ANALIZA II 'R', LISTA No 1 – ciągłość

18.02.2013

1. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   jest ciągła na $\mathbb{R}^2$.

2. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^4} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

3. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   jest nieciągła w punkcie $(0,0)$.

4. (Przypomnienie – być może niekonieczne) Jeśli $Y \subset X$, zaś Φ jest funkcją określoną na X, to jej *obcięciem* (mówi się też czasem: *ograniczeniem, zwężeniem*) do zbioru Y nazywamy funkcję ϕ określoną na Y i taką, że $\phi(x) = \Phi(x)$ dla $x \in Y$.
   Rozważmy funkcje

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Pokazać, że:

   (a) Zwężenia f i g do dowolnej prostej w $\mathbb{R}^2$ są ciągłe;

   (b) f jest ograniczona na $\mathbb{R}^2$;

   (c) g nie jest ograniczona na dowolnym otoczeniu punktu $(0,0)$;

   (d) f jest *nieciągła* w $(0,0)$.

   Przykłady te pokazują, że z ciągłości 'cząstkowych' (tzn. po obcięciu do podzbiorów) nie wynika ciągłość 'globalna' (tzn. na całym zbiorze).

5. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

   (a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(d)

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

6. Niech

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0).$$

Pokazać, że granice iterowane

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

istnieją i są równe zeru, ale nie istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

7. Niech

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Pokazać, że istnieje granica: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, ale nie istnieją granice iterowane

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

8. Obliczyć (jeśli istnieją) następujące granice:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$,

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$,

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$,

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

9. (Być może tylko przypomnienie) Pokazać ciągłość normy oraz dodawania i mnożenia przez liczbę dla przestrzeni unormowanych.

10. Pokazać na przykładach, że jeśli $f: X\to Y$ jest ciągła na X (X,Y – przestrzenie metryczne), to *obraz* zbioru otwartego (domkniętego) w X nie musi być zbiorem otwartym (domkniętym) w Y.

11. Pokazać, że jeśli $f: X\to Y$ jest ciągła na X (X,Y – przestrzenie metryczne), to obraz zbioru zwartego w X jest zbiorem zwartym w Y.

12. Niech (X,d) – przestrzeń metryczna, $E\subset X$, $E\neq\emptyset$. *Odległością* punktu $x\in X$ od zbioru E nazywamy

$$\rho_E(x)=\inf_{y\in E} d(x,y).$$

(a) Pokazać, że $\rho_E(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x należy do domknięcia zbioru E.

(b) Pokazać, że ρ_E jest funkcją jednostajnie ciągłą na X. *Wsk.* $\rho_E(x_2) \leqslant d(x_2, y) \leqslant d(x_2, x_1) + d(x_1, y)$, tak więc $\rho_E(x_2) \leqslant d(x_2, x_1) + \rho_E(x_1)$.

13. Niech K i F będą rozłącznymi podzbiorami przestrzeni metrycznej X, przy czym K jest zwarty, zaś F – domknięty. Pokazać, że istnieje liczba $\epsilon > 0$ taka, że $d(p, q) > \epsilon$ dla dowolnych $p \in K$, $q \in F$.
Wsk. Funkcja ρ_E jest dodatnia i ciągła na K.
Pokazać, że twierdzenie może okazać się fałszywe, jeśli żaden ze zbiorów K, F nie jest zwarty.

14. Niech $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami metrycznymi, f, g – ciągłe. Niech E będzie wszędzie gęstym podzbiorem w X. Pokazać, że $f(E)$ jest gęsty w $f(X)$. Jeśli $g(p) = f(p)$ dla wszystkich $p \in E$, to pokazać, że $g(p) = f(p)$ dla wszystkich $p \in X$.
Innymi słowy: Odwzorowanie ciągłe jest określone przez swoje wartości na wszędzie gęstym podzbiorze argumentów.