ANALIZA II 'R', LISTA No 1Alg – odwz. liniowe i macierze

25.02.2013

1. Wyznaczyć macierze następujących operatorów liniowych (ew. po upewnieniu się – gdy nie jest to ewidentne – że są one liniowe):

   (a) obrotu w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o kąt α w bazie standardowej;

   (b) obrotu w $\mathbb{R}^3$ o kąt 120^o wokół prostej, danej w prostokątnym układzie współrzędnych równaniem $x_1 = x_2 = x_3$, w bazie standardowej;

   (c) operatora w $\mathbb{R}^3$ danego wzorem: $x \to (x,a)a$, (tu $(\cdot,\cdot)$ – standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$), w bazie ortonormalnej (e_1, e_2, e_3). Rozpatrzyć ogólny a oraz $a = e_1 - 2e_3$.

   (d) operatora $X \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2{}_2$ w bazie złożonej z jednostek macierzowych;

   (e) operatora $X \to X \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2{}_2$ w bazie złożonej z jednostek macierzowych;

   (f) operatora $X \to X^T$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2{}_2$ w bazie złożonej z jednostek macierzowych;

   (g) operatora $X \to AXB$, gdzie A, B – ustalone macierze, w przestrzeni $\mathbb{R}^2{}_2$ w bazie złożonej z jednostek macierzowych;

   (h) operatora różniczkowania w przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$ w bazie $1, x, \ldots, x^n$;

   (i) operatora różniczkowania w przestrzeni $\mathbb{R}_n[x]$ w bazie $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$;

2. Przykłady d), e), f), g) z poprzedniego zadania zrobić w bazie złożonej z rzeczywistej wersji macierzy Pauliego, tzn.

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Niech operator liniowy w przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ będzie reprezentowany macierzą

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Wyznaczyć jego macierz względem bazy

$$f_0 = 3x^2 + 2x + 1, f_1 = x^2 + 3x + 2, f_2 = 2x^2 + x + 3.$$

4. Pomnożyć poniższe macierze w podanej i odwrotnej kolejności. (w tych przypadkach, gdy to wykonalne – określić kiedy tak jest):

$$\textbf{a)} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{c)} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

5. Znaleźć macierze odwrotne do danych poniżej. Wyniki sprawdzić:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$;

   (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy kwadratowej w postaci blokowej, w której składowe A, C są nieosobliwe:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \quad ; \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} .$$

7. Niech A, B, C, D będą macierzami nieosobliwymi. Wykazać, że

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$