ANALIZA II 'R', LISTA No 6:
Równania różniczkowe

16.04.2013

Motto:

W. I. Arnold – wielkiej klasy matematyk – pisze (we Wstępie do swojej książki 'Teoria równań różniczkowych'):

'Główne odkrycie Newtona, to, którego zdecydował się nie ujawniać i opublikował tylko w postaci anagramu, brzmi: *Data aequatione quodcunque fluentes quantitiae involvente fluxiones invenire et vice versa.* W tłumaczeniu [z łaciny i] na współczesny język matematyki oznacza to, że *Rozwiązywanie równań różniczkowych jest rzeczą pożyteczną.*'

1. Znaleźć ogólne rozwiązania równań *liniowych*:

   (a) $y' + 2y = 4x$.

   (b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

   (c) $y' + y = \cos x$.

   (d) $y' - y = \dfrac{1+x^2}{x} e^x$.

   (e) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$.

   (f) $y' \operatorname{tg} x - y = a$.

   (g) $y' = 3x - 2y + 5$.

   (h) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$.

2. Znaleźć ogólne rozwiązania równąn *jednorodnych*:

   (a) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$.

   (b) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

   (c) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

   (d) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

   (e) $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

   (f) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

   (g) $y' = \dfrac{3y^2 + 3xy + x^2}{x^2 + 2xy}$.

   (h) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Znaleźć ogólne rozwiązania równań:

   (a) $y'' = x^2 + \sin x$.

(b) $y'' = \operatorname{arctg} x$.

(c) $y'' = \ln x$.

(d) $xy'' - y' = 0$.

(e) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$.

(f) $y'' = 2yy'$.

(g) $(y'')^2 = y'$.

(h) $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

(i)

4. Jeśli y_1 jest jakimś rozwiązaniem równania

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

to

$$y_2 = Cy_1 \int \frac{1}{y_1^2} \exp\left(-\int P(x)\mathsf{d}x\right) \mathsf{d}x \qquad (C - \text{ stała})$$

też jest rozwiązaniem. Pokazać to na 3 sposoby: 1) wykorzystując wrońskian; 2) przez podstawienie $y = y_1 z$; 3) przez bezpośredni rachunek.

5. Znaleźć ogólne rozwiązania y poniższych równań, znając poniższe szczególne rozwiązania y_1:

(a) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y_1 = x$.

(b) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0, \qquad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$.

6. Znaleźć rozwiązania równań z danymi warunkami początkowymi:

(a) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

(b) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$;

(c) $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$;

(d) $y^3 y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$;

(e) $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

7. Znaleźć ogólne rozwiązania równań:

(a) $y''' + 9y' = 0$.

(b) $y^{IV} + 16y = 0$.

(c) $y^{IV} - 16y = 0$.

(d) $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$.

(e) $y''' - 13y' - 12y = 0$.

(f) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

(g) $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.

(h) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

8. Znaleźć rozwiązania równań z warunkami początkowymi:

   (a) $y''' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.
   (b) $y^V - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$,$y'''(0) = 1$, $y^{IV}(0) = 2$.

9. Znaleźć ogólne rozwiązania równań:

   (a) $y''' = \cos 2x$;
   (b) $xy^V = y^{IV}$;
   (c) $2y'' + y' - 2y = 2e^x$;
   (d) $y'' + a^2 y = e^x$;
   (e) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;
   (f) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;
   (g) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$;
   (h) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$;
   (i) $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$;
   (j) $y'' - 3y' + 2y = 2\sinh x$.

10. Znaleźć ogólne rozwiązania układów równań różniczkowych:

   (a) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y - 7x \\ \dot{y} & = & -2x - 5y \end{array} \right.$

   (b) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x + y \\ \dot{y} & = & 3x + 4y \end{array} \right.$

   (c) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - 3y \\ \dot{y} & = & 3x + y \end{array} \right.$

   (d) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - y + z \\ \dot{y} & = & x + y - z \\ \dot{z} & = & 2x - y \end{array} \right.$

   (e) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - 2y - z \\ \dot{y} & = & -x + y + z \\ \dot{z} & = & x - z \end{array} \right.$

   (f) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 3x - y + z \\ \dot{y} & = & x + y + z \\ \dot{z} & = & 4x - y + 4z \end{array} \right.$