ANALIZA II 'R', LISTA No 5: funkcje uwikłane & metoda mnożników Lagrange'a

08.04.2013

1. Niech $x, y, z, t \in \mathbb{R}^4$ spełniają: $xy + zt = 14$, $x^2 + y^2 - z^2 + t^2 = 12$. Pokazać, że w otoczeniu punktu $p = (1, 2, 3, 4)$ można wyrazić z oraz t jako funkcje x, y: $z = z(x, y)$, $t = t(x, y)$. Znaleźć pochodne:
$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2), \qquad \frac{\partial t}{\partial y}(1,2).$$

2. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji
$$u(x, y, z) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^2,$$
gdy zmienne x, y, z spełniają dodatkowy warunek $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Zakładamy, że $a > b > c > 0$).

3. Znaleźć ekstrema funkcji $z(x, y)$, zadanych w sposób niejawny tzn.uwikłany:
   (a) $z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16$;
   (b) $x^2 + y^2 - z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2), \quad a > 0.$

4. Znaleźć ekstrema funkcji f z warunkami:
   (a) $f(x, y) = x + y$ przy warunku $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$, $a > 0$;
   (b) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ przy warunku $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$, $a > 0$;
   (c) $f(x, y, z) = x + y + z$ przy warunku $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$;
   (d) $f(x, y, z) = xyz$ przy warunkach: $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$;
   (e) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 18y$ przy warunku $3x^2y - y^3 - 6x = 0$;
   (f) $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, gdzie macierz $[a_{ij}]$ jest symetryczna: $a_{ij} = a_{ji}$, przy warunku $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Tu zinterpretować też punkty stacjonarne.
   (g) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ pod warunkiem, że $\frac{x_1}{a_1} + \ldots \frac{x_n}{a_n} = 1$, gdzie wszystkie liczby $a_1, \ldots, a_n$ są dodatnie.

5. Spośród prostopadłościanów wpisanych w elipsoidę
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
o krawędziach równoległych do jej osi znaleźć ten, którego objętość jest największa.

6. W części paraboloidy eliptycznej, ograniczonej powierzchniami:

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad z = c,$$

wpisać prostopadłościan o największej objętości.

7. Na elipsoidzie $4x^2 + y^2 + z^2 = 8$ znaleźć punkt najbardziej odległy od punktu $3, 0, 0$.

8. Wykazać okrojoną wersję *nierówności Hadamarda*: Niech

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$$

przy czym $a^2 + b^2 = 1$, $a_1^2 + b_1^2 = 1$. Wtedy $|\det M| \leqslant 1$.

9. To samo dla macierzy:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

przy czym $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$, $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$. Wtedy $|\det M| \leqslant 1$.

10. Hadamard ineq., full wypas.

cdn.Gdy tak techuję i techuję, to wyczerpanie czuję...na razie więc od dalszego wpisywania się wstrzymuję, ale uzupełnić listę obiecuję.