Struktury Geometryczne Mechaniki

Paweł Urbański

urbanski@fuw.edu.pl

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Uniwersytet Warszawski

MOTYWACJE

√ Dlaczego mechanika (analityczna)?

MOTYWACJE

- √ Dlaczego mechanika (analityczna)? Mechanika jest miejscem, w którym kształtuje się język fizyki. Warto więc wracać do mechaniki, by lepiej zrozumieć sens pewnych konstrukcji, stosowanych poza mechaniką, ale przez analogię do mechaniki.

MOTYWACJE

- Dlaczego mechanika (analityczna)? Mechanika jest miejscem, w którym kształtuje się język fizyki. Warto więc wracać do mechaniki, by lepiej zrozumieć sens pewnych konstrukcji, stosowanych poza mechaniką, ale przez analogię do mechaniki.
- Dlaczego geometria (różniczkowa)?

MOTYWACJE

- √ Dlaczego mechanika (analityczna)? Mechanika jest miejscem, w którym kształtuje się język fizyki. Warto więc wracać do mechaniki, by lepiej zrozumieć sens pewnych konstrukcji, stosowanych poza mechaniką, ale przez analogię do mechaniki.
- √ Dlaczego geometria (różniczkowa)? Geometria różniczkowa pozwala mówić o układach językiem niezależnym od układów odniesienia (cechowań). Pozwala eliminować struktury zbyteczne, pozostawiając na widoku jedynie te istotne.

Opis Wariacyjny

Struktury geometryczne związane z wariacyjnym opisem układów fizycznych.

Opis Wariacyjny

Struktury geometryczne związane z wariacyjnym opisem układów fizycznych.

- √ W opisie wariacyjnym zasada wariacyjna prowadzi do listy układów regularnych (potencjalnych), z którymi opisywany układ jest w równowadze (statycznej lub dynamicznej).

Opis Wariacyjny

Struktury geometryczne związane z wariacyjnym opisem układów fizycznych.

- √ W opisie wariacyjnym zasada wariacyjna prowadzi do listy układów regularnych (potencjalnych), z którymi opisywany układ jest w równowadze (statycznej lub dynamicznej).
- √ Jest to więc coś więcej niż szukanie punktów stacjonarnych potencjału (działania w przypadku dynamiki).

Opis Wariacyjny

Struktury geometryczne związane z wariacyjnym opisem układów fizycznych.

- √ W opisie wariacyjnym zasada wariacyjna prowadzi do listy układów regularnych (potencjalnych), z którymi opisywany układ jest w równowadze (statycznej lub dynamicznej).
- √ Jest to więc coś więcej niż szukanie punktów stacjonarnych potencjału (działania w przypadku dynamiki).
- √ Można powiedzieć, że w opisie wariacyjnym interesuje nas cała różniczka potencjału (działania) lub ich uogólnienia (np w opisie układów z dysypacją, więzami itp).

Czym się zajmujemy?

- √ Strukturami geometrycznymi związanymi z dynamiką infinitezymalną, tzn konfiguracjami dynamicznymi są położenia i prędkości - elementy wiązki stycznej do rozmaitości położeń.

Czym się zajmujemy?

- Strukturami geometrycznymi związanymi z dynamiką infinitezymalną, tzn konfiguracjami dynamicznymi są położenia i prędkości - elementy wiązki stycznej do rozmaitości położeń.
- Opisem wariacyjnym układów dynamicznych z więzami i dysypacją. W szczególności, wynikającymi z niego odpowiednikami równań Eulera-Lagrange'a.

Czym się zajmujemy?

- Strukturami geometrycznymi związanymi z dynamiką infinitezymalną, tzn konfiguracjami dynamicznymi są położenia i prędkości - elementy wiązki stycznej do rozmaitości położeń.
- Opisem wariacyjnym układów dynamicznych z więzami i dysypacją. W szczególności, wynikającymi z niego odpowiednikami równań Eulera-Lagrange'a.
- Podstawami rachunku wariacyjnego, czyli zasadą prac wirtualnych w różnych jej odmianach.

- √ Geometrią wartości afinicznych, tzn gemetrią, w której funkcje zastąpione są cięciami wiązki afinicznej. Geometria taka jest potrzebna do opisu niezależnego od układu odniesienia (cechowania) (mechanika newtonowska, zależna od czasu, relatywistycznej cząstki naładowanej itp).

Kto się zajmuje?

- Janusz Grabowski (IM PAN)
- Katarzyna Grabowska
- Maciej Łukasik
- Paweł Urbański

Opis lagranżowski

$$L\colon \mathsf{T}M \longrightarrow \mathbb{R}$$

Opis lagranżowski

$$L\colon \mathsf{T}M \longrightarrow \mathbb{R}$$

stąd

$$\mathrm{d}L\colon \mathsf{T}\mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$$

Opis lagranżowski

$$L\colon \mathsf{T}M \longrightarrow \mathbb{R}$$

stąd

$$\mathrm{d}L\colon \mathsf{T}\mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$$

Gdzie równanie?

Opis lagranżowski

$$L\colon \mathsf{T}M \longrightarrow \mathbb{R}$$

stąd

$$\mathrm{d}L\colon \mathsf{T}\mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$$

Gdzie równanie?

Istnieje kanoniczny diffeomorfizm

$$\alpha_M\colon \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$$

$$D = \alpha_M^{-1}(\mathrm{d}L(\mathsf{T}M))$$

jest równaniem na krzywe fazowe (bez sił zewnętrznych, ale można je bez trudu dołączyć).

Opis hamiltonowski

Tą samą podrozmaitość D możemy przenieść do $\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$, korzystając z istnienia na T^*M kanonicznej formy symplektycznej ω_M i odpowiadającemu jej izomorfizmowi wiązek wektorowych

$$\beta_M : \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$$

Opis hamiltonowski

Tą samą podrozmaitość D możemy przenieść do $\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$, korzystając z istnienia na T^*M kanonicznej formy symplektycznej ω_M i odpowiadającemu jej izomorfizmowi wiązek wektorowych

$$\beta_M : \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$$

i pytać, czy dostaliśmy obraz różniczki funkcji na T^*M.

Opis hamiltonowski

Tą samą podrozmaitość D możemy przenieść do $\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$, korzystając z istnienia na T^*M kanonicznej formy symplektycznej ω_M i odpowiadającemu jej izomorfizmowi wiązek wektorowych

$$\beta_M : \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$$

i pytać, czy dostaliśmy obraz różniczki funkcji na T^*M.
Odpowiedź znajdziemy w znanych twierdzeniach geometrii symplektycznej.

Przy okazji: transformacja Legendre'a

We współczesnym rozumieniu, transformacja Legendre'a jest przejściem od lagranżjanu (opisu lagranżowskiego) do (na ogół uogólnionego) hamiltonianu.

Przy okazji: transformacja Legendre'a

We współczesnym rozumieniu, transformacja Legendre'a jest przejściem od lagranżjanu (opisu lagranżowskiego) do (na ogół uogólnionego) hamiltonianu.

Przejście to oparte jest na kanonicznym symplektomorfiźmie T^*E i T^*E^* (dla dowolnej wiązki wektorowej E), generowanym przez ewaluację między E i E^*.

Przy okazji: transformacja Legendre'a

- We współczesnym rozumieniu, transformacja Legendre'a jest przejściem od lagranżjanu (opisu lagranżowskiego) do (na ogół uogólnionego) hamiltonianu.
- Przejście to oparte jest na kanonicznym symplektomorfiźmie T^*E i T^*E^* (dla dowolnej wiązki wektorowej E), generowanym przez ewaluację między E i E^*.
- Używa się tu standardowych twierdzeń o składaniu relacji symplektycznych.

Mamy więc trzy diffeomorficzne rozmaitości:

$$\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M \xleftarrow{\ \beta_M\ } \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \xrightarrow{\ \alpha_M\ } \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$$

Mamy więc trzy diffeomorficzne rozmaitości:

$$\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M \xleftarrow{\quad\beta_M\quad} \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \xrightarrow{\quad\alpha_M\quad} \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$$

W literaturze mówi sią o "trójce Tulczyjewa".

Mamy więc trzy diffeomorficzne rozmaitości:

$$\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M \xleftarrow{\quad\beta_M\quad} \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \xrightarrow{\quad\alpha_M\quad} \mathsf{T}^*\mathsf{T}M$$

W literaturze mówi sią o "trójce Tulczyjewa".

Jakie struktury geometryczne tkwią w tym obrazku?

Podwójne wiązki wektorowe

Każda z powyższych rozmaitości ma (autonomicznie) dwie struktury wiązki wektorowej: nad $\mathsf{T}M$ i nad T^*M.

Podwójne wiązki wektorowe

Każda z powyższych rozmaitości ma (autonomicznie) dwie struktury wiązki wektorowej: nad $\mathsf{T}M$ i nad T^*M.

Są to szczególne przypadki ogólnej sytuacji: Dla każdej wiązki wektorowej $\tau\colon E \longrightarrow M$, jej wiązka styczna $\mathsf{T}E$ i wiązka kostyczna T^*E posiadają dwie (zgodne) struktury wiązki wektorowej

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{T}E & \xrightarrow{\mathsf{T}\tau} & E \\
{\scriptstyle \tau_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\
E & \xrightarrow{\tau} & M
\end{array}
\qquad , \qquad
\begin{array}{ccc}
\mathsf{T}^*E & \xrightarrow{\mathsf{T}^*\tau} & E^* \\
{\scriptstyle \tau_{E^*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
E & \xrightarrow{\tau} & M
\end{array}
\; .
$$

Zgodność struktur wiązek wektorowych można wyartykułować tak: odpowiadające im mnożenia przez liczby (będące działaniem monoidu multyplikatywnego $(\mathbb{R}, \cdot)$) komutują (Grabowski i Rotkiewicz).

Zgodność struktur wiązek wektorowych można wyartykułować tak: odpowiadające im mnożenia przez liczby (będące działaniem monoidu multyplikatywnego $(\mathbb{R}, \cdot)$) komutują (Grabowski i Rotkiewicz).

Ogólnie: rozmaitość z dwiema zgodnymi strukturami wiązki wektorowej nazywa sią podwójną wiązką wektorową (Pradines, 1974) - nasza specjalność.

Struktury symplektyczne

$\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$ i $\mathsf{T}^*\mathsf{T}M$ są rozmaitościami symplektycznymi z formami ω_{T^*M} i $\omega_{\mathsf{T}M}$.

Struktury symplektyczne

$\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$ i $\mathsf{T}^*\mathsf{T}M$ są rozmaitościami symplektycznymi z formami ω_{T^*M} i $\omega_{\mathsf{T}M}$.

$\mathsf{T}\mathsf{T}^*M$ ma strukturę symplektyczną $\mathrm{d}_{\mathsf{T}}\omega_M$

Struktury symplektyczne

$\mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M$ i $\mathsf{T}^*\mathsf{T}M$ są rozmaitościami symplektycznymi z formami ω_{T^*M} i $\omega_{\mathsf{T}M}$.

$\mathsf{T}\mathsf{T}^*M$ ma strukturę symplektyczną $\mathrm{d}_{\mathsf{T}}\omega_M$

Wymienione struktury symplektyczne respektują (są liniowe) obie struktury wiązki wektorowej.

Struktura symplektyczna (Poissona) na wiązce wektorowej $\tau\colon E \rightarrow M$ jest liniowa, jeżeli odpowiednie odwzorowanie

$$\mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{T}^*E \quad (\mathsf{T}^*E \longrightarrow \mathsf{T}E)$$

jest liniowe ze względu na obie struktury wiązki wektorowej.

Struktura symplektyczna (Poissona) na wiązce wektorowej $\tau\colon E \longrightarrow M$ jest liniowa, jeżeli odpowiednie odwzorowanie

$$\mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{T}^{*}E \quad \left(\mathsf{T}^{*}E \longrightarrow \mathsf{T}E\right)$$

jest liniowe ze względu na obie struktury wiązki wektorowej.

Trójkę Tulczyjewa możemy teraz przedstawić diagramem:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{T}^*\mathsf{T}^*M \arrow[rrr, "\beta_M^{-1}"] \arrow[ddl] \arrow[dr] & & & \mathsf{T}\mathsf{T}^*M \arrow[ddl] \arrow[dr] & & & \mathsf{T}^*\mathsf{T}M \arrow[lll, "\alpha_M^{-1}"'] \arrow[ddl] \arrow[dr] & \\
 & & \mathsf{T}M \arrow[rrr] \arrow[ddl] & & & \mathsf{T}M \arrow[ddl] & & & \mathsf{T}M \arrow[lll] \arrow[ddl] \\
\mathsf{T}^*M \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & \mathsf{T}^*M \arrow[dr] & & & \mathsf{T}^*M \arrow[lll] \arrow[dr] & & \\
 & M \arrow[rrr] & & & M & & & M \arrow[lll] &
\end{tikzcd}
$$

α_M, β_M i cały ten diagram to równoważny opis jednej, bardzo znanej struktury: algebroidu wiązki stycznej.

α_M, β_M i cały ten diagram to równoważny opis jednej, bardzo znanej struktury: algebroidu wiązki stycznej.

Po ludzku: nawiasu Liego pól wektorowych na rozmaitości M!

Algebroidy Liego

Standardowa definicja algebroidu Liego w wiązce wektorowej $\tau \colon E \to M$:

Algebroidy Liego

Standardowa definicja algebroidu Liego w wiązce wektorowej $\tau\colon E \to M$:

Nawias Liego cięć wiązki E, który jest pseudoróżniczkowaniem za względu na mnożenie cięć przez funkcje, tzn

$$[X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y,$$

gdzie $\rho\colon E \to \mathsf{T}M$ jest odwzorowaniem wiązek wektorowych (nad identycznością w M), zwanym kotwicą algebroidu.

Przykłady algebroidów Liego

- algebra Liego,
- dystrybucja foliacji,
- wiązka kostyczna rozmaitości poissonowskiej,
- wiązka styczna do wiązki głównej podzielona przez działanie grupy.

Dla algebroidu Liego mamy odpowiedni diagram (nasza specjalność):

Dla algebroidu Liego mamy odpowiedni diagram (nasza specjalność):

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{T}^* E^* \arrow[rrr, "\widetilde{\Lambda}"] \arrow[dr] \arrow[ddl] & & & \mathsf{T} E^* \arrow[dr] \arrow[ddl] & & & \mathsf{T}^* E \arrow[lll, "\varepsilon"'] \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
 & & E \arrow[rrr] \arrow[ddl] & & & \mathsf{T} M \arrow[ddl] & & & E \arrow[lll] \arrow[ddl] \\
E^* \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & E^* \arrow[dr] & & & E^* \arrow[lll] \arrow[dr] & & \\
 & M \arrow[rrr] & & & M & & & M \arrow[lll] &
\end{tikzcd}
$$

Dla algebroidu Liego mamy odpowiedni diagram (nasza specjalność):

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{T}^*E^* \arrow[rrrr, "\widetilde{\Lambda}"] \arrow[dr] \arrow[ddl] & & & & \mathsf{T}E^* \arrow[dr] \arrow[ddl] & & & & \mathsf{T}^*E \arrow[llll, "\varepsilon"'] \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
 & & E \arrow[rrrr] \arrow[ddl] & & & & \mathsf{T}M \arrow[ddl] & & & & E \arrow[llll] \arrow[ddl] \\
E^* \arrow[rrrr] \arrow[dr] & & & & E^* \arrow[dr] & & & & E^* \arrow[llll] \arrow[dr] & & \\
 & M \arrow[rrrr] & & & & M & & & & M \arrow[llll] &
\end{tikzcd}
$$

$\widetilde{\Lambda}$ reprezentuje tu liniową strukturę Poissona.

Istnienie tego diagramu pozwala uprawiać mechanikę analityczną w oparciu o strukturę algebroidu

Istnienie tego diagramu pozwala uprawiać mechanikę analityczną w oparciu o strukturę algebroidu

Przykłady:

- bryła sztywna (algebra Liego przestrzenią konfiguracyjną),
- redukcje lagranżowskie układów z symetriami.

Kilka prac.

- √ K. Konieczna and P. Urbański: Double vector bundles and duality, *Arch. Math. (Brno)* **35**, (1999), 59–95
- √ J. Grabowski and P. Urbański: Algebroids – general differential calculi on vector bundles, *J. Geom. Phys.*, **31** (1999), 111-1141.
- √ K. Grabowska, J. Grabowski and P. Urbański: Lie brackets on affine bundles, *Ann. Global Anal. Geom.* **24** (2003), 101–130.
- √ P. Urbański: An affine framework for analytical mechanics, In: *Classical and Quantum Integrability*, BCP**59**, Warsaw 2003, 257–279.

- K. Grabowska and P. Urbański: AV-differential geometry and Newtonian mechanics, *Rep. Math. Phys.* **58** (2006), 21–40.
- K. Grabowska, J. Grabowski and P. Urbański: AV-differential geometry: Euler-Lagrange equations, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 1984–1998.
- 35. W.M. Tulczyjew and P. Urbański: Constitutive sets of convex static systems, *Rep. Math. Phys.*, **60** No. 2 (2007), 199–219.

Zakończenie

Zapytano mądrego rabina - "co to jest fizyka?"

Zakończenie

Zapytano mądrego rabina - "co to jest fizyka?" Odpowiedział:

To jest to, co każe pamiętać, że należy wracać do źródeł.

Zakończenie

Zapytano mądrego rabina - "co to jest fizyka?"
Odpowiedział:

To jest to, co każe pamiętać, że należy wracać do źródeł.

To znaczy być oryginalnym.