ANALIZA II 'R', LISTA No 2 – różniczkowaństwa

25.02.2013

Tytułem wstępu, wskazane jest przypomnieć sobie definicję: pochodnej (mocnej lub Gateaux), pochodnych cząstkowych, pochodnej kierunkowej (w kierunku wektora).

1. Pokazać z definicji, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $f(x, y) = 2x + y^2$ posiada pochodną mocną:
   (a) w punkcie $p = (1, 2)$; obliczyć ją.
   (b) w dowolnym punkcie $p = (x, y)$; obliczyć ją.
   (c) Porównać wynik z pochodnymi cząstkowymi.

2. Obliczyć z definicji pochodne kierunkowe podanych niżej funkcji w kierunku podanych niżej wektorów.
   (a) $f(x, y) = x^2 + xy + 3y - 1$ w punkcie $p = (1, 1)$ w kierunku wektora $v = [2, 1]$.
   (b) $g(x, y) = \sqrt{x + y}$ w punkcie $p = (4, 5)$ w kierunku wektora $v = [-1, 1]$.
   (c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ w punkcie $p = (1, 0, -1)$ w kierunku wektora $v = [0, 1, 2]$.

3. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:
   (a) $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;
   (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;
   (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
   (d) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;
   (e) $f(x, y) = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$;
   (f) $f(u, v) = \ln(u + \ln v)$;
   (g) $g(x, y, z) = (\sin x)^{yz}$;
   (h) $h(x, y, z) = \ln \frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

4. Obliczyć z definicji pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji w następujących punktach:
   (a) $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $p = (3, 4)$;
   (b) $f(x, y) = \ln(x + \frac{y}{2x})$ w punkcie $p = (1, 2)$;
   (c) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + xz$ w punkcie $p = (1, -1, 1)$.

5. *Przykład na to, że samo istnienie pochodnych cząstkowych nie gwarantuje nawet tego, że funkcja jest ciągła! Nie mówiąc o różniczkowalności (mocnej).* Rozważyć funkcję

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   Pokazać, że funkcja ta ma pochodne cząstkowe w każdym punkcie $\mathbb{R}^2$, lecz nie jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.

6. Rozważyć funkcję:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Pokazać, że f jest ciągła na $\mathbb{R}^2$.

   (b) Pokazać, że obcięcie f do dowolnej prostej jest funkcją różniczkowalną.

   (c) Pokazać, że jeśli γ jest dowolną krzywą różniczkowalną w $\mathbb{R}^2$, to $f(\gamma)$ jest różniczkowalna. Tzn: Niech $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$: $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{cases}$ – odwzorowanie różniczkowalne, tzn. obie składowe γ_1, γ_2 są różniczkowalne. Określmy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przez: $g(t) = f(\gamma(t))$. Należy udowodnić, że $g(t)$ jest różniczkowalna.

   (d) Pokazać, że f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$. Zrobić to z definicji, tzn. pokazać, że nie istnieje operator liniowy A taki, że

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = A \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + r(h_1,h_2).$$

   (e) Pokazać, że pochodne cząstkowe f nie są ciągłe w $(0,0)$, co sugeruje (ale *nie dowodzi*), że f nie jest różniczkowalna w $(0,0)$.

7. Obliczyć macierz Jacobiego superpozycji $T \circ S$ dwóch odwzorowań i sprawdzić, że $D(T \circ S) = DT \circ DS$:

   (a) $S : \mathbb{R}^1 \ni x \to (x,\, \log(1+x^4)) \in \mathbb{R}^2$,
   $T : \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \to (\sin u,\, e^{u+v},\, 1) \in \mathbb{R}^3$.

   (b) $S : \mathbb{R}^3 \ni (x,\, y,\, z) \to (x-y-z) \in \mathbb{R}^1$,
   $T : \mathbb{R}^1 \ni t \to (2^t,\, 1+t^2,\, 0) \in \mathbb{R}^3$.

   (c) $S : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to (xy,\, x+y,\, \sin xy) \in \mathbb{R}^3$,
   $T : \mathbb{R}^3 \ni (X,\, Y,\, Z) \to (X+Y+Z,\, -Y) \in \mathbb{R}^2$.

   (d) $S : \mathbb{R} \ni t \to (t,t^2,t^3) \in \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \to \ln x + e^y + z^3 \in \mathbb{R}$.

8. Niech $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Znaleźć odwzorowanie odwrotne do Φ, tzn. Φ^{-1}. Obliczyć: $D\Phi$, $D(\Phi^{-1}$, $(D\Phi)^{-1}$ i sprawdzić, że $D(\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1}$, dla:

   (a) $\mathbb{R}^2 \ni (r,\phi) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

9. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z(x,y) = y\, f(x^2 - y^2)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

10. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ spełnia równanie

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 - 2y^2$$

11. Pokazać, że 2. pochodne cząstkowe mieszane poniższej funkcji istnieją w $(0,0)$, ale *nie są* tam równe: $f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \to f(x,y) \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

12. Niech $f(x,y) = x^y$, $x > 0, y > 0$. Pokazać, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

13. Niech $f(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, $x \neq 0$. Pokazać, że $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

14. Znaleźć pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji:
    (a) $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}$;
    (b) $g(x,y) = \mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;
    (c) $h(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$.

15. Pokazać, że funkcja: $z(x,t) = \phi(x - vt) + \psi(x + vt)$, gdzie ϕ, ψ są dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami, zaś v – parametr, spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Uwaga. Powyższe równanie to *równanie falowe*, opisujące rozchodzenie się fali w ośrodku jednowymiarowym. Zinterpretować powyższe rozwiązanie jako superpozycję dwu fal o dowolnym kształcie, rozchodzących się w przeciwnych kierunkach.

16. Sprawdzić, że $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ spełnia dwuwymiarowe równanie Laplace'a, zaś $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ spełnia trójwymiarowe równanie Laplace'a.