ANALIZA II 'R', LISTA No 7 – całki wielokrotne

20.05.2013

1 Całki – zadania

1.1 Całki po obszarach prostokątnych

1. Obliczyć całkę z funkcji f po prostokącie P:

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2}$, $P = [3,4] \times [1,2]$. **Odp.** $\ln \frac{25}{24}$.

   (b) $f(x,y) = 5x^2y - 2y^3$, $P = [2,5] \times [1,3]$. **Odp.** 660.

   (c) $f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$, $P = [0,1] \times [0,1]$. **Odp.** $\frac{\pi}{12}$.

   (d) $f(x,y) = \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, $P = [0,1] \times [0,1]$. *Wsk.* W jakiej kolejności wygodniej całkować? **Odp.** $\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

   (e) $f(x,y) = e^{x+y}$, $P = [0,1] \times [0,1]$. **Odp.**

   (f) $f(x,y) = x \sin(x+y)$, $P = [0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. **Odp.**

   (g) $f(x,y) = x^2y\, e^{xy}$, $P = [0,1] \times [0,2]$. **Odp.**

2. (a) Znaleźć objętość bryły ograniczonej z dołu płaszczyzną xy, z boków – płaszczyznami $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, a od góry paraboloidą eliptyczną:

   $$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

   (wszystkie parametry a, b, c, d są dodatnie). **Odp.** $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$.

   (b) To samo dla bryły ograniczonej płaszczyzną xy, powierzchnią $x^2 + z^2 = R^2$ dla $z > 0$ i płaszczyznami $y = 0$ i $y = H$. *Wsk.* Bardziej naturalne jest liczenie w ukł. wsp. biegunowych, ale 'nie uprzedzajmy wypadków' i liczmy we wsp. kartezjańskich. **Odp.** (każdy powinien wiedzieć, że) $\frac{1}{2}\pi R^2 H$.

   (c) To samo dla bryły ograniczonej płaszczyznami $z = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ ($b > a > 0$, $d > c > 0$) i paraboloidą hiperboliczną

   $$z = \frac{xy}{m} \quad (m > 0).$$

   Odp. $|V| = \frac{(d^2-c^2)(b^2-a^2)}{4m}$.

3. Pokazać, że

   $$\int\int_P (xy)^{xy} \mathsf{d}x\mathsf{d}y = \int_0^1 x^x \mathsf{d}x.$$

   Uwaga. Funkcja podcałkowa wprawdzie nie jest określona w punkcie $(0,0)$, ale można ją tam dookreślic definiując $f(0,0) = 1$.

4. Pokazać *nierówność Cauchy'ego – Buniakowskiego – Schwarza*: Dla dowolnych ciągłych na $[a,b]$ funkcji f,g zachodzi nierówność

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathsf{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathsf{d}x$$

Wsk. Scałkować funkcję $(f(x)g(y)-g(x)f(y))^2$ po kwadracie $[a,b]\times[a,b]$.

5. Udowodnić nierówność

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x \cdot \int_a^b \frac{\mathsf{d}x}{f(x)} \geqslant (b-a)^2.$$

dla f – ciągłej na $[a,b]$. *Wsk.* Skorzystać z nierówności C-B-Schwarza, będącej treścią poprzedniego zadania.

1.2 Całki po obszarach niekoniecznie prostokątnych

1. Zamienić kolejność całkowania w całkach:

(a) $\int\limits_0^1 \mathsf{d}y \int\limits_y^{\sqrt{y}} \mathsf{d}x\, f(x,y)$

(b) $\int\limits_{-1}^1 \mathsf{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathsf{d}y\, f(x,y)$

(c) $\int\limits_0^r \mathsf{d}x \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} \mathsf{d}y\, f(x,y)$

(d) $\int\limits_1^2 \mathsf{d}x \int\limits_x^{2x} \mathsf{d}y\, f(x,y)$

(e) $\int\limits_0^2 \mathsf{d}x \int\limits_{2x}^{6-x} \mathsf{d}y\, f(x,y)$

2. Rozstawić granice całkowania, tzn. znaleźć granice całkowania, zapisując całkę po każdym z poniższych obszarów D w postaci całki iterowanej:

(a) D – trójkąt ograniczony prostymi $x=0$, $y=0$, $x+2y=4$.

(b) D – obszar dany nierównościami: $x^2+y^2\leqslant 4$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

(c) D – obszar dany nierównościami: $x+y\leqslant 2$, $x-y\leqslant 2$, $x\geqslant 0$.

(d) D – obszar dany nierównościami:$y\geqslant x^2$, $y\leqslant 9-x^2$.

(e) D – obszar dany nierównością: $(x-3)^2+(y-2)^2\leqslant 9$.

(f) D – obszar ograniczony krzywymi: $y=x^3$ i $y=\sqrt{x}$.

(g) D – obszar dany nierównościami: $y^2\leqslant 8x$, $y\leqslant 2x$, $y+4x-24\leqslant 0$

(h) D – obszar ograniczony krzywymi $y^2-x^2=1$ i $x^2+y^2=9$ i zawierający punkt $(0,0)$.

(i) D – czworokąt o wierzchołkach: $(1,1)$, $(2,3)$, $(4,3)$, $(6,1)$.

3. Obliczyć całki:

   (a) $\displaystyle\iint\limits_T \sqrt{r^2 - \frac{y^2}{x^2}}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie T jest trójkątem o bokach $y = 0$, $y = rx$, $x = 1$,

   (b) $\displaystyle\iint\limits_T (6 - x - y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie T jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$

   (c) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{y}\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie D jest obszarem zdefiniowanym przez nierówności: $2 \leqslant x \leqslant 4$, $1 \leqslant y \leqslant x^2$.

   (d) $\displaystyle I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie D jest obszarem ograniczonym przez krzywe: $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$. **Odp.** *Wsk.* Która kolejność całkowania będzie wygodniejsza? $I = \frac{9}{4}$.

   (e) $\displaystyle I = \iint\limits_D (x+5y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie D jest trójkątem ograniczonym przez proste: $y = x$, $y = 3x$, $x = 1$. **Odp.** $I = \frac{22}{3}$.

   (f) $\displaystyle I = \iint\limits_D \sqrt{2x^2 - y^2}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y$, gdzie D jest trójkątem ograniczonym przez proste: $y = 0$, $x = 1$, $y = x$. **Odp.** $I = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

4. Obliczyć dla następujących figur płaskich o jednorodnej gęstości masy współrzędne środka masy:

   (a) Obszaru ograniczonego parabolą $y = x^2$ oraz prostymi: $y = 1$ i $x = 0$.

   (b) Ćwiartki elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (znajdującej się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych).

   (c) Wycinka koła o kącie α i promieniu R

   (d) Obszaru ograniczonego osiami współrzędnych i krzywej $y = \cos x$ (w I. ćwiartce).

1.3 Całki potrójne

1. Obliczyć całki:

   (a) $\displaystyle\iiint\limits_C \frac{1}{(1 + x + y + z)^3}\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie C jest sześcianem $[0,1]^3$;

   (b) $\displaystyle\iiint\limits_V z\,\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie V jest ostrosłupem ograniczonym płaszczyzną $x+y+z = 2$ i płaszczyznami współrzędnych;

2 Zamiana zm. w całce podwójnej

1. Obliczyć całkę z funkcji $f(x,y) = y^2\sqrt{R^2 - x^2}$ po kole o promieniu R i środku w początku układu współrzędnych. **Odp.** $\frac{32}{45}R^5$.

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, walcem $x^2 + y^2 = R^2$ i paraboloidą hiperboliczną $z = xy$; chodzi o bryłę leżącą w pierwszej ćwiartce. **Odp.** $\frac{1}{8}R^4$.

3. Obliczyć objętość *bryły Vivianiego*, tzn. bryły wyciętej walcem $x^2 + y^2 = Rx$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. **Odp.** $\frac{6\pi-8}{9}R^3$.

4. Obliczyć objętość bryły powstałej przez przecięcie pod kątem prostym dwu nieskończenie długich walców o jednakowej średnicy

5. Obliczyć pola powierzchni figur ograniczonych krzywymi o podanych niżej równaniach. Wyliczenia poprzedzić rozpoznaniem kształtu krzywych. *Wsk.* Współrzędne biegunowe.
   (a) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (lemniskata Bernoulliego). **Odp.** $2a^2$.
   (b) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$. **Odp.** $\frac{5}{8}\pi a^2$.
   (c) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$. **Odp.** $\frac{3}{4}\pi a^2$.

6. Obliczyć pola powierzchni figur ograniczonych krzywymi o podanych niżej równaniach. Wyliczenia poprzedzić rozpoznaniem kształtu krzywych. *Wsk.* Uogólnione współrzędne biegunowe: $x = ar\cos\phi$, $y = br\sin\phi$. Policzyć jakobian!
   (a) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$. **Odp.** $\frac{a^2b^2}{2c^2}$.
   (b) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$. **Odp.** $\frac{1}{2}\pi ab(a^2 + b^2)$.
   (c) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{c^2}$. **Odp.** $\frac{\pi a^3 b}{2c^2}$.

7. Znaleźć pole ograniczone pętlą krzywej o poniższych równaniach. *Wsk.* Wprowadzić współrzędne r, θ określone przez: $x = r\cos^2\theta$; $y = r\sin^2\theta$.
   (a) $(x + y)^4 = ax^2y$. **Odp.** $\frac{a^2}{210}$.
   (b) $(x + y)^3 = axy$. **Odp.** $\frac{a^2}{60}$.
   (c) $(x + y)^5 = ax^2y^2$. **Odp.** $\frac{a^2}{1260}$.

8. Znaleźć pole powierzchni asteroidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Wsk.* Równanie parametryczne asteroidy jest: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $\quad t \in [0, 2\pi]$. Wprowadzić współrzędne r, t określone przez: $x = r\cos^3 t$, $y = r\sin^3 t$. Ile wynosi jakobian? **Odp.** $\frac{3}{8}\pi a^2$.

9. Obliczyć całki: $\int\int_C xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, gdzie C jest (krzywoliniowym) 'czworokątem' ograniczonym krzywymi:
   (a) $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$. *Wsk.* Wprowadzić współrzędne ξ, η zdefiniowane przez: $y = \xi x^3$, $y^2 = \eta x$.
   (b) $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$. *Wsk.* Wprowadzić współrzędne ξ, η zdefiniowane przez: $y^3 = \xi x^2$, $y^2 = \eta x$.

2.1

10. Obliczyć całkę $\iiint\limits_C z\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie C jest górną połową elipsoidy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

11. Obliczyć całkę $\iiint\limits_C z\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie C jest bryłą ograniczoną przez tworzącą stożka $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ i płaszczyznę $z=h$.

12. Obliczyć całkę $\iiint\limits_C (x+y+z)^2\mathsf{d}x\mathsf{d}y\mathsf{d}z$, gdzie C jest wspólną częścią paraboloidy $x^2+y^2\leqslant 2az$ i kuli $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$.

13. Znaleźć środek ciężkości bryły ograniczonej powierzchniami paraboloidy $x^2+y^2=2az$ oraz kuli $x^2+y^2+z^2=3a^2$.

14. Znaleźć potencjał walca w środku jego podstawy.

15. Obliczyć potencjał grawitacyjny stożka o jednorodnej gęstości masy:
    (a) w wierzchołku
    (b) w środku podstawy.

16. Obliczyć natężenie pola grawitacyjnego stożka o jednorodnej gęstości masy:
    (a) w wierzchołku
    (b) w środku podstawy.

    Wsk. Można wykorzystać poprzednie zadanie.

3 Parę zadań nieco innych

1. Przy zamianie całki podwójnej na iterowaną, w większości zagadnień praktycznych całka podwójna istnieje i jest równa każdej z dwu całek iterowanych. Nie musi tak jednak być dla *dowolnej* funkcji.

   Rozpatrzmy funkcję określoną na $]0,1]\times]0,1]$:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

   (a) Sprawdzić, że dla dowolnego $x\in]0,1]$, funkcja $\phi(y)\equiv f(x,y)$ (x traktujemy jako parametr) jest ciągła, a zatem całkowalna. Obliczyć: $I(x)=\int_0^1 f(x,y)\mathsf{d}y$.

   (b) Analogicznie prawdzić, że dla dowolnego $y\in]0,1]$, funkcja $\psi(x)\equiv f(x,y)$ (tu y traktujemy jako parametr) jest ciągła, a zatem całkowalna. Obliczyć: $J(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathsf{d}x$.

   (c) Obliczyć $\int_0^1\mathsf{d}x\int_0^1\mathsf{d}y f(x,y)$ oraz $\int_0^1\mathsf{d}y\int_0^1\mathsf{d}x f(x,y)$.

   (d) Czy f jest całkowalna na $[0,1]\times[0,1]$? (Pytanie może nieco na wyrost, gdyż całka, jeśli istnieje, to najwyżej jako całka *niewłaściwa*, bo f nie jest ograniczona na $[0,1]\times[0,1]$)

Moraª jest do±¢ banalny[1]. Przy stosowaniu twierdze« nale»y sprawdza¢ zaªo»enia.

2. (a) Obliczy¢ $V_n(R) =$ obj¦to±¢ kuli $n-$wymiarowej o promieniu R. $Wsk.$ Znale¹¢, przez caªk¦ iterowan¡, wzór rekurencyjny wi¡»¡cy $V_n(R)$ z $V_{n-1}(R)$.

   (b) Obliczy¢ ró»nic¦ $V_n(R) - V_n(0.9R)$ dla $n = 1, 2, 3, 10, 20, 100$. Innymi sªowy: Jaka cz¦±¢ masy pomara«czy $n-$wymiarowej skupiona jest w skórce?

[1] Skojarzenie: AS BANALNY – półsłówko