



Struktury Geometryczne Mechaniki

Paweł Urbanski

urbanski@fuw.edu.pl

Katedra Metod Matematycznych Fizyki
Uniwersytet Warszawski

MOTYWACJE

✓ Dlaczego mechanika (analityczna)?

MOTYWACJE

- ✓ Dlaczego mechanika (**analityczna**)? Mechanika jest miejscem, w którym kształtuje się język fizyki. Warto więc wracać do mechaniki, by lepiej zrozumieć sens pewnych konstrukcji, stosowanych poza mechaniką, ale przez analogię do mechaniki.

MOTYWACJE

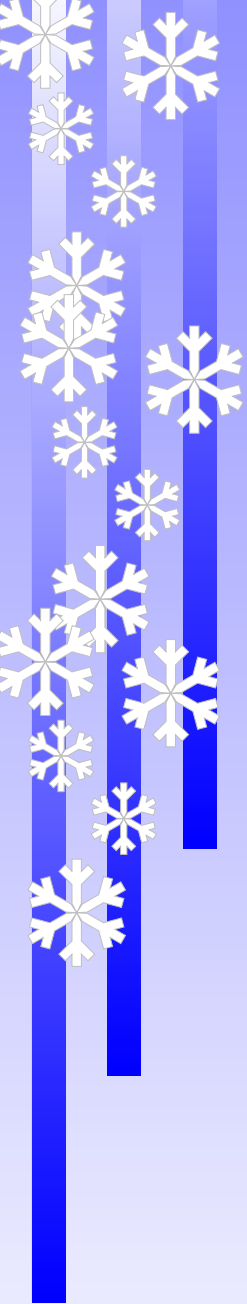
- ✓ Dlaczego mechanika (**analityczna**)? Mechanika jest miejscem, w którym kształtuje się język fizyki. Warto więc wracać do mechaniki, by lepiej zrozumieć sens pewnych konstrukcji, stosowanych poza mechaniką, ale przez analogię do mechaniki.
- ✓ Dlaczego geometria (**różniczkowa**)?

MOTYWACJE

- ✓ Dlaczego mechanika (**analityczna**)? Mechanika jest miejscem, w którym kształtuje się język fizyki. Warto więc wracać do mechaniki, by lepiej zrozumieć sens pewnych konstrukcji, stosowanych poza mechaniką, ale przez analogię do mechaniki.
- ✓ Dlaczego geometria (**różniczkowa**)? Geometria różniczkowa pozwala mówić o układach językiem niezależnym od układów odniesienia (cechowań). Pozwala eliminować struktury zbyteczne, pozostawiając na widoku jedynie te istotne.

Opis Wariacyjny

Struktury geometryczne związane z wariacyjnym opisem układów fizycznych.



Opis Wariacyjny

Struktury geometryczne związane z wariacyjnym opisem układów fizycznych.

- ✓ W opisie wariacyjnym zasada wariacyjna prowadzi do listy układów regularnych (potencjalnych), z którymi opisywany układ jest w równowadze (statycznej lub dynamicznej).

Opis Wariacyjny

Struktury geometryczne związane z wariacyjnym opisem układów fizycznych.

- ✓ W opisie wariacyjnym zasada wariacyjna prowadzi do listy układów regularnych (potencjalnych), z którymi opisywany układ jest w równowadze (statycznej lub dynamicznej).
- ✓ Jest to więc coś więcej niż szukanie punktów stacjonarnych potencjału (działania w przypadku dynamiki).

Opis Wariacyjny

Struktury geometryczne związane z wariacyjnym opisem układów fizycznych.

- ✓ W opisie wariacyjnym zasada wariacyjna prowadzi do listy układów regularnych (potencjalnych), z którymi opisywany układ jest w równowadze (statycznej lub dynamicznej).
- ✓ Jest to więc coś więcej niż szukanie punktów stacjonarnych potencjału (działania w przypadku dynamiki).
- ✓ Można powiedzieć, że w opisie wariacyjnym interesuje nas cała różniczka potencjału (działania) lub ich uogólnienia (np w opisie układów z dysypacją, więzami itp).

Czym się zajmujemy?

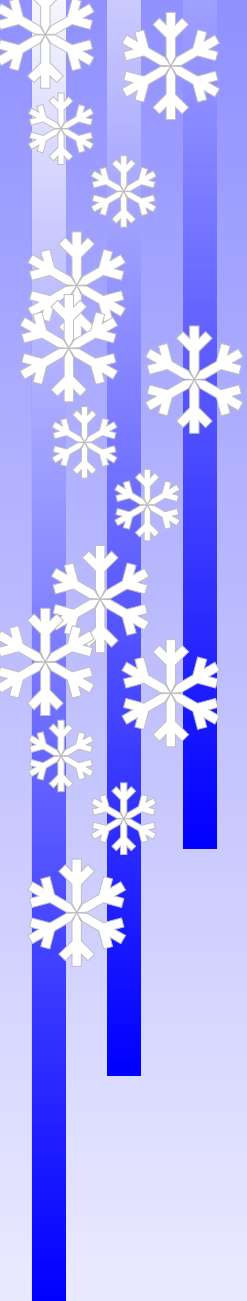
- ✓ Strukturami geometrycznymi związanymi z **dynamiką infinitesimalną**, tzn konfiguracjami dynamicznymi są położenia i prędkości - elementy wiązki stycznej do rozmaitości położień.

Czym się zajmujemy?

- ✓ Strukturami geometrycznymi związanymi z **dynamiką infinitezymalną**, tzn konfiguracjami dynamicznymi są położenia i prędkości - elementy wiązki stycznej do rozmaitości położień.
- ✓ Opisem wariacyjnym układów dynamicznych z więzami i dysypacją. W szczególności, wynikającymi z niego odpowiednikami równań Eulera-Lagrange'a.

Czym się zajmujemy?

- ✓ Strukturami geometrycznymi związanymi z **dynamiką infinitezymalną**, tzn konfiguracjami dynamicznymi są położenia i prędkości - elementy wiązki stycznej do rozmaitości położień.
- ✓ Opisem wariacyjnym układów dynamicznych z więzami i dysypacją. W szczególności, wynikającymi z niego odpowiednikami równań Eulera-Lagrange'a.
- ✓ Podstawami rachunku wariacyjnego, czyli zasadą prac wirtualnych w różnych jej odmianach.

- 
- ✓ Geometrią wartości afinicznych, tzn geometrią, w której funkcje zastąpione są cięciami wiązki afinicznej. Geometria taka jest potrzebna do opisu niezależnego od układu odniesienia (cechowania) (mechanika newtonowska, zależna od czasu, relatywistycznej cząstki naładowanej itp).

Kto się zajmuje?

- ✓ Janusz Grabowski (IM PAN)
- ✓ Katarzyna Grabowska
- ✓ Maciej Łukasik
- ✓ Paweł Urbański

Opis lagranżowski

$$L: TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

Opis lagranżowski

$$L: TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

stąd

$$dL: TTM \longrightarrow T^*TM$$

Opis lagranżowski

$$L: TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

stąd

$$dL: TTM \longrightarrow T^*TM$$

Gdzie równanie?

Opis lagranżowski

$$L: TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

stąd

$$dL: TTM \longrightarrow T^*TM$$

Gdzie równanie?

Istnieje kanoniczny diffeomorfizm

$$\alpha_M: TT^*M \longrightarrow T^*TM$$

$$D = \alpha_M^{-1}(dL(TM))$$

jest równaniem na krzywe fazowe (bez sił zewnętrznych, ale można je bez trudu dołączyć).

Opis hamiltonowski

Tą samą podrozmaitość D możemy przenieść do T^*T^*M , korzystając z istnienia na T^*M kanonicznej formy symplektycznej ω_M i odpowiadającemu jej izomorfizmowi wiązek wektorowych

$$\beta_M : TT^*M \longrightarrow T^*T^*M$$

Opis hamiltonowski

Tą samą podrozmaitość D możemy przenieść do T^*T^*M , korzystając z istnienia na T^*M kanonicznej formy symplektycznej ω_M i odpowiadającemu jej izomorfizmowi wiązek wektorowych

$$\beta_M : TT^*M \longrightarrow T^*T^*M$$

i pytać, czy dostaliśmy obraz różniczki funkcji na T^*M .

Opis hamiltonowski

Tą samą podrozmaitość D możemy przenieść do T^*T^*M , korzystając z istnienia na T^*M kanonicznej formy symplektycznej ω_M i odpowiadającemu jej izomorfizmowi wiązek wektorowych

$$\beta_M : TT^*M \longrightarrow T^*T^*M$$

i pytać, czy dostaliśmy obraz różniczki funkcji na T^*M .

Odpowiedź znajdziemy w znanych twierdzeniach geometrii symplektycznej.



Przy okazji: transformacja Legendre'a

We współczesnym rozumieniu, transformacja Legendre'a jest przejściem od lagranżjanu (opisu lagranżowskiego) do (na ogół uogólnionego) hamiltonianu.



Przy okazji: transformacja Legendre'a

We współczesnym rozumieniu, transformacja Legendre'a jest przejściem od lagranżjanu (opisu lagranżowskiego) do (na ogół uogólnionego) hamiltonianu.

Przejście to oparte jest na kanonicznym symplektomorfizmie T^*E i T^*E^* (dla dowolnej wiązki wektorowej E), generowanym przez ewaluację między E i E^* .

Przy okazji: transformacja Legendre'a

We współczesnym rozumieniu, transformacja Legendre'a jest przejściem od lagranżjanu (opisu lagranżowskiego) do (na ogół uogólnionego) hamiltonianu.

Przejście to oparte jest na kanonicznym symplektomorfizmie T^*E i T^*E^* (dla dowolnej wiązki wektorowej E), generowanym przez ewaluację między E i E^* .

Używa się tu standardowych twierdzeń o składaniu relacji symplektycznych.



Mamy więc trzy diffeomorficzne rozmaitości:

$$T^*T^*M \xleftarrow{\beta_M} TT^*M \xrightarrow{\alpha_M} T^*TM$$



Mamy więc trzy diffeomorficzne rozmaitości:

$$T^*T^*M \xleftarrow{\beta_M} TT^*M \xrightarrow{\alpha_M} T^*TM$$

W literaturze mówi się o "trójce Tulczyjewa".



Mamy więc trzy diffeomorficzne rozmaitości:

$$T^*T^*M \xleftarrow{\beta_M} TT^*M \xrightarrow{\alpha_M} T^*TM$$

W literaturze mówi się o "trójce Tulczyjewa".

Jakie struktury geometryczne tkwią w tym obrazku?

Podwójne wiązki wektorowe

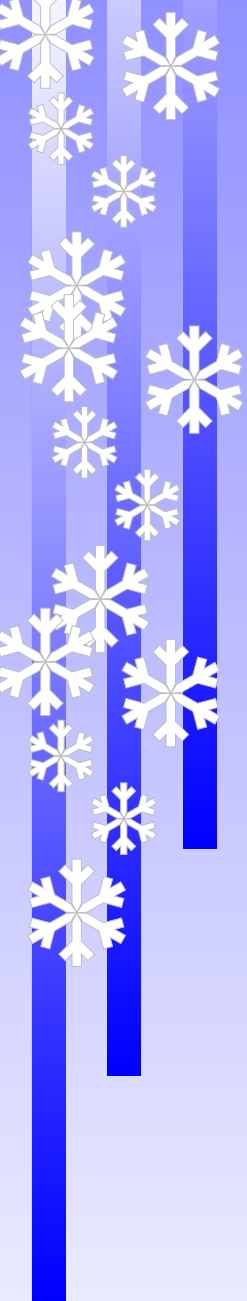
Każda z powyższych rozmaitości ma (autonomicznie) dwie struktury wiązki wektorowej: nad TM i nad T^*M .

Podwójne wiązki wektorowe

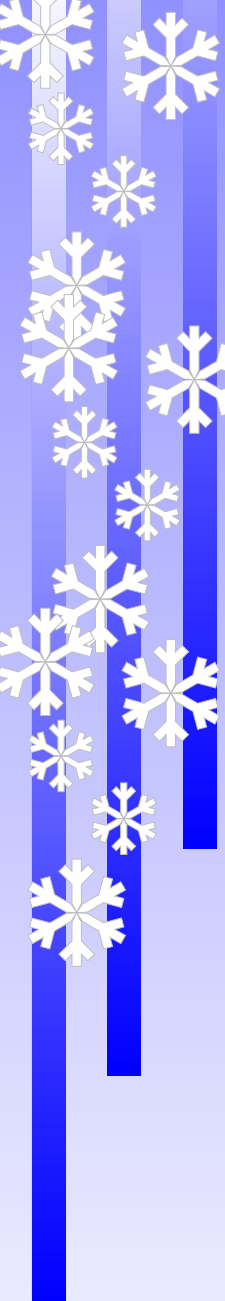
Każda z powyższych rozmaitości ma (autonomicznie) dwie struktury wiązki wektorowej: nad TM i nad T^*M .

Są to szczególne przypadki ogólnej sytuacji: Dla każdej wiązki wektorowej $\tau: E \rightarrow M$, jej wiązka styczna TE i wiązka kostyczna T^*E posiadają dwie (zgodne) struktury wiązki wektorowej

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{T\tau} & E \\ \tau_E \downarrow & & \downarrow \tau \\ E & \xrightarrow{\tau} & M \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} T^*E & \xrightarrow{T^*\tau} & E^* \\ \tau_{E^*} \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow{\tau} & M \end{array}.$$



Zgodność struktur wiązek wektorowych można wyartykułować tak: odpowiadające im mnożenia przez liczby (będące działaniem monoidu masyplikatywnego (\mathbb{R}, \cdot)) komutują (Grabowski i Rotkiewicz).



Zgodność struktur wiązek wektorowych można wyartykułować tak: odpowiadające im mnożenia przez liczby (będące działaniem monoidu masyplikatywnego (\mathbb{R}, \cdot)) komutują (Grabowski i Rotkiewicz).

Ogólnie: rozmaitość z dwiema zgodnymi strukturami wiązki wektorowej nazywa się **podwójną wiązką wektorową** (Pradines, 1974) - nasza specjalność.

Struktury symplektyczne

T^*T^*M i T^*TM są rozmaitościami symplektycznymi z formami ω_{T^*M} i ω_{TM} .

Struktury symplektyczne

T^*T^*M i T^*TM są rozmaitościami symplektycznymi z formami ω_{T^*M} i ω_{TM} .

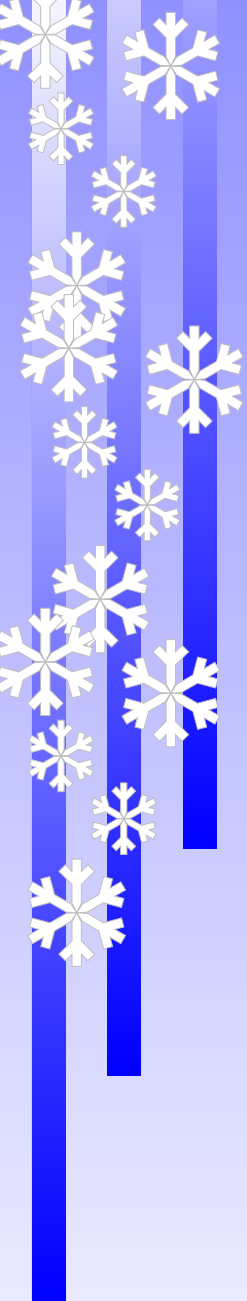
TT^*M ma strukturę symplektyczną $d_T\omega_M$

Struktury symplektyczne

T^*T^*M i T^*TM są rozmaitościami symplektycznymi z formami ω_{T^*M} i ω_{TM} .

TT^*M ma strukturę symplektyczną $d_T\omega_M$

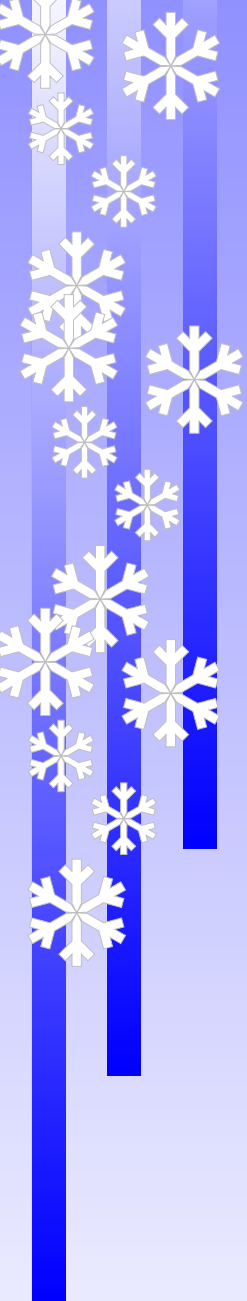
Wymienione struktury symplektyczne respektują (są liniowe) obie struktury wiązki wektorowej.



Struktura symplektyczna (Poissona) na wiązce wektorowej $\tau: E \rightarrow M$ jest liniowa, jeżeli odpowiednie odwzorowanie

$$\mathbb{T}E \rightarrow \mathbb{T}^*E \quad (\mathbb{T}^*E \rightarrow \mathbb{T}E)$$

jest liniowe ze względu na obie struktury wiązki wektorowej.

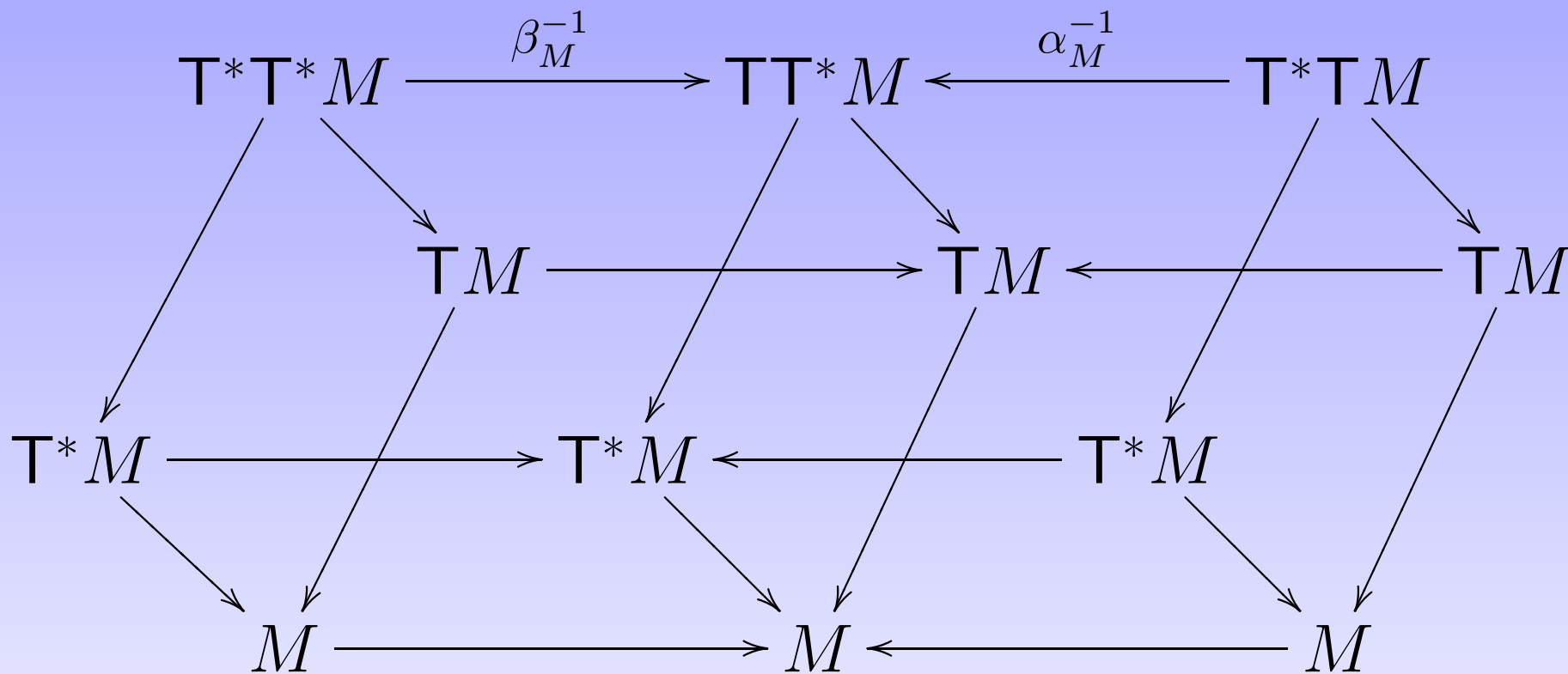
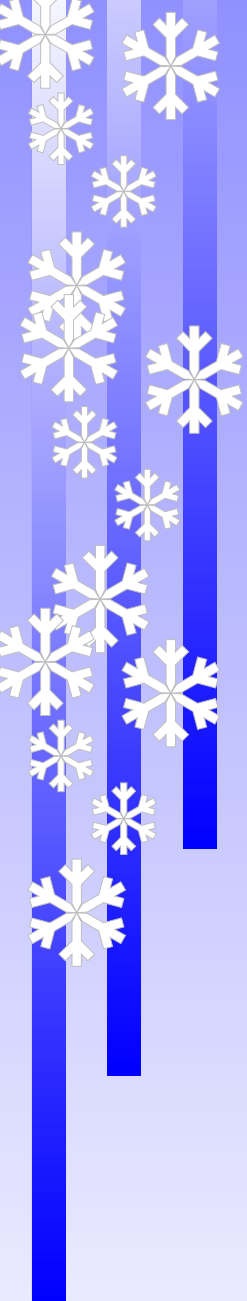


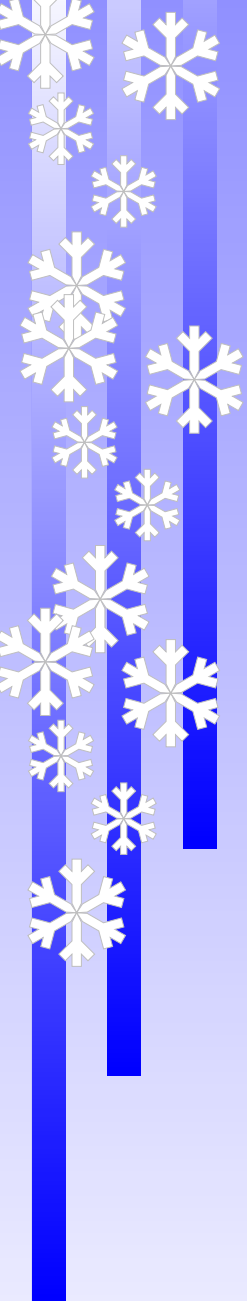
Struktura symplektyczna (Poissona) na wiązce wektorowej $\tau: E \rightarrow M$ jest liniowa, jeżeli odpowiednie odwzorowanie

$$\mathbb{T}E \rightarrow \mathbb{T}^*E \quad (\mathbb{T}^*E \rightarrow \mathbb{T}E)$$

jest liniowe ze względu na obie struktury wiązki wektorowej.

Trójkę Tulczyjewa możemy teraz przedstawić diagramem:





α_M , β_M i cały ten diagram to równoważny opis jednej, bardzo znanej struktury: **algebroidu** wiązki stycznej.



α_M , β_M i cały ten diagram to równoważny opis jednej, bardzo znanej struktury: **algebroidu** wiązki stycznej.

Po ludzku: nawiasu Liego pól wektorowych na rozmaitości M !

Algebroidy Liego

Standardowa definicja algebroidu Liego w wiązce wektorowej $\tau: E \rightarrow M$:

Algebroidy Liego

Standardowa definicja algebroidu Liego w wiązce wektorowej $\tau: E \rightarrow M$:

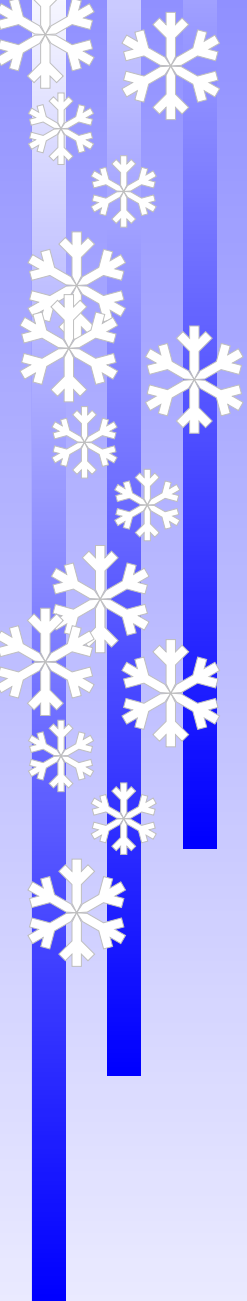
Nawias Liego cięć wiązki E , który jest pseudoróżniczkowaniem za względu na mnożenie cięć przez funkcje, tzn

$$[X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y,$$

gdzie $\rho: E \rightarrow TM$ jest odwzorowaniem wiązek wektorowych (nad identycznością w M), zwanym **kotwicą** algebroidu.

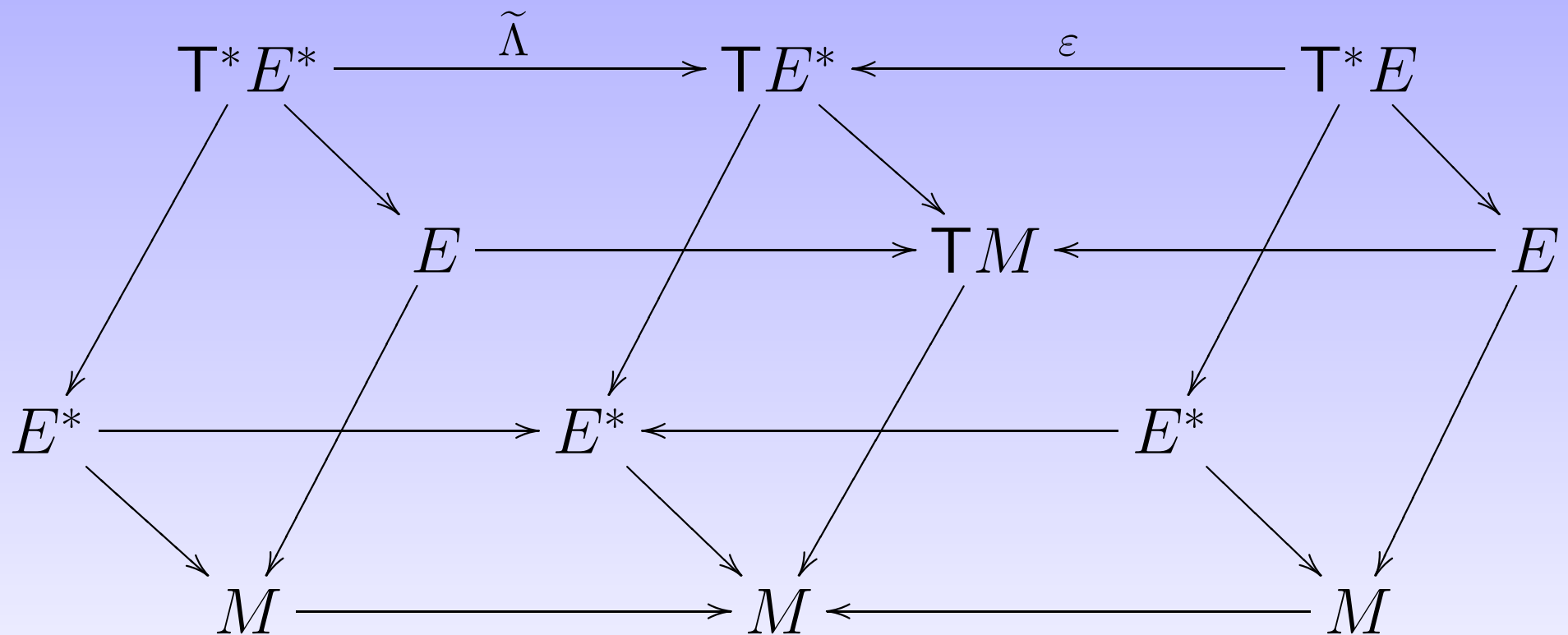
Przykłady algebroidów Liego

- ✓ algebra Liego,
- ✓ dystrybucja foliacji,
- ✓ wiązka kostyczna rozmaitości poissonowskiej,
- ✓ wiązka styczna do wiązki głównej podzielona przez działanie grupy.

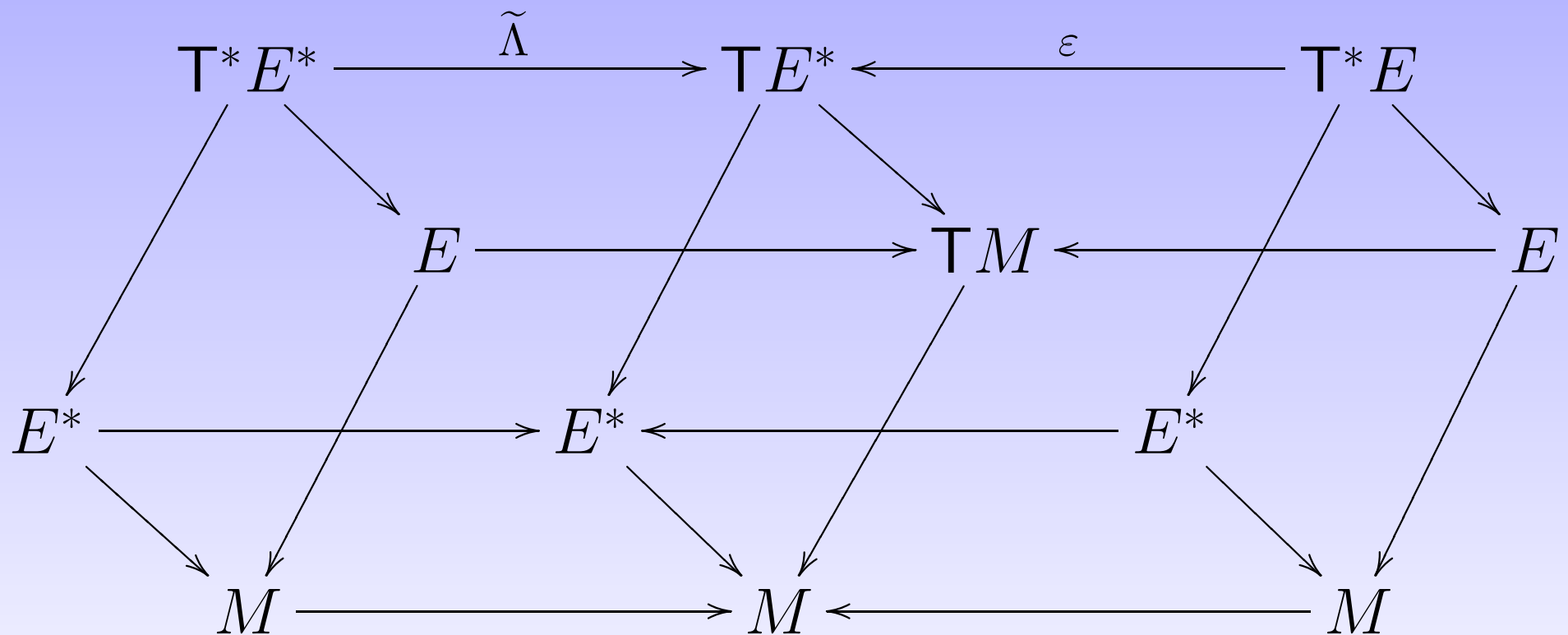


Dla algebroidu Liego mamy odpowiedni diagram
(nasza specjalność):

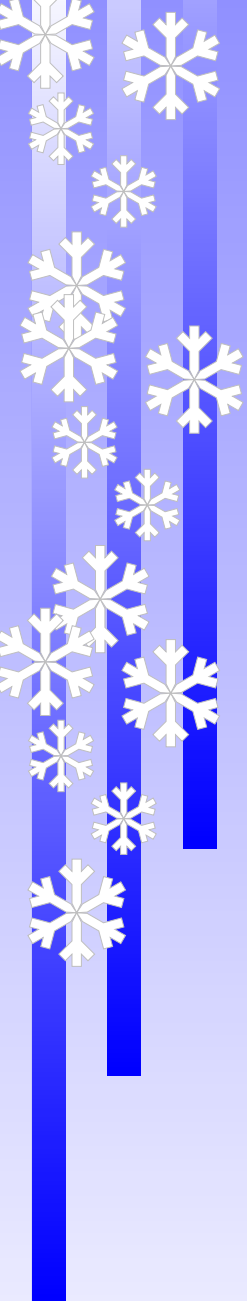
Dla algebroidu Liego mamy odpowiedni diagram
(nasza specjalność):



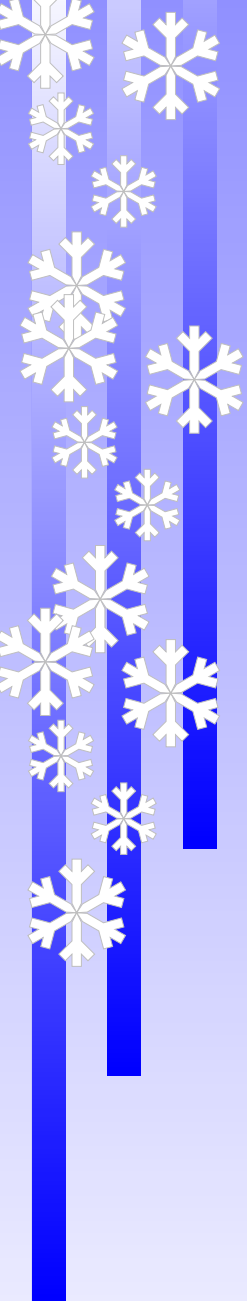
Dla algebroidu Liego mamy odpowiedni diagram
(nasza specjalność):



$\tilde{\Lambda}$ reprezentuje tu liniową strukturę Poissona.



Istnienie tego diagramu pozwala uprawiać mechanikę analityczną w oparciu o strukturę algebroidu



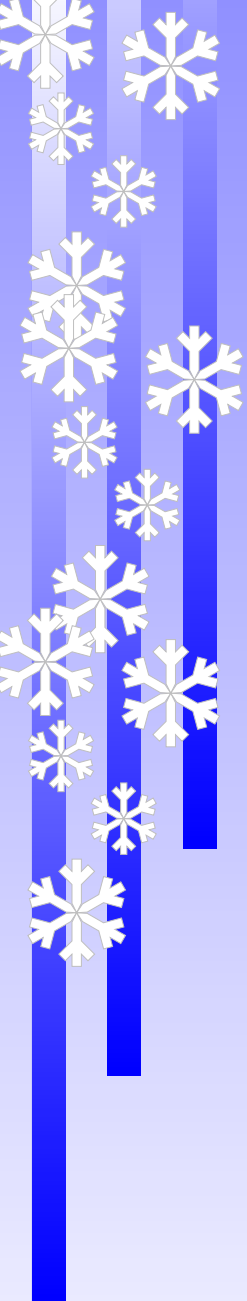
Istnienie tego diagramu pozwala uprawiać mechanikę analityczną w oparciu o strukturę algebroidu

Przykłady:

- ✓ bryła sztywna (algebra Liego przestrzeni konfiguracyjnej),
- ✓ redukcje lagranżowskie układów z symetriami.

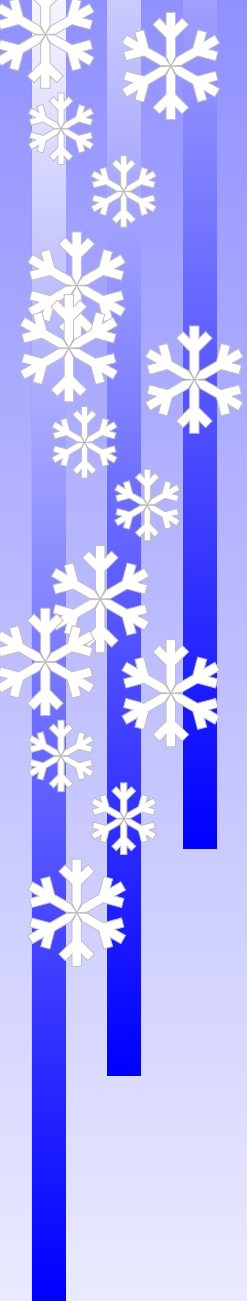
Kilka prac.

- ✓ K. Konieczna and P. Urbański: Double vector bundles and duality, *Arch. Math. (Brno)* **35**, (1999), 59–95
- ✓ J. Grabowski and P. Urbański: Algebroids – general differential calculi on vector bundles, *J. Geom. Phys.*, **31** (1999), 111-1141.
- ✓ K. Grabowska, J. Grabowski and P. Urbański: Lie brackets on affine bundles, *Ann. Global Anal. Geom.* **24** (2003), 101–130.
- ✓ P. Urbański: An affine framework for analytical mechanics, In: *Classical and Quantum Integrability*, BCP**59**, Warsaw 2003, 257–279.

- 
- ✓ K. Grabowska and P. Urbański: AV-differential geometry and Newtonian mechanics, *Rep. Math. Phys.* **58** (2006), 21–40.
 - ✓ K. Grabowska, J. Grabowski and P. Urbański: AV-differential geometry: Euler-Lagrange equations, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 1984–1998.
 - ✓ 35. W.M. Tulczyjew and P. Urbański: Constitutive sets of convex static systems, *Rep. Math. Phys.*, **60** No. 2 (2007), 199–219.

Zakończenie

Zapytano mądrego rabina - "co to jest fizyka?"



Zakończenie

Zapytano mądrego rabina - "co to jest fizyka?"
Odpowiedział:

To jest to, co każe pamiętać, że należy wracać do źródeł.

Zakończenie

Zapytano mądrego rabina - "co to jest fizyka?"
Odpowiedział:

To jest to, co każe pamiętać, że należy wracać do źródeł.

To znaczy być oryginalnym.