ANALIZA II 'R', LISTA No 3 – różniczkowańStw cz. 2

08.03.2013

Ekstrema

1. Znaleźć punkty krytyczne, zbadać czy funkcja ma w tych punktach ekstremum, a jeśli tak, to jakiego typu:
   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$;
   (b) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$;
   (c) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$;
   (d) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{50}{y} \quad (x > 0, y > 0)$;
   (e) $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0)$;
   (f) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$;
   (g) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;
   (h) $f(x,y) = -\cos x - \cos y$;
   (i) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, gdzie $(x,y) \in [0,a] \times [0,a]$ oraz $a > 1$;
   (j) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (k) $u(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$;
   (l) $u(x,y,z) = xy^2z^3(a - z - 2y - 3z) \quad (a > 0)$;

2. Znaleźć największą wartość funkcji
$$u(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$
w trójkącie ograniczonym osią x, osią y i prostą $x + y = 2\pi$.

3. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji
$$u(x,y,z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^2,$$
gdy zmienne x, y, z spełniają dodatkowy warunek $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Zakładamy, że $a > b > c > 0$).

Odwracalność odwzorowań, funkcje uwikłane

4. Poniższe odwzorowania określają różne układy współrzędnych. W każdym przypadku: Policzyć pochodną tzn. znaleźć macierz Jacobiego; znaleźć jej wyznacznik czyli jakobian; zobaczyć, gdzie jakobian się zeruje; tam, gdzie się da, napisać odwzorowanie odwrotne; znaleźć i naszkicować linie współrzędnych. W zadaniach poniżej: x, y – wsp. kartezjańskie na $\mathbb{R}^2$; x, y, z – wsp. kartezjańskie na $\mathbb{R}^3$; x, y, z, t – wsp. kartezjańskie na $\mathbb{R}^4$.

(a) Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie: (r, ϕ) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\phi, \\ y & = & r\sin\phi. \end{array} \right.$$

(b) Uogólnione współrzędne biegunowe na płaszczyźnie: (r, ϕ) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & ar\cos\phi, \\ y & = & br\sin\phi. \end{array} \right. , \quad a, b > 0.$$

(c) Współrzędne: (ξ, η) definiowane przez:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \xi^2 - \eta^2, \\ y & = & 2\xi\eta. \end{array} \right.$$

Odp. Liniami współrzędnych są parabole współogniskowe. Rysunek, p. Fichtenholz, t. III, ustęp[1] 604.

(d) Współrzędne: (u, v) definiowane przez:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & u\cosh v, \\ y & = & u\sinh v. \end{array} \right.$$

(e) Współrzędne: (ξ, η) definiowane przez:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \\ y & = & \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}. \end{array} \right.$$

Odp. Liniami współrzędnych są okręgi przechodzące przez środek ukl. współrzędnych. Rysunek, p. Fichtenholz, t. III, ustęp 604.2.

(f) Współrzędne: (p, q) definiowane przez:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^2 & = & 2px, \\ x^2 & = & 2qy. \end{array} \right.$$

Wsk. i Rys. P. Fichtenholz j.w.

(g) Współrzędne eliptyczne (μ, ν) na płaszczyźnie:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a\cosh\mu\cos\nu, \\ y & = & a\sinh\mu\sin\nu. \end{array} \right.$$

Odp. Krzywe μ =const są *elipsami* (o jakim równaniu?), zaś ν =const – *hiperbolami* (o jakim równaniu?)

(h) Współrzędne walcowe (r, ϕ, ζ) w $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\phi, \\ y & = & r\sin\phi, \\ z & = & \zeta. \end{array} \right.$$

[1] Tak są tam nazywane podrozdziały...

(i) Współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{cases}$$

(j) Uogólnione współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x &= ar\sin\theta\cos\phi, \\ y &= br\sin\theta\sin\phi, \\ z &= cr\cos\theta. \end{cases} \quad , \quad a, b, c > 0.$$

(k) Współrzędne 'walcowe' (r, θ, ϕ, τ) w $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta, \\ t &= \tau. \end{cases}$$

5. Niech $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$, gdzie gdzie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – dowolna funkcja różniczkowalna. Sprawdzić, że niezależnie od postaci F

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x \cos y.$$

6. Niech $x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5$. Znaleźć $\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x}$ przy $x = y = a$.

7. Obliczyć $\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x}$ i $\frac{\mathsf{d}^2y}{\mathsf{d}x^2}$ dla funkcji uwikłanej $y(x)$, określonej następującymi równaniami:

   (a) $x^2 + 3xy - y^2 = c^2$;

   (b) $y - \epsilon\sin y = x$. Dla jakich ϵ funkcja $y(x)$ jest określona globalnie (dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$)?

   (c) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

   (d) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.

   (e) $xy - \ln y = a$.

   (f) $y^x = x^y$.

8. (Przykład ważny w termodynamice). Niech $F(x, y, z) = 0$. Zakładając, że w jakimś punkcie wszystkie pochodne cząstkowe F są różne od zera w jakimś punkcie $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, tak że dowolna zmienna daje się w otoczeniu p_0 wyrazić jednoznacznie jako funkcja dwóch pozostałych (tak że np. $x \equiv x(y, z)$ itd.), pokazać, że

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 1; \qquad \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = -1.$$

9. Pokazać, że podstawiając w równaniu

$$x^2\frac{\mathsf{d}^2y}{\mathsf{d}x^2} + x\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x} + y = 0$$

nową zmienną t określoną przez: $x = e^t$, otrzymamy równanie

$$\frac{\mathsf{d}^2u}{\mathsf{d}t^2} + u = 0.$$

10. Przekształcić równanie różniczkowe wprowadzając nową zmienną:

$$(1-x^2)\frac{\mathsf{d}^2 y}{\mathsf{d}x^2}+\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x}+n^2y^2=0, \quad x=\cos t$$

11. Wykazać, że równanie Laplace'a w $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

we współrzędnych biegunowych (r,ϕ) (jeśli ktoś nie pamięta definicji to jest wyżej) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=0.$$

12. Napisać dwuwymiarowe równanie Laplace'a w zmiennych $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{y}{x^2+y^2}$.

13. Napisać dwuwymiarowe równanie Laplace'a w zmiennych u,v określonych przez: $x=e^u\cos v$, $y=e^u\sin v$.

14. Przechodząc do współrzędnych sferycznych pokazać, że wyrażenia:

$$K=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad L=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

przyjmują postać

$$\tilde{K}=\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)^2,$$

$$\tilde{L}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

15. Przekształcić wyrażenie

$$x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+xz\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}$$

przechodząc do nowych zmiennych t,u,v, związanych ze starymi w sposób: $x=uv, y=vt, z=tu$.