorfizmem).

Przestrzeń $\widetilde{X}$ jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do homotopijnej równoważności. Nazywamy ją *nakryciem uniwersalnym* przestrzeni X. Jeśli X jest rozmaitością, to jest nią również $\widetilde{X}$.

Ważnym faktem jest to, że jeśli X jest grupą Liego, to $\widetilde{X}$ również jest grupą Liego, a kanoniczny rzut $p : \widetilde{G} \to G$ jest homomorfizmem grup Liego. Zgodnie z punktem •• powyżej, jądro tego homomorfizmu jest dyskretną podgrupą w $\widetilde{G}$.

8.1. Przykłady.

(1) Niech $X = \mathbb{T}$. Wówczas nakryciem uniwersalnym X jest (może być) przestrzeń $\widetilde{X} = \mathbb{R}$. Odwzorowanie $p : \widetilde{X} \to X$ jest dane wzorem

$$p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}.$$

(2) Grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ jest nakryciem uniwersalnym grupy przekształceń Lorentza zachowujących kierunek czasu i orientację przestrzenną.

(3) Grupa SU(2) jest nakryciem uniwersalnym grupy SO(3).

[1] Należy w definicji sprzężenia hermitowskiego macierzy użyć sprzężenia kwaternionów

9. Odwzorowanie wykładnicze.

Jak wiemy, krzywa całkowa pola lewo-(prawo-)niezmienniczego, przechodząca przez jedność grupy, jest jednoparametrową podgrupą. Możemy zatem dobrze zdefiniowane odwzorowanie

$$\exp\colon \mathfrak{g} \to G\colon v \mapsto \gamma_v(1), \tag{3}$$

gdzie γ_v jest krzywą całkową pola ${}_vX$, $\gamma_v(0) = e$. Z twierdzenia o zależności rozwiązań równania od jego współczynników wynika gładkość odwzorowania exp. Bezpośrednio z definicji wynika, że pochodna exp w zerze jest identycznością w $\mathfrak{g}$. Z twierdzenia o lokalnej odwracalności exp jest lokalnym dyfeomorfizmem. Skoro tak, to strukturę (lokalnej) grupy można przenieść na otoczenie zera w algebrze. Można więc w algebrze Liego wprowadzić działanie grupowe (lokalnie, w otoczeniu zera). Wzory, opisujące to działanie są klasycznymi wzorami Bakera-Campbella-Hausdorffa. Dla macierzy dają one przepis na macierz C taką, że $e^A e^B = e^C$, przy zadanych macierzach A, B.

10. Homomorfizmy grup Liego.

Komentując definicję grupy Liego zauważyliśmy, że w kontekście grup ciągłość implikuje różniczkowalność. Pokażemy, że jest tak dla homomorfizmów.

Twierdzenie 3. *Niech $\gamma : \mathbb{R} \to G$ będzie ciągłym homomorfizmem. Wówczas istnieje wektor $v \in \mathfrak{g}$ taki, że*

$$\gamma(t) = \exp(tv) \tag{4}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Dowód: Niech $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ będą otoczeniami $0 \in \mathfrak{g}$ a $\mathcal{O}$ i $\mathcal{W}$ otoczeniami $e \in G$ takimi, że

- exp jest dyfeomorfizmem $\mathcal{U}$ na $\mathcal{O}$,
- $\mathcal{V} + \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$,
- $\mathcal{W} = \exp \mathcal{V}$,
- $\mathcal{W}^2 \subset \mathcal{O}$.

Aby skonstruować takie otoczenia zaczynamy od pary $\mathcal{U}, \mathcal{O}$ spełniającej pierwszy warunek. Dalej niech $\mathcal{W}_1$ będzie takie, że $\mathcal{W}_1^2 \subset \mathcal{O}$ (takie otoczenie istnieje na mocy ciągłości mnożenia w G, zauważmy, że w szczególności $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{O}$) i niech $\mathcal{V}_1 = \exp^{-1}(\mathcal{W}_1)$. Niech $\mathcal{V}_2$ będzie takie, że $\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}$ (istnieje na mocy ciagłości dodawania w $\mathfrak{g}$) i niech $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. Wówczas spełniony jest drugi warunek. Niech $\mathcal{W} = \exp(\mathcal{V})$ (spełniony jest więc warunek trzeci). Mamy $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_1$, więc $\mathcal{W} = \exp(\mathcal{V}) \subset \exp(\mathcal{V}_1) = \mathcal{W}_1$, a więc $\mathcal{W}^2 \subset \mathcal{O}$.

Odwzorowanie γ jest ciągłe, więc istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\gamma(t) \in \mathcal{W}$ dla $|t| < \varepsilon$. Ustalmy $a \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Wówczas istnieje $v \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ taki, że

$$\gamma(a) = \exp v.$$

Ponadto istnieje $w \in \mathcal{V}$ taki, że

$$\gamma\big(\tfrac{a}{2}\big) = \exp w.$$

Ponieważ $\gamma\big(\tfrac{a}{2}\big)\gamma\big(\tfrac{a}{2}\big) = \gamma(a)$ mamy

$$\exp(w)\exp(w) = \exp(v).$$

Pamiętajmy, że $t \mapsto \exp(tw)$ jest jednoparametrową podgrupą, więc $\exp(w)\exp(w) = \exp(2w)$. Ponadto $2w \in \mathcal{V} + \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, a exp jest jednoznaczne na $\mathcal{U}$. Stąd $v = 2w$, a więc

$$\gamma\big(\tfrac{a}{2}\big) = \exp\big(\tfrac{1}{2}v\big).$$

Podobnie pokazujemy, że

$$\gamma\big(\tfrac{a}{2^n}\big) = \exp\big(\tfrac{1}{2^n}v\big).$$

dla wszystkich n, a korzystając ponownie z tego, że γ i $t \mapsto \exp(tv)$ są homomorfizmami mamy

$$\gamma\left(\tfrac{m}{2^n}a\right) = \exp\left(\tfrac{m}{2^n}v\right)$$

dla wszystkich $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ liczby

$$\left\{ \tfrac{m}{2^n}a \middle| \, m \in \mathbb{Z} \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

tworzą zbiór gęsty w $\mathbb{R}$ i zarówno γ i $t \mapsto \exp(tv)$ są ciągłe względem t otrzymujemy (4). ■

Wniosek 1.

(1) *Każda ciągła jednoparametrowa podgrupa G jest gładka.*
(2) *Istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem ciągłych jednoparmetrowych podgrup w G i $\mathfrak{g}$.*

Korzystając z wniosku 1(1) można udowodnić również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Niech $\phi : G \to H$ będzie ciągłym homomorfizmem. Wówczas ϕ jest odwzorowaniem gładkim. W szczególności, każda skończenie wymiarowa reprezentacja grupy Liego jest gładka.*

Dowód: (szkic) Pokażemy, że ϕ jest klasy C^1. Niech $v \in \mathfrak{g}$ i niech γ_v będzie odpowiednią 1-parametrową grupą. Ponieważ ϕ jest homomorfizmem, $\phi \circ \gamma_v$ jest ciągła jednoparametrową grupą na H. Na mocy pierwszego punktu z wniosku do Twierdzenia 3 jest to podgrupa pewnego elementu $\psi(v) \in \mathfrak{h}$. Wnioskujemy, że ϕ ma pochodne kierunkowe w jedności grupy zbierające sią do odwzorowania $\psi \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Dla dowolnego $g \in G$ mamy $\phi(g\gamma_v(t)) = \phi(g)\phi(\gamma_v(t))$, czyli ϕ ma pochodne kierunkowe w g, które, przy utożsamieniu $\mathsf{T}_g G$ z $\mathfrak{g}$ i $\mathsf{T}_{\phi(g)} H$ z $\mathfrak{h}$ też zbierają się do odwzorowania ψ. Metodami znanymi z Analizy II (z ciągłości pochodnych cząstkowych wynika ciągła różniczkowalność) pokazuje się, że ϕ jest klasy C^1. ■

Stwierdzenie 7. *Niech $\phi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup Liego. Wówczas ϕ' ma stały rząd.*

Dowód: Z dowodu poprzedniego twierdzenia mamy, że w reprezentacji $\mathsf{T}G = G \times \mathfrak{g}$ i $\mathsf{T}H = H \times \mathfrak{h}$ pochodna homomorfizmu jest odwzorowaniem stałym.

■

Wniosek 2. *Niech $\phi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup Liego. Wówczas istnieje otoczenie $\mathcal{U}$ elementu neutralnego w G takie, że $\phi(\mathcal{U})$ jest podrozmaitością w H.*

Wniosek 2 jest konsekwencją „twierdzenia o stałym rzędzie”.
Niech $a, b \in G$ i niech γ reprezentuje $v \in \mathsf{T}_b G$. Równość

$$\phi(a\gamma(t)) = \phi(g)\phi(\gamma(t))$$

implikuje równość

$$\varphi'(ab)L'_a(b)(v) = L'_{\phi(a)}(\phi(b))\phi'(b)(v), \quad \varphi'(ab)L'_a(b) = L'_{\phi(a)}(\phi(b))\phi'(b). \tag{5}$$

Twierdzenie 5. *Niech $\phi : G \to H$ będzie homomorfizmem grup Liego. Oznaczmy algebrę Liego H przez $\mathfrak{h}$. Wówczas*

(1) *Odwzorowanie $\phi'(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem algebr Liego.*
(2) *Diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\phi'(e)"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\phi"] & H \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Dowód: Zajmijmy się na początek punktem (2). Niech $v \in \mathfrak{g}$. Wówczas $t \mapsto \phi\big(\exp(tv)\big)$ jest jednoparametrową podgrupą w H. Podobnie $t \mapsto \exp\big(t\phi'(e)v\big)$. Obie podgrupy mają tą samą pochodną w $e \in H$ więc są równe. Stąd $\exp\big(\phi'(e)v\big) = \phi\big(\exp(v)\big)$.

Niech $X \in \mathcal{X}(G)$ będzie polem lewo niezmienniczym. Zauważmy najpierw, że pola takie można transportować przy pomocy homomorfizmów grup. Obetnijmy to pole do otoczenia $\mathcal{U}$ takiego jak we wniosku 2. Wówczas $\phi_* X$ jest polem na $\phi(\mathcal{U})$ niezmienniczym na lewe przesunięcia o elementy $\phi(G)$,[2] gdyż na mocy (5) mamy

$$\begin{aligned} L_{\phi(c)_*}(\phi_* X)(d) &= L'_{\phi(c)}(\phi_* X)(c^{-1}d) \\ &= L'_{\phi(c)}\phi'(c^{-1}d)X(c^{-1}d) \\ &= \phi'(d)L'_c X(c^{-1}d) \\ &= \phi'(d)X(d) = (\phi_* X)(d) \end{aligned}$$

czyli $L_{\phi(c)_*}(\phi_* X) = (\phi_* X)$ (korzystając ze wzoru (5) podstawiamy $c = ab^{-1}$ i $b = c^{-1}d$, co daje $a = d$ i $ab^{-1} = d$).

Pole $\phi_* X$ lewo niezmiennicze na $\phi(\mathcal{U})$ można rozszerzyć do pola lewo niezmienniczego na otoczeniu $e \in H$ (do tego wystarczy tylko znać jego wartość w $e \in H$). Zatem $\phi'(e)\mathfrak{g}$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{h}$. Odwzorowanie $\phi'(e)$ jest homomorfizmem alebr Liego na mocy wzoru

$$\Phi_*\big[X, Y\big] = \big[\Phi_* X, \Phi_* Y\big]$$

słusznego dla transportowalnych pól wektorowych (patrz Stwierdzenie 5). ■

Wniosek 3. *Załóżmy, że G jest spójna i niech $\phi_1, \phi_2 : G \to H$ będą homomorfizmami grup Liego takimi, że $\phi_1'(e) = \phi_2'(e)$. Wówczas $\phi_1 = \phi_2$.*

Dowód: Niech $\mathcal{U}$ będzie otoczeniem $e \in G$ takim, że exp jest dyfeomorfizmem otoczenia $0 \in \mathfrak{g}$ na $\mathcal{U}$. Dla $a \in \mathcal{U}$ mamy $a = \exp(v)$ dla dokładnie jednego $v \in \mathfrak{g}$. Zatem

$$\phi_1(a) = \phi_1\big(\exp(v)\big) = \exp\big(\phi_1'(e)v\big) = \exp\big(\phi_2'(e)v\big) = \phi_2\big(\exp(v)\big) = \phi_2(a).$$

Ponieważ każdy element G jest skończony iloczynem elementów z $\mathcal{U}$, mamy $\phi_1 = \phi_2$. ■

Twierdzenie 6. *Niech G będzie spójna i jednospójna i niech H będzie grupą Liego o algebrze Liego $\mathfrak{h}$. Niech $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Wówcza istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup Liego $\phi : G \to H$ taki, że*

$$\lambda = \phi'(e). \tag{6}$$

Dowód: Jednoznaczność wynika natychmiast z wniosku 3.

Rozważmy grupę Liego $G \times H$. Jej algebrą Liego jest $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ z nawiasem

$$\big[(v_1, w_1), (v_2, w_2)\big] = \big([v_1, v_2], [w_1, w_2]\big).$$

Niech

$$\breve{\mathfrak{g}} = \big\{(v, \lambda v)\big|\, v \in \mathfrak{g}\big\}.$$

Wówczas $\breve{\mathfrak{g}}$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, więc na mocy twierdzenia 1 istnieje podgrupa Liego $\breve{G}$ w $G \times H$ taka, że $\breve{\mathfrak{g}}$ jest jej algebrą Liego. Pokażemy, że jest ona wykresem homomorfizmu ϕ spełniającego (6).

Niech π_1 i π_2 będą rzutami $\breve{G}$ na współrzędne. Jest jasne, że odpowiadające im homomorfizme algebr Liego są rzutami:

$$\begin{aligned} \pi_1'(e) &: (v, \lambda v) \longmapsto v \in \mathfrak{g}, \\ \pi_2'(e) &: (v, \lambda v) \longmapsto \lambda v \in \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

[2]Trzeba tu brać tylko "małe" przesunięcia, czyli takie, które nie wyprowadzają poza $\mathcal{U}$.

Jasne jest również, że $\pi_1'(e)$ jest izomorfizmem. Oznacza to, że obraz π_1 zawiera otoczenie jedności w G, a więc na mocy spójności G homomorfizm ten jest surjekcją o dyskretnym jądrze. Nietrudno teraz wykazać, że $\pi_1 : \breve{G} \to G$ jest w istocie nakryciem.[3]

Teraz z jednospojności G wynika, że π_1 jest dyfeomorfizmem. Oznacza to, że możemy zdefiniować $\phi = \pi_2 \circ {\pi_1}^{-}1$. ■

11. Działanie grup na rozmaitości.

Przypomnijmy, że (lewym) działaniem grupy G na rozmaitości M nazywamy gładkie odwzorowanie $\Phi\colon G \times M \to M$ spełniające warunki

(1) $\forall p \in M,\quad \Phi(e, p) = p$, gdzie e jest elementem neutralnym grupy,
(2) dla wszystkich $g, h \in G$ oraz $p \in M$ mamy $\Phi(gh, p) = \Phi(g, \Phi(h, p))$.

Będziemy też oznaczać: punkt $\Phi(g, p)$ po prostu gp, odwzorowanie $M \to M\colon p \mapsto gp$ przez Φ_g i odwzorowanie $G \to M\colon g \mapsto \Phi(g, p)$ przez Φ_p Działanie nazywamy

(1) *efektywnym*, jeżeli dla każdego $g \neq e$ istnieje $p \in M$ takie, że $gp \neq p$. Innymi słowy, $\Phi_g = \mathrm{id}_M$ tylko dla $g = e$,
(2) *tranzytywnym*, jeżeli dla każdej pary $p, p' \in M$ istnieje $g \in G$ takie, że $p' = gp$,
(3) *wolnym*, jeżeli dla każdego $g \neq e$ i dla każdego $p \in M$ mamy $gp \neq p$,

Definicja 4. Niech Φ będzie działaniem grupy G na rozmaitości M. *Stabilizatorem (podgrupą izotropii)* punktu $p \in M$ nazywamy zbiór

$$G_p = \{g \in G \big| \Phi(g, p) = p\}.$$

Orbitą punktu $p \in M$ nazywamy zbiór $O_p = \Phi_p(G)$.

Łatwo sprawdzamy, że G_p jest domkniętą podgrupą: jest to zbiór domknięty,bo równy $\Phi_p^{-1}(p)$ i podgrupą, bo $e \in G_p$ i dla $g, h \in G_p$ mamy $(gh)p = g(hp) = p$ i $g^{-1}p = g^{-1}(gp) = p$. Dla domkniętej podgrupy H grupy G zbiór orbit prawego działania H na G jest rozmaitością oznaczaną G/H. Fakt ten przyjujemy bez dowodu. Na G/H przenosi się lewe działanie L: $g'[g] = [g'g]$. Jest ono tranzytywne z podgrupą izotropii klasy elementu neutralnego równą H: $g[e] = [e]$ jest równoważne istnieniu $h \in H$ takiemu, że $ge = eh$, a stąd $g = h$.

Stwierdzenie 8. *Niech G_p będzie podgrupą izotropii punktu p dla działania Φ grupy G na rozmaitości M. Dla $p' = gp$ podgrupą izotropii $G_{p'}$ sprzężona z G_p:*

$$G_{p'} = gG_pg^{-1}.$$

Dowód: Mamy dla $h \in G_p$

$$(ghg^{-1})p' = gh(g^{-1}gp) = g(hp) = gp = p',$$

czyli $ghg^{-1} \in G_{p'}$ i w drugą stronę: dla $h' \in G_{p'}$

$$(g^{-1}h'g)p = g^{-1}(h'p') = g^{-1}p' = p,$$

czyli $g^{-1}h'g \in G_p$. ■

Stwierdzenie 9. *Odwzorowanie $\Phi_p\colon G \to M$ indukuje bijekcję $G/G_p \to O_p$.*

[3]Prześledzenie szczegółów dowodu tego faktu jest dobrym zadaniem dla czytelnika.

Dowód: Surjekcja jest oczywista. Niech teraz

$$\Phi(h,p) = \Phi(h',p)$$

i stąd

$$p = \Phi(h^{-1}, \Phi(h,p)) = \Phi(h^{-1}h, \Phi(h',p) = \Phi(h^{-1}h',p),$$

czyli $h^{-1}h' \in G_p$ i $h' \in hG_p$. Oznacza to, że $\Phi_p(h) = \Phi_p(h')$ wtedy i tylko wtedy, gdy h i h' rzutują się na ten sam element w G/G_p. ∎

11.1. Pochodne działanie algebry. Niech $\Phi\colon G \times M \to M$ będzie działaniem grupy G na rozmaitości M. Mamy stąd styczne odwzorowanie

$$\mathsf{T}\Phi\colon \mathsf{T}G \times \mathsf{T}M \to \mathsf{T}M.$$

Nieco później pokażemy, że $\mathsf{T}G$ ma strukturę grupy i że odwzorowanie $\mathsf{T}\Phi$ jest działaniem tej grupy na $\mathsf{T}M$. Oczywiście, działaniem grupy G na $\mathsf{T}M$ jest odwzorowanie

$$G \times \mathsf{T}M \ni (g,v) \mapsto \mathsf{T}\Phi_g(v) \in \mathsf{T}M.$$

Nazywamy je *działaniem stycznym* grupy G.

Z kolei odwzorowanie styczne ze względu na argument grupowy

$$\mathsf{T}G \times M \ni (v,p) \mapsto \mathsf{T}\Phi_p(v) \in \mathsf{T}M,$$

obcięte do przestrzeni T_eG jest odwzorowaniem

$$\mathfrak{g} \times M \ni (v,p) \mapsto \mathsf{T}\Phi_p(v) \in \mathsf{T}M.$$

Dla ustalonego $v \in \mathfrak{g}$ jest to pole wektorowe. Nazywamy je *polem fundamentalnym* dla $-v$ i oznaczamy ${}_{-v}X_M$. Dobór znaków motywowany jest poniższym twierdzeniem (punkt (c)):

Twierdzenie 7. *Niech $v, w \in \mathfrak{g}$. Wówczas*

(a) *Pole ${}_vX_M$ jest zupełne, tzn. jego krzywe całkowe są określone na całym $\mathbb{R}$.*
(b) *Niech $p \in M$, to pola $-X_v$ i ${}_vX_M$ są związane przez Φ_p, tzn.*

$$(\Phi_p)_* X_v = -{}_vX_M.$$

(c) *Przyporządkowanie $v \mapsto {}_vX_M$ jest homomorfizmem algebr Liego, czyli*

$$\left[{}_vX_M, {}_wX_M\right] = {}_{[v,w]}X_M.$$

Dowód:

(a) Niech $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ będzie jednoparametrową podgrupą odpowiadającą $-v \in \mathfrak{g}$. Krzywa $s \mapsto \gamma(t+s)p = \gamma(s)(\gamma(t)p)$ reprezentuje wektor ${}_vX_M(\gamma(t)p)$, więc odwzorowanie $\Phi_p \circ \gamma$ jest krzywą całkową pola ${}_vX_M$ przechodzącą przez $p \in M$.
(b) Niech krzywa γ reprezentuje $v \in \mathsf{T}_eG = \mathfrak{g}$, to $t \mapsto \gamma(-t)$ reprezentuje $-v = -X_v(e)$. Stąd $t \mapsto \gamma(-t)g$ reprezentuje $-X_v(g)$ i $t \mapsto \Phi_p(\gamma(-t)g, p)$ reprezentuje $\big(-(\Phi_p)_*X_v\big)(gp)$. Ale

$$\Phi_p(\gamma(-t)g, p) = \Phi(\gamma(-t), \Phi(g,p))$$

reprezentuje ${}_vX_M(gp)$, co dowodzi żądanej równości.
(c) Z ogólnych własności transportu pól wektorowych i z poprzedniego,

$$(\Phi_p)_*[-X_v, -X_w] = \left[-(\Phi_p)_*X_v, -(\Phi_p)_*X_w\right] = [{}_vX_M, {}_wX_M],$$

ale, pamiętając o związku między lewym i prawym nawiasem w T_eG, mamy $([,]_p$ oznacza prawy nawias)

$$[X_v, X_w] = X_{[v,w]_p} = X_{-[v,w]},$$

czyli

$$(\Phi_p)_*[-X_v, -X_w] = (\Phi_p)_*X_{-[v,w]} = {}_{[v,w]}X_M.$$

∎

Odpowiednikiem punktu (b) powyższego twierdzenia jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 10. *Dla $g \in G$ i $v \in \mathfrak{g}$ zachodzi związek*

$$(\Phi_g)_{*v}X_M = {}_{(\mathrm{Ad}_g\, v)}X_M.$$

Dowód: Niech krzywa γ reprezentuje v, wówczas $t \mapsto \Phi(\gamma(-t), p)$ reprezentuje ${}_vX_M(p)$, a $t \mapsto \Phi(g, \Phi(\gamma(-t), p))$ reprezentuje $(\Phi_g)_*({}_vX_M)$ w punkcie $\Phi(g, p)$. Z drugiej strony,

$$t \mapsto \Phi(g, \Phi(\gamma(-t), p)) = \Phi(g\gamma(-t), p) = \Phi(g\gamma(-t)g^{-1}, gp)$$

reprezentuje ${}_{(\mathrm{Ad}_g\, v)}X_M(gp)$, co dowodzi tezy. ■

11.2. Struktura różniczkowa orbity działania grupy. Jak pokazalismy w Stwierdzeniu 9, odwzorowanie $\Phi_p : G \to M$ indukuje bijekcję $G/G_p \to O_p$. Pokażemy, że ta bijekcją jest immersją, czyli że orbita jest podrozmaitością immersyjną.

Lemat 1.

$$\ker \Phi'_p(e) = \mathfrak{g}_p,$$

gdzie $\mathfrak{g}_p$ jest algebrą Liego podgrupy G_p.

Dowód: Zawieranie $\ker \Phi'_p(e) \supset \mathfrak{g}_p$ jest oczywiste. Niech teraz $v \in \ker \Phi'_p(e)$. Oznacza to, że dla $f \in C^\infty(M)$ mamy

$$0 = v(f \circ \Phi_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)p)\big|_{t=0}, \tag{7}$$

gdzie γ jest jednoparametrową podgrupą w G, odpowiadającą v. Weźmy teraz w miejsce funkcji f we wzorze (7) funkcję $q \mapsto g(q) = f(\gamma(s)q)$. Dostajemy

$$0 = v(g \circ \Phi_p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(s)\gamma(t)p)\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(s+t)p)\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\gamma(s)p). \tag{8}$$

Oznacza to, że funkcja $s \mapsto f(\gamma(s)p)$ jest stała. Ponieważ jest tak dla każdej funkcji f na M, to $\gamma(s) = p$, czyli $\gamma(s) \in G_p$. Stąd $v \in \mathfrak{g}_p$. ■

Twierdzenie 8. *Indukowane przez działanie grupy odwzorowanie $\Psi_p : G/G_p \to O_p \subset M$ jest immersją.*

Dowód: Mamy przemienny diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi_p"] \arrow[d, "\pi_p"'] & M \\ G/G_p \arrow[ur, "\Psi_p"'] & \end{tikzcd},$$

gdzie π_p jest kanonicznym rzutowaniem. Z Lematu 1

$$\ker \pi'_p(e) = \mathfrak{g}_p = \ker \Phi'_p(e), \tag{9}$$

a stąd $\ker \Psi'_p([e]) = \{0\}$. Z kolei, $\Phi_p(g) = \Phi_{gp}(e)$, czyli $\ker \Phi'_p(g) = \ker \Phi'_{gp}(e)$ przy utożsamieniu, przestrzeni T_gG z $\mathfrak{g}$ przez prawe przesunięcie. Zastępując p przez gp w (9) mamy

$$\ker \pi'_{gp}(e) = \mathfrak{g}_{gp} = F'_{gp}(e).$$

i stąd $\dim \ker \Phi'_p(g) = \dim \mathfrak{g}_{gp}$. Ale $\dim \mathfrak{g}_p = \dim \mathfrak{g}_{gp}$, bo $G_{gp} = gG_pg^{-1}$ (Stwierdzenie 8), więc rząd Φ_p jest stały i z twierdzenia o stałym rzędzie wynika, że orbita O_p jest podrozmaitością włożoną i stąd teza. ■

Wniosek 4.

(1)
$$\mathsf{T}_q O_p = \{{}_vX_M(q) \;\big|v \in \mathfrak{g}\},$$

(2)
$$\mathfrak{g}_p = \{v \in \mathfrak{g}\big|\; {}_vX_M(p) = 0\}.$$

11.3. Przykłady.

(1) Niech $M = V$ będzie przestrzenią wektorową, a $G = \mathrm{Aut}(V)$ grupą automorfizmów przestrzeni G. Algebrą Liego grupy G jest, jak wiemy, przestrzeń wszystkich endomorfizmów z komutatatorem jako nawiasem Liego. Z drugiej strony, ponieważ $\mathsf{T}V = V \times V$, odwzorowanie $A \in \mathrm{End}(V)$ możemy interpretować jako pole wektorowe $\widetilde{A}$ na V. Mamy więc na V dwa pola wektorowe: pole fundamentalne ${}_AX_V$ i pole $\widetilde{A}$. W lokalnym układzie współrzednych A jest reprezentowane macierzą $[a^i{}_j]$ i

$$\widetilde{A} = a^i{}_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Stąd, dla $A, B \in \mathrm{End}(V)$

$$[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = a^i{}_j x^j b^k{}_i \frac{\partial}{\partial x^k} - b^i{}_j x^j a^k{}_i \frac{\partial}{\partial x^k} = \big(a^i{}_j b^k{}_i - b^i{}_j a^k{}_i\big) x^j \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{10}$$

czyli

$$[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \widetilde{C},$$

gdzie $[c^i{}_j] = a^k{}_j b^i{}_k - b^k{}_j a^i{}_k$. Stąd $C = BA - AB$. Zobaczmy teraz, jak wygląda pole fundamentalne ${}_AX_V$. W punkcie $x \in V$ jest ono reprezentowane prostą $t \mapsto (Id - tA)x = x - tAx$, czyli ${}_AX_V = -\widetilde{A}$.

(2) Grupa Liego działa na sobie przez lewe działanie, $L\colon G \times G \ni (g, h) \mapsto gh$. Działanie to jest tranzytywne i wolne. Zgodnie z Twierdzeniem 7, punkt (b),

$${}_vX_G = -(R_h)_* X_v = -X_v.$$

12. Reprezentacje dołączone.

Lewe i prawe działania grupy na sobie nie respektują struktury grupy, tzn. nie działają poprzez homomorfizmy grup. Działaniem respektującym strukturę grupy jest $\mathrm{Ad}\colon G \times G\colon (g, h) \mapsto L_g R_{g^{-1}} h = ghg^{-1}$. Pole fundamentalne ${}_vX_G$ tego działania jest, w punkcie $h \in G$, reprezentowane krzywą $\mathrm{Ad}(\gamma(-t), h) = \gamma(-t)h\gamma(t)$, gdzie γ jest jednoparametrową podgrupą odpowiadającą $v \in \mathfrak{g}$. Dostajemy stąd

$${}_vX_G = {}_vX - X_v.$$

Ponieważ $\mathrm{Ad}_g(e) = e$ dla każdego g, styczne odzorowanie $\mathsf{T}\,\mathrm{Ad}_g$ zachowuje przestrzeń $\mathsf{T}_e G$. G działa więc na algebrze $\mathfrak{g}$ poprzez odwzorowania liniowe. Działanie to też będziemy oznaczać Ad. Podsumowując, mamy homomorfizmy grup

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Hom}(G),$$
$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

i odpowiedni homomorfizm algebr

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}).$$

Przypomnijmy, że każda algebra Liego wymiaru skończonego może być wiernie reprezentowana jako podalgebra $\operatorname{End}(V)$ dla pewnej przestrzeni wektorowej V. Stąd otoczenie jedności w G może być traktowane jak otoczenie tożsamości w $\operatorname{Aut}(V)$. Jeżeli więc $g, h \in \operatorname{Aut}(V)$, to $\operatorname{Ad}_g h = ghg^{-1}$ i podobnie, dla $v \in \mathfrak{g} \subset \operatorname{End}(V)$, $\operatorname{Ad}_g v = gvg^{-1}$. Stąd, dla $v, w \in \mathfrak{g}$,

$$\operatorname{ad}_v w = \operatorname{ad}(v)w = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)w\gamma(-t)\big|_{t=0} = vw - wv = [v, w] \tag{11}$$

STWIERDZENIE 11. *Dla działania* Ad *na* $\mathfrak{g}$ *zachodzi równość*

$$_vX_{\mathfrak{g}} = -\widetilde{\operatorname{ad}(v)},$$

gdzie $\widetilde{\operatorname{ad}(v)}$ *jest polem na* $\mathfrak{g}$, *opisywanym endomorfizmem* $\operatorname{ad}(v)$.

DOWÓD: Wynika bezpośrednio z (11) i z pierwszego przykładu w poprzedniej sekcji. ■

12.1. Działanie ko-dołaczone. Działanie Φ grupy G na przestrzeni wektorowej V, poprzez odwzorowania liniowe, można przenieść na przestrzeń dualną V^* wzorem

$$\Phi^*_g = (\Phi_{g^{-1}})^*. \tag{12}$$

g^{-1} pojawiło się, by zapewnić działanie z lewej strony. W szczególności, mamy działanie G na ko-algebrze $\mathfrak{g}^*$, oznaczamy je Ad^*, i odpowiednie działanie algebry ad^*. Ponieważ $\operatorname{Ad}^*_g = (\operatorname{Ad}_{g^{-1}})^*$, to $\operatorname{ad}^*(v) = -(\operatorname{ad}(v))^*$.

TWIERDZENIE 9. *Niech G będzie spójna. Orbity działania* Ad^* *pokrywają się z liśćmi symplektycznymi struktury Poissona na* $\mathfrak{g}^*$, *indukowanej przez strukturę algebry Liego* $\mathfrak{g}$.

DOWÓD: Ponieważ G jest spójna, wystarczy porównać przestrzenie styczne, czyli dystrybycje zadane przez strukturę Poissona z jednej, i przez pola fundamentalne z drugiej strony (patrz Rozdział 2 i wniosek (1) z Twierdzenia 8). Przestrzeń styczna do orbity składa się z wartości pól fundamentalnych, zaś styczna do liścia symplektycznego jest obrazem odwzorowania $\Lambda\colon \mathsf{T}^*\mathfrak{g}^* \to \mathsf{T}\mathfrak{g}^*$, charakteryzującego strukturę Poissona na $\mathfrak{g}^*$. Mamy $\mathsf{T}_a\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$ i $\mathsf{T}^*_a\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, dla każdego $a \in \mathfrak{g}^*$. Przy tej identyfikacji przestrzeni stycznej, pola fundamentalne są postaci $a \mapsto \operatorname{ad}^*(v)a$, gdzie $v \in \mathfrak{g}$. Z drugiej strony, dla liniowej funkcji $\hat{v}$ na $\mathfrak{g}^*$ mamy $\mathrm{d}_a\hat{v} = v$ dla każdego $a \in \mathfrak{g}^*$. Stąd

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{ad}^*(v)a, w\rangle &= \langle a, \operatorname{ad}(v)w\rangle \\
&= \langle a, [v, w]\rangle = \{\hat{v}, \hat{w}\}(a) \\
&= \langle \Lambda_a(\mathrm{d}_a\hat{v}), \mathrm{d}_a\hat{w}\rangle \\
&= \langle \Lambda_a(v), w\rangle,
\end{aligned}$$

czyli $\operatorname{ad}^*(v)a = \Lambda_a(v)$. ■

13. Działanie symplektyczne grupy. Odwzorowanie momentu.

13.1. Rozmaitości symplektyczne.

DEFINICJA 5. *Rozmaitością symplektyczną* nazywamy parę (P, w), gdzie P jest rozmaitością różniczkową, zaś ω zamkniętą, $\mathrm{d}\omega = 0$, i niezdegenerowaną 2-formą na P.

Niezdegenerowanie oznacza, że stowarzyszone z ω odwzorowanie wiązek wektorowych

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}\colon \mathsf{T}P &\to \mathsf{T}^*P \\
&: v \mapsto \omega(v, \cdot)
\end{aligned} \tag{13}$$

jest izomorfizmem wiązek wektorowych. Wynika stąd, że przyporządkowanie polu wektorowemu X formy $\widetilde{\omega} \circ X$ jest wzajemnie jednoznaczne. Formę $\widetilde{\omega} \circ X$ oznacza się $X^\flat$ (obniżnie wskaźników), a pole odpowiadające formie α oznacza się $\alpha^\sharp$ (podnoszenie wskaźników).

STWIERDZENIE 12. *Rozmaitość symplektyczna jest wymiaru parzystego.*

DOWÓD: W lokalnym układzie współrzędnych macierz odwzorowania jest antysymetryczna z wyznacznikiem różnym od zera. Jeżeli jednak mamy antysymetryczną (skośnie symetryczną) macierz A rozmiaru $n \times n$, to

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A.$$

Stąd $\det A = 0$ dla nieparzystego n. ■

Kanonicznym przykładem rozmaitości symplektycznej jest wiązka kostyczna T^*M z formą ω_M zdefiniowaną wzorem

$$\omega_M = \mathrm{d}\theta_M, \quad \langle \theta_M, v \rangle = \langle \tau_{\mathsf{T}^*M}(v), \mathsf{T}\pi_M(v) \rangle, \text{ dla } v \in \mathsf{TT}^*M.$$

W lokalnym układzie współrzędnych (x^i, p_j) na T^*M forma $\theta_M = p_i \mathrm{d}x^i$ oraz $\omega_M = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$. Okazuje się (Twierdzenie Darboux), że na dowolnej rozmaitości symplektycznej (P, ω) wymiaru $2m$ można wprowadzić (lokalnie) taki układ współrzędnych (x^i, p_j), że $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$. Taki układ współrzędnych nazywamy kanonicznym. W kanonicznym układzie współrzędnych odwzorowanie $\widetilde{\omega}$ wygląda tak:

$$\begin{aligned} x^i \circ \widetilde{\omega} &= x^i \\ p_j \circ \widetilde{\omega} &= p_j \\ \pi_k \circ \widetilde{\omega} &= \dot{p}_k \\ \varphi^i \circ \widetilde{\omega} &= -\dot{x}^i, \end{aligned}$$

gdzie $(x^i, p_j, \dot{x}^k, \dot{p}_l)$ są współrzędnymi w $\mathsf{T}P$, a $(x^i, p_j, \pi_k, \varphi^l)$ współrzędnymi w T^*P. Stąd

$$(-\mathrm{d}H)^\# = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Na rozmaitości symplektycznej zdefiniować możemy nawias Poissona funkcji wzorem

$$\{f, g\} = \omega((\mathrm{d}f)^\#, (\mathrm{d}g)^\#) = (\mathrm{d}g)^\#(f).$$

Przestrzeń funkcji gładkich na P z tak określonym działaniem jest algebrą Liego.

PRZYKŁAD 5. Polu wektorowemu X na rozmaitości M przypisujemy funkcję $\widehat{X}$ na T^*M wzorem

$$\mathsf{T}^*M \ni p \mapsto \langle p, X(\pi_M(p)) \rangle,$$

gdzie $\pi_M \colon \mathsf{T}^*M \to M$ jest kanonicznym rzutowaniem.

Bezpośrednim rachunkiem możemy sprawdzić, że zachodzi związek

$$\widehat{[X, Y]} = \{\widehat{X}, \widehat{Y}\}, \tag{14}$$

czyli przyporządkowanie $X \mapsto \widehat{X}$ jest morfizmem algebry Liego pól wektorowych w algebrę Liego-Poissona funkcji na T^*M.

13.2. Pola kanoniczne i hamiltonowskie. Odwzorowanie momentu. Pole wektorowe X na rozmaitości symplektycznej (P, w) nazywamy kanonicznym, jeżeli $\mathcal{L}_X \omega = 0$, gdzie $\mathcal{L}_X$ oznacza pochodną Liego wzdłuż pola X. Z wzoru Cartana na pochodną Liego form różniczkowych,

$$\mathcal{L}_X \omega = \mathrm{i}_X \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\mathrm{i}_X \omega = \mathrm{d}\mathrm{i}_X \omega,$$

czyli znikanie pochodnej Liego jest równoważne warunkowi $\mathrm{d}\mathrm{i}_X \omega = 0$, czyli zamkniętości formy $\mathrm{i}_X \omega = X^\flat$. Lokalnie, forma zamknięta jest zupełna, czyli jest różniczką funkcji. Jeżeli forma $X^\flat$ jest zupełna, czyli $X^\flat = -\mathrm{d}H$, gdzie H jest funkcją gładką na P, to mówimy, że pole X jest *hamiltonowskie* i funkcję H nazywamy jego hamiltonianem. Hamiltonian jest określony z dokładnościa do funkcji lokalnie stałej (stałej na składowych spójnych P). Przykładem jest pole hamiltonowskie na T^*M z hamiltonianem $\widehat{X}$, gdzie X jest polem wektorowym na M. Pole to nazywamy *podniesieniem kostycznym* pola X i oznaczamy je $\mathrm{d}_{\mathsf{T}^*}X$. Odwzorowanie $X \mapsto \mathrm{d}_{\mathsf{T}^*}X$ jest homomorfizmem algebr Liego pól wektorowych.

Działanie grupy G na rozmaitości symplektycznej nazywamy *hamiltonowskim*, jeżeli pola fundamentalne tego działania są hamiltonowskie. Przy ustalonym wyborze hamiltonianów mamy odwzorowanie

$$\begin{aligned} J\colon \mathfrak{g} \times P &\to \mathbb{R} \\ \colon (v, p) &\mapsto H_v(p), \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie H_v jest hamiltonianem pola fundamentalnego ${}_vX_P$. Zawsze możemy dobrać hamiltoniany tak, by dla każdego p odwzorowanie $v \mapsto H_v(p)$ było liniowe. W tym cely wystarczy dowolny wybór hamiltonianów dla wektorów bazowych algebry. Dwa takie wybory różnią się o element z $\mathfrak{g}^*$. Od tego miejsca zakładamy, że J jest liniowy ze względu na $\mathfrak{g}$. Mamy więc odwzorowanie, oznaczać je bedziemy też symbolem J,

$$J\colon P \to \mathfrak{g}^*.$$

Odzorowanie to nazywamy *odwzorowaniem momentu* działania hamiltonowskiego grupy G na P.

Odwzorowanie momentu nazywamy *mocnym*, jeżeli stowarzyszone odwzorowanie $H\colon \mathfrak{g} \to C^\infty(P)\colon v \mapsto H_v$ jest homomorfizmem algebr Liego.

Twierdzenie 10 Zasada zachowania. *Niech Φ będzie działaniem hamiltonowskim grupy G na rozmaitości symplektycznej (P, ω), z odwzorowaniem momentu J. Niech $\Phi_g^* H = H$ dla każdego $g \in G$. Wówczas J jest stałe na trajektoriach pola hamiltonowskiego $X = -(\mathrm{d}H)^\#$.*

Dowód: Niech $t \mapsto x(t) \in P$ będzie krzywą całkową pola pola X i niech $v \in \mathfrak{g}$. Oznaczmy $J_v(p) = J(v, p)$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle J(x(t)), v\rangle &= \langle \mathrm{d}J_v, \dot{x}(t)\rangle = -\langle \mathrm{d}J_v, (\mathrm{d}H)^\#\rangle(x(t)) \\ &= -\omega((\mathrm{d}J_v)^\#, (\mathrm{d}H)^\#)(x(t)) = \omega((\mathrm{d}H)^\#, (\mathrm{d}J_v)^\#)(x(t)) \\ &= -\langle \mathrm{d}H, {}_vX_P\rangle = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

■

13.3. Przykłady odwzorowania momentu. Niech $\Phi\colon G \times M \to M$ będzie działaniem grupy G na rozmaitości M. Dla każdego $g \in G$ mamy odpowiedni dyfeomorfizm wiązki kostycznej $(\Phi_g)^*\colon \mathsf{T}^*M \to \mathsf{T}^*M$ i diagram

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}^*M \arrow[r, "(\Phi_g)^*"] \arrow[d, "\pi_M"'] & \mathsf{T}^*M \arrow[d, "\pi_M"'] \\ M \arrow[r, "\Phi_g^{-1}"'] & M \end{tikzcd},$$

jest przemienny. Przyporządkowanie $g \mapsto \Phi^*_{g^{-1}}$ jest działaniem grupy G na T^*M, *podniesieniem* działania Φ. Oznaczać je będziemy Φ^*.

STWIERDZENIE 13. *Podniesienie kostyczne Φ^* działania Φ jest działaniem hamiltonowskim z mocnym odwzorowaniem momentu danym wzorem*

$$J(v, p) = \langle p, {}_vX_M(\pi_M(p))\rangle \tag{17}$$

DOWÓD: Polem fundamentalnym działania podniesionego Φ^* jest podniesienie $\mathrm{d}_{\mathsf{T}^*}{}_vX_M$ pola fundamentalnego ${}_vX_M$ działania Φ. Mamy ciąg homomorfizmów algebr:

(1) $v \mapsto {}_vX_M$ z algebry $\mathfrak{g}$ w algebrę pól wektorowych na M,
(2) $X \mapsto \widehat{X}$ z algebry pól na M w algebrę Poissona funkcji na T^*M,
(3) $H \mapsto -(\mathrm{d}H)^{\#}$ z algebry Poissona w algebrę pól wektorowych naT^*M.

Stąd wynika teza. ■

Teraz kilka szczegółowych przykładów.

- Hamiltonian jako odwzorowanie momentu.
  Niech X będzie polem hamiltonowskim z hamiltonianem H na rozmaitości symplektycznej (P, ω). Załóżmy, że pole to jest zupełne, tzn. jego przepływ jest zdefiniowany globalnie i można go uważać za działanie grupy addytywnej $\mathbb{R}$ na P. Mamy oczywistą równość ${}_1X_P = -X$, więc działanie jest hamiltonowskie z odwzorowaniem momentu $J: (1, p) \mapsto -H(p)$. Można zatem hamiltonian uważać za odwzorowanie momentu.
- Podniesienie działania liniowego.
  Niech V będzie przestrzenią wektorową. Algebrą Liego grupy $\mathrm{Aut}(V)$ jest przestrzeń $\mathrm{End}(V)$ z komutatorem jako nawiasem Liego. Mamy równość (patrz sekcja 9.3) ${}_AX_V = -\widetilde{A}$. Zatem, zgodnie ze Stwierdzeniem 13, podniesienie działania $\mathrm{Aut}(V)$ do $\mathsf{T}^*V = V \times V^*$ ma odwzorowanie momentu

$$\mathrm{End}(V) \times V \times V^* \ni (A, v, f) \mapsto \langle f, {}_AX_V(v)\rangle = -\langle f, Av\rangle.$$

- Pęd jako moment grupy przesunięć.
  Niech M będzie przestrzenia afiniczną z modelową przestrzenią wektorową V. Grupa abelowa $G = V$ działa na M jako przesunięcia: $\Phi(v, x) = v + x$. Oczywiście $\mathfrak{g} = V$ z zerowym nawiasem i

$${}_vX_M : M \to V : x \mapsto -v.$$

  Hamiltonian podniesionego do $\mathsf{T}^*M = M \times V^*$ pola jest dany wzorem

$$M \times V^*(x, p) \mapsto \langle p, -v\rangle = -\langle p, v\rangle.$$

  Stąd odwzorowanie momentu

$$J : \mathsf{T}^*M \to \mathfrak{g}^* = V^* : (x, p) \mapsto -p.$$

- Moment lewego działania grupy na sobie.
  Jak wiemy (9.3), polem fundamentalnym lewego działania, odpowiadającym wektorowi $v \in \mathfrak{g}$ jest pole prawo-niezmiennicze $-X_v$. Stąd hamiltonian podniesionego pola

$$J_v : \mathsf{T}^*G \to \mathbb{R} : a \mapsto -\langle a, X_v(\pi_G(a))\rangle = -\langle \hat{a}, v\rangle,$$

  gdzie $\hat{a} \in \mathfrak{g}^*$ odpowiada a przez prawe przesunięcia.
- Moment pędu jako moment grupy obrotów. Grupą obrotów na $\mathbb{R}^3$ jest grupa $SO(3)$ macierzy ortogonalnych o wyznaczniku 1. Jej algebrą Liego $\mathfrak{o}(3)$ sa macierze $A^\top = -A$. Odwzorowaniem momentu podniesienia kostycznego grupy jest odwzorowanie

$$J_A : \mathsf{T}^*\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) \mapsto -(\overrightarrow{p} \mid A\overrightarrow{x}). \tag{18}$$

Korzystając z utożsamienia algebry $\mathfrak{o}(3)$ z $(\mathbb{R}^3, \times)$ (iloczynem wektorowym względem orientacji kanonicznej), możemy wzór (18) zapisać jako

$$J_A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) = -(\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{a}|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{x}),$$

gdzie $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ odpowiada $A \in \mathfrak{o}(3)$ i $(\ ,\ )$ jest kanonicznym iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^3$. Ostatecznie dostajemy

$$J(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p}) = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{x}.$$

13.4. Zasady zachowania bez działania grupy (bez symetrii). Sens geometryczny zasady zachowania (10) jest taki: Na rozmaitości M mamy zadaną funkcję f i dystrybucję (w sensie geometrii różniczkowej, a nie analizy funkcjonalnej) $D \subset \mathsf{T}M$. Przypuśćmy,że dla $v \in D$ mamy $v(f) = 0$. Oznacza to, że $\mathrm{d}f(M) \subset D^\circ \subset \mathsf{T}^*M$ (D° jest anihilatorem dystrybucji D).

Jeżeli dystrybucja D jest całkowalna, to D° jest podrozmaitością koizotropową, więc można wykonać redukcję symplektyczną. Dystrybucja D może być zadana przez działanie grupy G: jest to dystrybucja rozpięta przez pola fundamentalne lub, równoważnie, styczna do orbit działania grupy. Podniesienie działania G do wiązki kostycznej T^*M jest działaniem hamiltonowskim z odwzorowaniem momentu (17) $J(v,p) = \langle p, {}_vX_M(\pi_M(p))\rangle$. Stąd D° jest poziomicą zerową odwzorowania momentu.

Przyjrzyjmy się szczególnemu przypadkowi działania hamiltonowskiego grupy G na rozmaitości symplektycznej P, z odwzorowaniem momentu $\bar{J}$. Podniesienie kostyczne tego działania jest też działaniem hamiltonowskim z odwzorowaniem momentu (17). Ale ${}_vX_P$ jest polem hamiltonowskim z hamiltonianem $J(v,\cdot)$, więc dla $a \in \mathsf{T}^*P$

$$J(v,a) = \langle a, {}_vX_P(\pi_P(a))\rangle = \langle \mathrm{d}\bar{J}_v, a^\#\rangle.$$

Oznacza to, że warunek $J(v,a) = 0$ jest równoważny stwierdzeniu, że wektor $a^\#$ jest styczny do poziomicy $\bar{J}_v$. Poziomice odwzorowania momentu są powierzchniami całkowymi dystrybucji $\tilde{\omega}^{-1}(D^\circ)$. Łatwo sprawdzić, że całkowalność dystrybucji $\tilde{\omega}^{-1}(D^\circ)$ jest równoważna koizotropowości dystrybucji D jako podrozmaitości $\mathsf{T}P$.

14. Iloczyn półprosty grup i algebr.

14.1. Iloczyn półprosty grup. Niech G, H będą grupami Liego i niech $\Phi\colon G \times H \to H$ będzie działaniem grupy G przez automorfizmy, tzn. dla każdego $g \in G$ odwzorowanie Φ_g jest homomorfizmem grupy H. W iloczynie kartezjańskim $G \times H$ wprowadzamy działanie

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1\Phi(g_1, h_2)). \tag{19}$$

Jak już wiemy z pierwszego semestru wykładu, $G \times H$ z tak określone działaniem jest grupą, *iloczynem półprostym* grup. Oznaczamy ją $G \ltimes H$. Jako przykład weźmy grupę obrotów $G = SO(V)$ przestrzeni wektorowej V z iloczynem skalarnym g oraz grupe abelową translacji $H = V$. Działanie G definiujemy wzorem

$$\Phi(g,h) = gh.$$

Iloczyn półprosty $G \ltimes H$ możemy interpretować jako grupę afinicznych przekształceń euklidesowych przestrzeni V. Para (g,h) działa na V w sposób następujący:

$$(g,h)v = gv + h.$$

14.2. Grupa $\mathsf{T}G$ jako iloczyn półprosty. Wiemy, że $\mathsf{T}G$ ma kanoniczną strukturę grupy. Jeżeli $v_i \in \mathsf{T}G$ jest reprezentowany przez krzywą $\gamma_i\colon \mathbb{R} \to G$, $i = 1, 2$, to $v_1 \cdot v_2$ jest reprezentowane krzywą $t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$. Używając prawych przesunięć możemy utożsamić wiązkę styczną (jako rozmaitość) z iloczynem kartezjańskim $G \times \mathfrak{g}$. Jeżeli w tym utożsamieniu $v_i = (g_i, w_i)$, to wektor $w_i \mathsf{T}_e G$ jest reprezentowany krzywą $\widetilde{\gamma}_i = \gamma_i g_i^{-1}$. Podobnie, jeżeli $v_1 \cdot v_2$ jest reprezentowany parą $(g_1 g_2, w)$, to w jest reprezentowany krzywą

$$t \mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)(g_1 g_2)^{-1} = \gamma_1(t)\gamma_2(t)g_2^{-1}g_1^{-1} = \widetilde{\gamma}_1(t)g_1\widetilde{\gamma}_2(t)g_1^{-1}. \tag{20}$$

Krzywa ta reprezentuje wektor $w_1 + \mathrm{Ad}_{g_1} w_2$, co sprawdzamy bezpośrednim różniczkowaniem. Zatem grupę $\mathsf{T}G$ możemy interpretować jako iloczyn półprosty grupy G i grupy abelowej $\mathfrak{g}$ względem reprezentacji dołączonej Ad.

UWAGA! Jeżeli w powyższej konstrukcji prawe przesunięcia zastąpimy lewymi przesunięciami, to zamiast krzywej (20) dostaniemy krzywą

$$t \mapsto g_2^{-1}\widetilde{\gamma}_1(t)g_2\widetilde{\gamma}_2(t)$$

reprezentującą wektor $w_2 + \mathrm{Ad}_{g_2^{-1}} w_1$. Sugeruje to, że w definicji iloczynu półprostego wzór (19) możemy zastąpić wzorem

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, \Phi(g_2^{-1}, h_1)h_2)$$

i też otrzymamy strukturę grupy na $G \times H$. Odwzorowanie $(g, h) \mapsto (g, \Phi(g, h))$ zadaje izomorfizm tej wersji iloczynu półprostego z iloczynem półprostym zdefiniowanym wzorem (19).

14.3. Działanie algebry. Działanie grupy G na grupę H poprzez automorfizmy indukuje działanie na algebrze Liego $\mathfrak{h}$ grupy H przez obcięcie działania stycznego G na $\mathsf{T}H$ do przestrzeni $\mathsf{T}_e H$. Działanie to, tak jak działanie na H jest poprzez automorfizmy, czyli mamy homomorfizm grup

$$G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}), \quad g[v, w] = [gv, gw], \tag{21}$$

gdzie $g \in G$ i $v, w \in \mathfrak{h}$. Homomorfizm grup indukuje homomorfizm algebr

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{h}),$$

przy czym z warunku $g(t)[v, w] = [g(t)v, g(t)w]$ wynika, że działanie algebry spełnia warunek

$$a[v, w] = [av, w] + [v, aw],$$

gdzie $a \in \mathsf{T}_e G$ jest reprezentowany krzywą $t \mapsto g(t)$. Oznacza to, że algebra $\mathfrak{g}$ działa na $\mathfrak{h}$ przez różniczkowania. Stąd *działaniem algebry Liego* $\mathfrak{g}$ na algebrze $\mathfrak{h}$ nazywamy homomorfizm algebr

$$\varphi \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h}).$$

Możemy teraz zdefiniować iloczyn półprosty algebr definiując nawias Liego na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ wzorem

$$[(a, v), (b, w)] = \big([a, b], [v, w] + \varphi(a)w - \varphi(b)v\big).$$

W szczególności, algebra Liego iloczynu półprostego grup jest iloczynem półprostym odpowiednich algebr.

15. Algebry nilpotentne.

15.1. Ideały w algebrze Liego. Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego, a $\mathfrak{a}$ ideałem w tej algebrze, tzn. $\mathfrak{a}$ jest podalgebrą i $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$. Struktura algebry w $\mathfrak{g}$ indukuje strukturę algebry Liego w przestrzeni ilorazowej $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

STWIERDZENIE 14. *Jeżeli* $\mathfrak{b}$ *jest podalgebrą* $\mathfrak{g}$ *i kanoniczne rzutowanie* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *indukuje izomorfizm* $\mathfrak{b} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$*, to* $\mathfrak{g}$ *jest iloczynem półprostym* $\mathfrak{b}$ *i* $\mathfrak{a}$.

Dowód: Oczywistym jest, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \times \mathfrak{a}$ jako przestrzenie wektorowe. Mamy zatem (nawias w algebrze $\mathfrak{g}$) dla $a, a' \in \mathfrak{a}$ i $b, b' \in \mathfrak{b}$

$$[b + a, b' + a'] = [b, b'] + [b, a'] + [a, b'] + [a, a'].$$

Ponieważ $\mathfrak{a}$ jest ideałem, $[b, a'], [b', a] \in \mathfrak{a}$, więc odwzorowanie $\mathfrak{b} \times \mathfrak{a} \ni (b, a) \mapsto [b, a]$ określa działanie algebry $\mathfrak{b}$ na algebrze $\mathfrak{a}$. Reszta oczywista. ■

Jeżeli $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ są ideałami w $\mathfrak{g}$, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ też jest ideałem. Jeżeli $\mathfrak{a}$ jest ideałem, a $\mathfrak{b}$ podalgebrą, to $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ jest podalgebrą. Zbiór

$$\mathfrak{c} = \{a \in \mathfrak{g} \mid [a, x] = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

jest oczywiście ideałem w $\mathfrak{g}$. Nazywamy go *centrum* algebry $\mathfrak{g}$.

15.2. Algebry nilpotentne. Niech $A, B \subset \mathfrak{g}$ będą podzbiorami algebry Liego $\mathfrak{g}$. Symbolem $[A, B]$ oznaczamy podprzestrzeń wektorową w $\mathfrak{g}$ rozpiętą przez elementy postaci $[a, b]$, gdzie $a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}$. Jeżeli A, B są ideałami, to $[A, B]$ też jest ideałem. Istotnie, niech $x \in \mathfrak{g}$ i $a_i \in A,\ b_i \in B$. Wówczas, z tożsamości Jacobiego,

$$[x, \sum_i [a_i, b_i]] = \sum_i [[x, a_i], b_i] + \sum_i [a_i, [c, b_i]].$$

Ponieważ A i B są ideałami, pierwszy składnik w tej sumie należy do A, a drugi do B. Mamy więc *centralny ciąg ideałów* w algebrze $\mathfrak{g}$:

$$C^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad C^n\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{n-1}\mathfrak{g}], \text{ dla } \ n \geqslant 2.$$

Łatwo sprawdzić (korzystając z tożsamości Jacobiego), że

$$\left[C^r\mathfrak{g}, C^s\mathfrak{g}\right] \subset C^{r+s}\mathfrak{g}. \tag{22}$$

Twierdzenie 11. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *istnieje n takie, że $C^n\mathfrak{g} = \{0\}$,*
(2) *istnieje n takie, że $[x_1, [x_2, [x_3, \cdots x_n]] \cdots] = (\operatorname{ad} x_1)(\operatorname{ad} x_2) \cdots (\operatorname{ad} x_{n-1}) x_n = 0$ dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$,*
(3) *istnieje ciąg ideałów*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_n = \{0\} \tag{23}$$

takich, że $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ leży w centrum $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_{i+1}$, tzn. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$.

Dowód: Wynikania (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) są oczywiste. Pozostaje do wykazania (3) $\Rightarrow$ (1). Mamy $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{g}$, więc

$$C^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{a}_2.$$

Podobnie

$$C^3\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^2\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_2] \subset \mathfrak{a}_3$$

i ogólnie,

$$C^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_i.$$

W szczególności, $C^n\mathfrak{g} = \{0\}$. ■

Definicja 6. Algebrę Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy *nilpotentną*, jeżeli spełniony jest jeden z warunków Twierdzenia 11.

15.3. Przykład. Niech V będzie przestrzenią wektorową. *Flagą* $\mathcal{F} = \{V_i\}$ w V nazywamy ciąg podprzestrzeni

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \cdots \subset V_n = V,$$

takich, że $\dim V_i = i$. Zdefiniujmy przestrzeń

$$\mathfrak{n}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathrm{End}(V) \mid xV_i \subset V_{i-1} \text{ dla } \ i \geqslant 1\}.$$

Jest to podalgebra łączna w $\mathrm{End}(V)$ i stąd również podalgebra Liego. Jeżeli w V wybierzemy bazę zgodną z flagą (i pierwszych wektorów bazy rozpina V_i), to w tej bazie elementy z $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ reprezentowane są macierzami górno-trójkątnymi z zerami na diagonali.

15.4. Podstawowe twierdzenia.

Twierdzenie 12 (Engel). *Niech $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ będzie działaniem (reprezentacją) algebry $\mathfrak{g}$ na przestrzeni wektorowej V i niech $\rho(x)$ będzie operatorem nilpotentnym dla każdego $x \in \mathfrak{g}$. Istnieje flaga $\mathcal{F} = \{V_i\}$ w V taka, że $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}(\mathcal{F})$.*

Twierdzenie to jest równoważne następującemu

Twierdzenie 13. *Przy założeniach twierdzenia Engela istnieje niezerowy (zakładamy, że $V \neq \{0\}$) wektor $v \in V$ taki, że $\rho(x)v = 0$ dla każdego $x \in \mathfrak{g}$.*

Jeżeli prawdziwe jest twierdzenie Engela, to jako v w Twierdzeniu 13 wybieramy dowolny, niezerowy element z V_1. W drugą stronę, jeżeli Twierdzenie 13 jest prawdziwe, to prawdziwość twierdzenia Engela dowodzimy indukcyjnie ze względu na wymiar V. Dla $\dim V = 1$ jest oczywiste. Niech $\dim V = n$. Wybieramy jako V_1 podprzestrzeń rozpiętą na wektorze v. V_1 zawiera się w jądrze każdego $\rho(x)$, więc ρ możemy rzutować do reprezentacji $\overline{\rho}$ na $\overline{V} = V/V_1$. Z założenia indukcyjnego istnieje flaga $\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{V}_i\}$ taka że $\overline{\rho} \subset \mathfrak{n}(\overline{\mathcal{F}})$. Jako V_{i+1} wybieramy przeciwobraz $\{\overline{V}_i\}$ względem kanonicznego rzutowania. Własność $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}(\mathcal{F})$ jest oczywista.

I jeszcze jedno twierdzenie.

Twierdzenie 14. *Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{ad}(x)$ jest operatorem nilpotentnym dla każdego $x \in \mathfrak{g}$.*

Dowód: Jeżeli $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna, to oczywiście każdy operator $\mathrm{ad}\, x$ jest nilpotentny. Niech teraz Każdy $\mathrm{ad}\, x$ będzie nilpotentny, czyli dla każdego $x \in \mathfrak{g}$ istnieje n_x takie, że $(\mathrm{ad}\, x)^{n_x} = 0$. Z twierdzenie Engela istnieje flaga $(\mathfrak{a}_i)$ w $\mathfrak{g}$

$$\{0\} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \cdots \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$$

taka, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i-1}$, czyli $\mathfrak{a}_i$ jest ideałem i spełniony jest trzeci z równoważnych warunków definiujących nilpotentność. ∎

16. Algebry rozwiązalne.

Zdefiniujemy teraz *ciąg pochodny* ideałów

$$\mathfrak{g} = D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots D^i\mathfrak{g} \cdots, \quad D^i\mathfrak{g} = \big[D^{i-1}\mathfrak{g}, D^{i-1}\mathfrak{g}\big].$$

Sprawdźmy najpierw, że to jest rzeczywiście ciąg ideałów.
$D^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem,
$D^3\mathfrak{g} = \big[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\big]$ i z tożsamości Jacobiego

$$\big[\mathfrak{g}, \big[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\big]\big] \subset \big[\big[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\big], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\big] + \big[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \big[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\big]\big] \subset \big[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\big]$$

i.t.d.

Twierdzenie 15. *Następujące warunki są równoważne:*

(1) *istnieje n takie, że $D^n\mathfrak{g} = \{0\}$,*
(2) *istnieje n takie, że dla dowolnego zbioru 2^n elementów z $\mathfrak{g}$ $[[[\cdots],[\cdots]],[[\cdots],[\cdots]]] = 0$,*
(3) *Istnieje ciąg ideałów*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{a}_n = \{0\} \tag{24}$$

takich, że algebry $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ są abelowe tzn. $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$.

Dowód: Równoważność (1) i (2) oraz wynikanie (1) $\Rightarrow$ (3) są oczywiste. Pozostaje do wykazania (3) $\Rightarrow$ (1). Mamy
$D^2 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1] \subset \mathfrak{a}_2$, stąd
$D^3\mathfrak{g} = \big[[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\big] \subset [\mathfrak{a}_2,\mathfrak{a}_2] \subset \mathfrak{a}_3$
$\vdots$
$D^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}_i$
$\vdots$
W szczególności, $D^n\mathfrak{g} = \{0\}$. ■

Definicja 7. Algebrę Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy *rozwiązalną*, jeżeli spełniony jest jeden z warunków Twierdzenia 15.

W szczególności, algebra nilpotentna jest rozwiązalna.

16.1. Przykład. Niech V będzie przestrzenią wektorową i niech $\mathcal{F} = \{V_i\}$ będzie flagą w V. Zdefiniujmy przestrzeń

$$\mathfrak{b}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathrm{End}(V) \mid xV_i \subset V_i \text{ dla } \ i \geqslant 0\}.$$

Jest to podalgebra łączna w $\mathrm{End}(V)$ i stąd również podalgebra Liego. Jeżeli w V wybierzemy bazę zgodną z flagą (i pierwszych wektorów bazy rozpina V_i), to w tej bazie elementy z $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ reprezentowane są macierzami górno-trójkątnymi. Widać stąd, że $\big[\mathfrak{b}(\mathcal{F}), \mathfrak{b}(\mathcal{F})\big] \subset \mathfrak{n}(\mathcal{F})$ (macierze górno-trójkątne z zerami na diagonali). Z nilpotentności $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ wynika, że $\big[\mathfrak{b}(\mathcal{F}), \mathfrak{b}(\mathcal{F})\big]$ jest rozwiązalna, a zatem i $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ jest rozwiązalna.

16.2. Twierdzenie Liego. Udowodnimy teraz odpowiednik twierdzenia Engela.

Twierdzenie 16 (Lie). *Niech $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ będzie działaniem rozwiązalnej algebry Liego $\mathfrak{g}$ w przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{C}$. Istnieje flaga $\mathcal{F} = (V_i)$ w przestrzeni V taka, że $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(\mathcal{F})$.*

Podobnie jak w przypadku twierdzenia Engela, mamy sformułowanie równoważne.

Twierdzenie 17. *Przy spełnionych założeniach twierdzenia 16 istnieje niezerowy wektor $v \in V$, własny dla wszystkich $\rho(x)$.*

Dowód: (Twierdzenia 17)
Zauważmy, że wektor v, o którym mówi twierdzenie indukuje odwzorowanie $\chi\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ takie, że $\rho(x)v = \chi(x)v$ ($\gamma(x)$ jest wartością własną $\rho(x)$ dla wektora v). Podstawą dowodu jest następującu lemat.

Lemat 2. *Niech $\mathfrak{h}$ będzie ideałem w algebrze Liego $\mathfrak{g}$, ρ reprezentacją (działaniem) algebry $\mathfrak{g}$ w V. Niech $v \in V$ będzie niezerowym wektorem takim, że dla pewnej funkcji $\chi\colon \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ mamy $\rho(x) = \chi(x)v$, $x \in \mathfrak{h}$. Wówczas $\chi([x,h]) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathfrak{g}$, $h \in \mathfrak{h}$.*

DOWÓD: Niech $0 \neq x \in \mathfrak{g}$. Tworzymy ciąg podprzestrzeni przestrzeni V

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 = \{v\} \subset V_2 = \{v, \rho(x)v\} \subset V_3 = \{v, \rho(x)v, \rho(x)^2 v\} \subset \cdots$$

V jest wymiaru skończonego, więc istnieje najmniejsze n takie, że $V_n = V_{n+1}$. Oczywiste, że $\dim V_i = i$ dla $i \leqslant n$ i $V_n = V_{n+k}$. Pokażemy teraz, że dla $h \in \mathfrak{h}$ mamy (xv oznacza tu $\rho(x)v$)

$$hx^i v = \chi(h)x^i v \ (mod\ V_i). \tag{25}$$

Dowód jest indukcyjny względem i. Dla $i = 0$ mamy $hv = \chi(h)v$ z założenia. Dla $i > 0$

$$hx^i = xhx^{i-1}v - [x, h]x^{i-1}v.$$

Z założenia indukcyjnego,

$$hx^{i-1}v = \chi(h)x^{i-1}v \ (mod\ V_{i-1})$$
$$[x, h]x^{i-1}v = \chi([x, h])x^{i-1}v \ (mod\ V_{i-1}).$$

Stąd, ponieważ $xV_{i-1} \subset V_i$,

$$xhx^{i-1}v = \chi(h)xx^{-1}v \ (mod\ V_i)$$

i

$$[x, h]x^{i-1}v \in V_i,$$

co kończy dowód relacji (25). Wynika z niej, że w bazie $(v, xv, \dots, x^{n-1}v)$, macierz $[h^i_j]$ obcięcia $\rho(h)$ do V_n jest macierzą górno-trójkątną z $\chi(h)$ na diagonali. Jest tak dla każdego $h \in \mathfrak{h}$. Ponieważ w tej bazie $\rho(x)$ (obcięte do V_n) jest macierzą $[x^i_j]$ z jedynkami bezpośrednio pod diagonalą, niezerową ostatnią kolumną i zerami na pozostałych miejscach, dostajemy bezpośrednim rachunkiem, że

$$n\chi([x, h]) = \mathrm{Tr}_{V_n}(\rho([x, h])) = \mathrm{Tr}([x^i_j][h^i_j] - [h^i_j][x^i_j]) = \mathrm{Tr}([x^i_j][h^i_j]) - \mathrm{Tr}([h^i_j][x^i_j])$$
$$= (\sum_1^{n-1} h^i_{i+1} + \chi(h)x^n_n) - (\sum_1^{n-1} h^i_{i+1} + \chi(h)x^n_n) = 0.$$

Stąd $\chi([x, h]) = 0$. ■

Wracamy do dowodu Twierdzenia Liego, indukcyjnego ze względu na wymiar algebry. Dla $\dim \mathfrak{g} = 0$ twierdzenie jest trywialne. Niech więc $\dim \mathfrak{g} > 0$. Ponieważ algebra $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna, to $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$, czyli istnieje podprzestrzeń $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ko-wymiaru 1, zawierająca $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Z tego zawierania wynika, że $\mathfrak{h}$ jest ideałem. Z założenia indukcyjnego wynika istnienie wektora $v \in V$, własnego dla wszystkich $\rho(h)$, $h \in \mathfrak{h}$, czyli

$$\rho(h)v = \chi(h)v.$$

Wprowadźmy przestrzeń

$$W = \{w \in V \mid \rho(h)w = \chi(h)w, \quad h \in \mathfrak{h}\}.$$

Przestrzeń ta zawiera v, więc jest niepusta. Z Lematu wynika, że dla $x \in \mathfrak{g}$, $w \in W$, $h \in \mathfrak{h}$

$$\rho(h)\rho(x)w = \rho(x)\rho(h)w - \rho([x, h])w = \chi(h)\rho(x)w - \chi([x, h])w = \chi(h)\rho(x)w,$$

czyli $\rho(x)w \in W$. W jest podprzestrzenią niezmienniczą dla wszystkich $\rho(x)$. Wybierzmy $x \in \mathfrak{g}$ taki, że $x \notin \mathfrak{h}$. W przestrzeni W (nad ciałem $\mathbb{C}$!) istnieje wektor własny v_0 operatora $\rho(x)$. Z definicji W, wektor ten jest te wektorem wasnym dla wszystkich $\rho(h)$, $h \in \mathfrak{h}$. Stąd i z faktu, że ko-wymiar $\mathfrak{h}$ w $\mathfrak{g}$ jest 1, wynika, że v_0 jest wektorem własnym dla wszystkich operatorów reprezentacji ρ. ■

Wnioski:

(1) W algebrze rozwiązalnej istnieje flaga ideałów. Wystarczy zastosować twierdzenie Liego do reprezentacji ad.
(2) Jeżeli $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna, to algebra pochodna $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentna.

16.3. Forma Killinga i kryterium Cartana. Niech $B\colon V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ będzie bilinową formą nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech ρ_i będzie działaniem algebry $\mathfrak{g}$ na przestrzeni V_i. Mówimy, że forma B jest *niezmiennicza* względem działań algebry, jeżeli

$$B(\rho_1(x)v, w) + B(v, \rho_2(x)w) \quad \text{dla} \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Niech ρ będzie działaniem $\mathfrak{g}$ na przestrzeni wektorowej V. Przykładem formy biliniowej jest odwzorowanie

$$B_\rho\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}\colon (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_V(\rho(x)\rho(y)).$$

Forma ta jest symetryczna. Pokażemy, że jest niezmiennicza względem działania dołączonego ad. Istotnie,

$$\begin{aligned} B_\rho(\operatorname{ad} x(x_1), x_2) + B_\rho(x_1, \operatorname{ad} x(x_2)) &= \mathrm{Tr}(\rho([x, x_1])\rho(x_2)) + \mathrm{Tr}(\rho(x_1)\rho([x, x_2])) \\ = \mathrm{Tr}\big(\rho(x)\rho(x_1)\rho(x_2) - \rho(x_1)\rho(x)\rho(x_2) &+ \rho(x_1)\rho(x)\rho(x_2) - \rho(x_1)\rho(x_2)\rho(x)\big) = 0. \end{aligned}$$

W przypadku reprezentacji dołączonej forma ta nazywana jest *formą Killinga*: $B(x, y) = \mathrm{Tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y))$.

TWIERDZENIE 18 (KRYTERIUM CARTANA). *Niech $\mathfrak{g}$ będzie podalgebrą algebry Liego endomorfizmów* $\mathrm{End}(V)$ *przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) *algebra $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna,*
(2) $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ *dla $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

DOWÓD: Wystarczy rozpatrzeć przypadek ciała liczb zespolonych. W przypadku ciała $\mathbb{R}$ przechodzimy do kompleksyfikacji przestrzeni V. Z twierdzenia o strukturze endomorfizmów wiemy, że każdy endomorfizm $u \in \mathrm{End}(V)$ ma przedstawienie $u = s + n$, gdzie $sn = ns$, endomorfizm s ma bazę wektorów własnych i n jest nilpotentny. Rozkład ten jest jednoznaczny.

Niech więc $\mathfrak{g}$ będzie algebrą rozwiązalną. Z twierdzenia Liego, w przestrzeni V istnieje flaga (V_i), niezmiennicza względem $\mathfrak{g}$. W bazie zgodnej z flagą, endomorfizmy z $\mathfrak{g}$ mają postać górnotrójkątną, a z $D(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ z zerami na diagonali. Stąd $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ dla $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Niech teraz $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ dla $x \in \mathfrak{g}$ i $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Mamy pokazać, że ideał pochodny jest nilpotentny, czyli, że każdy $u \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest nilpotentny. Niech $u = s + n$ będzie rozkładem, o którym mowa powyżej. Mamy pokazać, że $s = 0$, co wynika z równości (do udowodnienia) $\mathrm{Tr}(u\bar{s}) = 0$, gdzie $\bar{s}$ jest sprzężeniem zespolonym. Problem w tym, że $\bar{s}$ na ogół nie należy do $\mathfrak{g}$. Ponieważ $u \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, więc wystarczy mieć równość $0 = \mathrm{Tr}([x, y]\bar{s}) = \mathrm{Tr}(y[\bar{s}, x])$ dla $x, y \in \mathfrak{g}$. Zadanie sprowadza się do pokazania, że $[\bar{s}, x] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, co przekracza nieco ramy naszego wykładu. ■

17. Algebry półproste.

17.1. Ideały rozwiązalne. Zaczniemy od prostego stwierdzenia.

STWIERDZENIE 15. *Jeżeli $\mathfrak{a}$ jest ideałem rozwiązalnym w algebrze $\mathfrak{g}$ oraz algebra ilorazowa $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest rozwiązalna, to algebra $\mathfrak{g}$ też jest rozwiązalna.*

DOWÓD: Niech $\tau\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ będzie kanonicznym rzutowaniem. Z definicji algebry ilorazowej, $\tau^{-1}(D^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})) = D^i\mathfrak{g} + \mathfrak{a}$. Z rozwiązalności $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ istnieje n takie, że $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$. Zatem $D^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ i z rozwiązalności $\mathfrak{a}$ wynika rozwiązalność $\mathfrak{g}$. ■

Jeżeli teraz $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są ideałami rozwiązalnymi, to ideał $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ jest też rozwiązalny. Wystarczy zauważyć, że algebra

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a})$$

jest rozwiązalna (bo $\mathfrak{b}$ jest rozwiązalna) i skorzystać ze Stwierdzenia 15. Wynika stąd, że w algebrze istnieje dokładnie jeden maksymalny ideał rozwiązalny. Nazywany jest *radykałem* algebry.

17.2. Algebry półproste i proste. Algebrę Liego nazywamy półprostą, jeżeli jej radykał jest zerowy. Równoważnie, algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest półprosta, jeżeli nie zawiera niezerowych ideałów abelowych. Istotnie, jeżeli istnieje niezerowy ideał abelowy, czyli rozwiązalny, to radykał jest niezerowy. Odwrotnie, jeżeli radykał $\mathfrak{r}$ jest niezerowy, to ostatni nietrywialny ideał w ciągu pochodnym ideałów algebry $\mathfrak{r}$ jest ideałem abelowym w $\mathfrak{g}$.

TWIERDZENIE 19. *Algebra $\mathfrak{g}$ jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy jej forma Killinga jest niezdegenerowana.*

DOWÓD: Oznaczmy przez $\mathfrak{n}$ przestrzeń wszystkich $x \in \mathfrak{g}$, dla których $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = 0$ przy dowolnym $y \in \mathfrak{g}$. Sprawdzamy, że $\mathfrak{n}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$. Istotnie, z niezmienniczości formy Killinga mamy, dla $x \in \mathfrak{n}$,

$$\forall z, y \in \mathfrak{g} \quad \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}[z,x]\, \mathrm{ad}\, y) = -\,\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}[z,y]) = 0$$

i stąd $[z,x] \in \mathfrak{n}$. Dla $x \in \mathfrak{n}$ i $y \in [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ mamy $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = 0$, czyli, na mocy kryterium Cartana 18 algebra $\mathrm{ad}(\mathfrak{n})$ jest rozwiązalną podalgebrą $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Ale $\mathrm{ad}(\mathfrak{n})$ jest ilorazem $\mathfrak{n}$ przez centrum algebry $\mathfrak{g}$, które jest abelowe, więc rozwiązalne. Ze Stwierdzenia 15 wynika, że ideał $\mathfrak{n}$ jest rozwiązalny. Jeżeli algebra $\mathfrak{g}$ jest półprosta, to $\mathfrak{n} = \{0\}$.

W drugą stronę. Mamy pokazać, że jeżeli forma Killinga jest niezdegenerowana, to ideał abelowy w $\mathfrak{g}$ jest zerowy. Niech więc $\mathfrak{a}$ będzie ideałem abelowym. Rozpatrzmy $\sigma = \mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y$ dla $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{g}$. Mamy $\sigma z = [x,[y,z]] \in \mathfrak{a}$, więc $\sigma(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$. Ponadto, dla $z \in \mathfrak{a}$, $\sigma z = 0$, bo $[y,z] \in \mathfrak{a}$. Stąd $\sigma^2 = 0$ i $\mathrm{Tr}\, \sigma = 0$. ■

Algebra $\mathfrak{g}$ nazywa się *prostą*, jeżeli jest ona

(i) nieabelowa,
(ii) nie zawiera ideałów właściwych.

17.3. Podstawowe własności algebr półprostych.

TWIERDZENIE 20. *Niech $\mathfrak{a}$ będzie ideałem w algebrze półprostej $\mathfrak{g}$. Wówczas podprzestrzeń ortogonalna (względem formy Killinga) $\mathfrak{a}^\perp$ jest też ideałem i $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$ (iloczyn prosty algebr Liego).*

DOWÓD: Z niezmienniczości formy Killinga, dla $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{a}^\perp$, $z \in \mathfrak{a}$ mamy

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}[x,y]\, \mathrm{ad}\, z) = -\,\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, y\, \mathrm{ad}[x,z]).$$

$\mathfrak{a}$ jest ideałem, więc $[x,z] \in \mathfrak{a}$ i stąd $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, y\, \mathrm{ad}[x,z]) = 0$. Zatem $[x,y] \in \mathfrak{a}^\perp$, czyli $\mathfrak{a}^\perp$ jest ideałem. Stąd i z niezmienniczości formy Killinga mamy, dla $x, y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$, $z \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, z\, \mathrm{ad}[x,y]) = -\,\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}[x,z]\, \mathrm{ad}\, y) = 0,$$

czyli $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ jest abelowym ideałem w $\mathfrak{g}$. Algebra jest półprosta, więc $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Jako przestrzeń wektorowa $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}^\perp$. Ponadto, dla $x \in \mathfrak{a}$ i $y \in \mathfrak{a}^\perp$ mamy $[x,y] = 0$, bo $[x,y] \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. Stąd $\mathfrak{g}$ jest iloczynem prostym algebr Liego $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}^\perp$. ■

Ideały w $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^\perp$ są też ideałami w $\mathfrak{g}$. Algebry $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^\perp$ są półproste, więc stosując indukcję dostajemy rozkład na algebry proste (nie posiadające ideałów właściwych).

STWIERDZENIE 16. *Półprosta algebra Liego jest iloczynem prostym prostych algebr Liego.*

Dla prostych algebr (więc nieabelowych) mamy oczywistą równość $D^i\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Stąd również dla algebr półprostych mamy $D^i\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Zauważmy, że rozkład algebry półprostej na proste jest jednoznaczny.

TWIERDZENIE 21 (H. WEYL). *Każda skończenie-wymiarowa reprezentacja półprostej algebry Liego jest wpełni przywiedlna.*

DOWÓD: Bez dowodu. ■

Z twierdzenia tego wynikają dwa ważne wnioski.

WNIOSEK 5. *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostym ideałem w algebrze $\mathfrak{h}$. Istnieje jedyny ideał $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ taki, że $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ (suma prosta).*

DOWÓD: Algebra $\mathfrak{g}$ działa w algebrze $\mathfrak{h}$, więc z Twierdzenia Weyla istnieje podprzestrzeń $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, dopełniająca $\mathfrak{g}$ i niezmiennicza względem $\mathrm{ad}\, x$, $x \in \mathfrak{g}$. Pokażemy, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \{0\}$. Istotnie, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g}$, bo $\mathfrak{g}$ jest ideałem i $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, bo $\mathfrak{a}$ jest niezmiennicza. Jeżeli teraz $y = x + a \in \mathfrak{h}$ jest takie, że $[\mathfrak{g}, y] = [\mathfrak{g}, x] = 0$, to x należy do centrum algebry półprostej $\mathfrak{g}$, czyli $x = 0$. Zatem $\mathfrak{a}$ składa się ze wszystkich elementów $\mathfrak{h}$, zerujących podalgebrę $\mathfrak{g}$. Wynika stąd jednoznaczność $\mathfrak{a}$ i to, że jest to ideał (tożsamość Jacobiego). ■

WNIOSEK 6. *Każde różniczkowanie algebry półprostej $\mathfrak{g}$ ma postać $\mathrm{ad}\, x$.*

DOWÓD: Połóżmy $\mathfrak{h} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ i zastosujmy poprzedni wniosek ($\mathfrak{g}$ jest ideałem w $\mathfrak{h}$, bo $[D, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}(Dx)$). W rozkładzie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$, ideał $\mathfrak{a}$ składa się z różniczkowań komutujących z $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$. Niech więc $D \in \mathfrak{a}$. Mamy, dla każdego $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(Dx) = [D, \mathrm{ad}\, x] = 0$ i stąd $Dx = 0$, bo centrum $\mathfrak{g}$ jest zerowe. Stąd $D = 0$ i $\mathfrak{a} = \{0\}$. ■

17.4. Zwarte algebry i grupy. Zacznijmy od przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Grupy Liego są grupami analitycznymi, więc funkcje analityczne na zwartej grupie są stałe (zasada maximum dla funkcji analitycznych). W szczególności, przy ustalonej bazie w algebrze grupy, współczynniki macierzy Ad_g są funkcjami analitycznymi na grupie, więc stałymi dla grupy zwartej i spójnej. Na takiej grupie $\mathrm{Ad}_g = \mathrm{Ad}_e = Id_{\mathfrak{g}}$, czyli

$$g(\exp x)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_g(x)) = \exp x.$$

Zatem grupa jest lokalnie, a stąd globalnie abelowa. Pokazuje się, że musi to być torus, czyli $G = \mathbb{C}^n/\Gamma$, gdzie Γ jest dyskretną podgrupą rzędu $2n$ w $\mathbb{C}^n$.

Przypadek rzeczywisty jest mniej restrykcyjny. Na zwartej grupie Liego można wprowadzić metrykę riemannowską, lewo- i prawo-niezmienniczą (więc Ad-niezmienniczą). Konstrukcja niezmienniczej metryki wygląda tak: definiujemy tensor metryczny w jedności grupy i przenosimy na całą grupę przy pomocy lewego przesunięcia. otrzymaną metrykę uśredniamy (grupa zwarta!) całkując względem miary prawo-niezmienniczej. Wynik jest dwustronnie niezmienniczą metryką riemannowską. Stąd definicja *algebry zwartej* jako posiadającej niezmienniczą metrykę euklidesową.

TWIERDZENIE 22. *Niech $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą, zwartą algebrą Liego. Wówczas $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$ (iloczyn prosty), gdzie $\mathfrak{c}$ jest abelową, a $\mathfrak{s}$ półprostą algebrą Liego z ujemnie określoną formą Killinga.*

DOWÓD: Niech g będzie niezmienniczą formą euklidesową. Ortogonalne dopełnienie ideału jest też ideałem: dla $z \in \mathfrak{a}$, $x \in \mathfrak{a}^{\perp}$, $y \in \mathfrak{g}$ mamy

$$g([y, x], z) = -g(x, [y, z]) = 0,$$

więc $[x, y] \in \mathfrak{a}^{\perp}$. Zatem $\mathfrak{g}$ jest w pełni przywiedlna względem dziełania ad i rozkłada się na sumę prostą minimalnych niezerowych ideałów $\mathfrak{a}_i$. Każdy z ideałów $\mathfrak{a}_i$ jest albo jednowymiarowy (abelowy) albo prosty. Tak więc $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{s}$, gdzie $\mathfrak{c}$ jest algebrą abelową, a $\mathfrak{s}$ półprostą. Pozostaje do pokazania, że forma Killinga algebry $\mathfrak{s}$ jest ujemnie określona. Niech $x, y, z \in \mathfrak{s}$. Z niezmienniczości g mamy $0 = g([x, y], z) + g(y, [x, z])$ i kładąc $z = [x, y]$ dostajemy $g([x, y], [x, y]) = -g(y, (\mathrm{ad}\, x)^2 y)$. Niech (y_i) będzie bazą ortonormalną w $\mathfrak{s}$. Dostajemy

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{s}}(\mathrm{ad}\, x)^2 = \sum_i g(y_i, (\mathrm{ad}\, x)^2 y_i) = -\sum_i g([x, y_i], [x, y_i]) \leqslant 0.$$

Jeżeli $x \neq 0$, to $\mathrm{ad}\, x \neq 0$ (centrum algebry $\mathfrak{s}$ jest trywialne) i $\sum_i g([x, y_i], [x, y_i]) \neq 0$. Stąd ujemna określoność formy Killinga na $\mathfrak{s}$.

■

Mamy też twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 23. *Jeżeli rzeczywista algebra Liego jest postaci $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, gdzie $\mathfrak{c}$ jest abelową, a $\mathfrak{s}$ półprostą algebrą Liego z ujemnie określoną formą Killinga, to istnieje zwarta grupa Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Jeżeli $\mathfrak{c} = 0$, to każda spójna grupa Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ jest zwarta.*

17.5. Przykłady grup i algebr półprostych. Grupę spójną nazywamy półprostą (prostą), jeżeli jej algebra jest półprosta (prosta).

(1) Składowa jedności w $\mathrm{Aut}(V)$ nie jest półprosta, bo jej algebra Liego $\mathrm{End}(V)$ zawiera ideał abelowy odwzorowań proporcjonalnych do identyczności.
(2) Niech $\dim V = 2n$ z zadaną formą symplektyczną (skośnie symetryczą i niezdegenerowaną) Ω. Algebra $\mathfrak{sp}(V)$ endomorfizmów przestrzeni V, dla których forma Ω jest niezmiennicza, jest prosta.
(3) Algebra $\mathfrak{sl}(V)$ endomorfizmów przestrzeni V o śladzie zerowym jest prosta dla $\dim V > 1$.
(4) Algebra $\mathfrak{o}_B(V)$ endomorfizmów, dla których niezegenerowana i symetryczna forma biliniowa B jest niezmiennicza, jest półprosta dla $\dim V > 2$ a także prosta dla $\dim V > 4$.