

ными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить).

549. $y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x$.
 550. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x} \cos x$.
 551. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$.
 552. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x$.
 553. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.
 554. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.
 555. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x \sin x)$.
 556. $y''' + y' = \sin x + x \cos x$.
 557. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} \sin 2x + 2x^2$.
 558. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x} \sin x$.
 559. $y'' + 2y' + y = x(e^{-x} - \cos x)$.
 560. $y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x \sin x$.
 561. $y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3 \cos 2x$.
 562. $y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$.
 563. $y^{IV} + y'' = 7x - 3 \cos x$. 564. $y'' + 4y = \cos x \cdot \cos 3x$.
 565. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$.
 566. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin^2 x$.
 567. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \cos^2 x$.
 568. $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x) \sin x$.
 569. $y^{IV} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x$.
 570. $y'' - 3y' + 2y = 2^x$. 571. $y'' - y = 4 \operatorname{sh} x$.
 572. $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} x$. 573. $y'' + 4y = \operatorname{sh} x \cdot \sin 2x$.
 574. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{ch} x \cdot \sin x$.

Решить уравнения 575—581 способом вариации постоянных.

575. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. 576. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.
 577. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$. 578. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$.
 579. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$. 580. $y'' + y = 2 \sec^3 x$.
 581*. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$.

Найти решения уравнений 582—588, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

582. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.
 583. $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.
 584. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
 585. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.
 586. $y''' - y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.
 587. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$;
 $y''(0) = 3$.

588. $y^{IV} + y'' = 2 \cos x$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$,
 $y''(0) = y'''(0) = 0$.

В задачах 589—600 решить уравнения Эйлера

589. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$. 590. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.
 591. $x^3y''' + xy' - y = 0$. 592. $x^2y''' = 2y'$.
 593. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$. 594. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$.
 595. $x^3y'' - 2xy = 6 \ln x$. 596. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.
 597. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$. 598. $x^2y'' - 2y = \sin \ln x$.
 599. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.
 600. $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$.

Применяя различные методы, решить уравнения:

601. $y'' + 2y' + y = \cos ix$. 602. $y'' - 2y' + y = xe^x \sin^2 ix$.
 603. $y'' + 2iy = 8e^x \sin x$. 604. $y'' + 2iy' - y = 8 \cos x$.
 605. $y''' - 8iy = \cos 2x$. 606. $y'' - \frac{2y}{x^2} = 3 \ln(-x)$.
 607. $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$.
 608. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \operatorname{tg} x)$.
 609. $x^2y'' - 2y = \frac{3x^2}{x+1}$.
 610. $x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}$. 611*. $y'' + y = f(x)$.

612*. Какие условия достаточно наложить на функцию $f(x)$, чтобы все решения уравнения задачи 611 оставались ограниченными при $x \rightarrow +\infty$?

В задачах 613—618 построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

613. $y_1 = x^2e^x$. 614. $y_1 = e^{2x} \cos x$.
 615. $y_1 = x \sin x$. 616. $y_1 = xe^x \cos 2x$.
 617. $y_1 = xe^x$, $y_2 = e^{-x}$. 618. $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$.

619. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ ограничены на всей числовой оси $-\infty < x < \infty$?

620. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$?

621. При каких a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x) \neq 0$, стремящееся к нулю при $x \rightarrow +\infty$?

надо заменить произвольные постоянные C_i на неизвестные функции $C_i(t)$. Полученные выражения для x_i надо подставить в данную неоднородную систему, и из этой системы найти $C_i(t)$.

8. Показательной функцией $e^{\lambda t}$ матрицы A называется сумма ряда

$$e^{At} = E + \frac{A}{1!}t + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots \quad (18)$$

где E — единичная матрица. Ряд сходится для любой матрицы A . Свойства e^{At} :

- а) если $A = CM C^{-1}$, то $e^{At} = C e^{Mt} C^{-1}$;
- б) если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$;
- в) матрица $X(t) = e^{tA}$ удовлетворяет уравнению $\frac{dX}{dt} = AX$;

$$X(0) = E.$$

Методы отыскания e^{At} :

1) Путем решения системы дифференциальных уравнений. В силу свойства в) t -й столбец матрицы e^{tA} есть решение системы уравнений (в векторной записи) $\dot{x} = Ax$ с начальными условиями $x_i(0) = 1, x_k(0) = 0$ при $k \neq i$ ($x_i - i$ -я координата вектора x).

2) Путем приведения матрицы к жордановой форме. Пусть известна такая матрица C , что $C^{-1}AC = M$ имеет жорданову форму, т. е. состоит из клеток K_i . Каждая жорданова клетка имеет вид $K = \lambda E + F$, у матрицы F все элементы нули, кроме 1-го косоуго ряда над диагональю. Поэтому $F^m = 0$, где m — порядок матрицы F , и e^{tF} легко найти с помощью ряда (18). Так как еще $e^{\lambda E} = e^{\lambda t} E$, то

$$e^{Kt} = e^{\lambda E + Ft} = e^{\lambda t} E \cdot e^{tF} = e^{\lambda t} e^{tF}.$$

Составив из клеток $e^{K_i t}$ матрицу e^{Mt} , найдем e^{At} с помощью свойства а). Доказательство и пример см. в [5], гл. 1, §§ 12—14.

В задачах 786—812 решить данные системы уравнений (\dot{x} означает $\frac{dx}{dt}$, и т. д.; для облегчения работы в некоторых задачах указаны корни характеристического уравнения).

- 786.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$
- 788.
$$\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$
- 790.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$
- 792.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$$
- 787.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$$
- 789.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$
- 791.
$$\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$
- 793.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$$

794.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

796.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$$

795.
$$\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$$

797.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

798.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$

799.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

800.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

801.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

802.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$$

803.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$$

804.
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$

805.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

806.
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$$

807.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$$

808.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$$

809.
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$$

3 А. Ф. Филиппов

$$828. \begin{cases} y = x + 2y, \\ x = 3x + 2y + 4e^{5t}, \end{cases} \quad 829. \begin{cases} y = x + 2y, \\ x = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \end{cases}$$

$$826. \begin{cases} x = y + 2e^t, \\ y = x + t^2, \end{cases} \quad 827. \begin{cases} x = y - 5 \cos t, \\ y = 2x + y. \end{cases}$$

В задачах 826—845 решить линейные неоднородные системы.

$$825. \begin{cases} x + 4x - x + 3y + 2y - y = 0, \\ 2x + 2x + x + 3y + y + y = 0, \end{cases}$$

$$824. \begin{cases} x + 4x - 2x - 2y - y = 0, \\ x - 4x - y + 2y + 2y = 0, \end{cases}$$

$$822. \begin{cases} x + 3y - x = 0, \\ x + 3y - 2y = 0, \end{cases} \quad 823. \begin{cases} x + 5x + 2y + y = 0, \\ 3x + 5x + y + 3y = 0, \end{cases}$$

$$820. \begin{cases} x - x + y + y = 0, \\ x - 2y + 2x = 0, \end{cases} \quad 821. \begin{cases} x - x + y + y = 0, \\ 3x + y - 8y = 0, \end{cases}$$

$$819. \begin{cases} 4y - 2x - x - 2x + 5y = 0, \\ x - 2y + y + x - 3y = 0, \end{cases}$$

$$817. \begin{cases} 2x - 5y = 4y - x, \\ 3x - 4y = 2x - y, \end{cases} \quad 818. \begin{cases} x + x + y - 2y = 0, \\ x - y + x = 0, \end{cases}$$

$$815. \begin{cases} x = 2y, \\ y = -2x, \end{cases}$$

$$814. \begin{cases} x = 3x + 4y, \\ y = -x - y, \\ z = -x - y + 3z, \end{cases}$$

В задачах 813—825 решить системы, не приведенные к нормальному виду.

$$810. \begin{cases} x = 2x + y, \\ y = 2y + 4z, \\ z = x - z, \end{cases} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3).$$

$$812. \begin{cases} z = x + z, \\ y = 3x + y - z, \\ x = 4x - y, \end{cases} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2).$$

$$811. \begin{cases} x = 2x - y - z, \\ y = 2x - y - 2z, \\ z = 2z - x + y, \end{cases} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1).$$

$$851. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad 852. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$853. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}. \quad 854. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решить системы 851—866, записанные в векторной форме: $x = Ax$, где x — вектор, A — данная матрица.

$$850. \begin{cases} x = 3x - 2y, \\ y = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}. \end{cases}$$

$$848. \begin{cases} x = -4x - 2y + \frac{e^t - 1}{2}, \\ y = 6x + 3y - \frac{e^t - 1}{3}. \end{cases} \quad 849. \begin{cases} x = x - y + \frac{\cos t}{1}, \\ y = 2x - y. \end{cases}$$

$$846. \begin{cases} x = y + t e^2 t - 1, \\ y = -x + t e^t. \end{cases} \quad 847. \begin{cases} x = 2y - x, \\ y = 4y - 3x + \frac{e^{3t} + 1}{3t}. \end{cases}$$

В задачах 846—850 данные системы решить методом вариации постоянных.

$$844. \begin{cases} y = 5x - y, \\ x = x - y + 8t, \end{cases} \quad 845. \begin{cases} y = 2y - x - 5e^t \sin t, \\ x = 2x - y, \end{cases}$$

$$842. \begin{cases} y = 2x - y - 2 \cos t, \\ x = 4x - 3y + \sin t, \end{cases} \quad 843. \begin{cases} y = x + 2y - 3e^{4t}, \\ x = 2x + y + 2e^t, \end{cases}$$

$$840. \begin{cases} y = 2x - y, \\ x = x - y + 2 \sin t, \end{cases} \quad 841. \begin{cases} y = x + 2e^t, \\ x = 2x - y, \end{cases}$$

$$838. \begin{cases} y = 3x + 6y, \\ x = 2x + 4y - 8, \end{cases} \quad 839. \begin{cases} y = x - 2y + 2 \sin t, \\ x = 2x - 3y, \end{cases}$$

$$836. \begin{cases} y = y - 2x + 18t, \\ x = 2x - y, \end{cases} \quad 837. \begin{cases} y = x + 2y + 16te^t, \\ x = x + 2y - 2y, \end{cases}$$

$$834. \begin{cases} y = x - 5 \sin t, \\ x = x + 2y, \end{cases} \quad 835. \begin{cases} y = x - 3y + 3e^t, \\ x = 2x - 4y, \end{cases}$$

$$832. \begin{cases} y = x + y + 5e^{-t}, \\ x = 5x - 3y + 2e^{3t}, \end{cases} \quad 833. \begin{cases} y = -2x + 2t, \\ x = 2x + y + e^t, \end{cases}$$

$$830. \begin{cases} y = y - 2x, \\ x = 4x + y - e^{2t}, \end{cases} \quad 831. \begin{cases} y = 3y - 2x, \\ x = 2y - x + 1, \end{cases}$$

$$867. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad 868. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad 869. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В задачах 867–873 найти показательную функцию e^{At} данной матрицы A .

$$866. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$865. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$864. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$863. x = Ax, A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$861. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 862. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$860. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$859. x = Ax, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$858. x = Ax, A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$857. x = Ax, A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$856. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$855. x = Ax, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Указание. О составлении дифференциальных уравнений в задачах об электрических цепях см. п. 5 § 11.

879. К источнику тока с напряжением $E = V \sin \omega t$ последовательно присоединено сопротивление R . Далее цепь разветвляется на две ветви, в одной из которых включена самонадукция L , а в другой — емкость C (рис. 4). Найти силу тока в цепи (установившийся режим), проходящего через сопротивление R . При какой частоте ω сила тока наибольшая? Наименьшая?

878. На концах вала закреплены стемы. Выемки периодические движущие силы $a^2 m x$. Найти возможные точки O . Каждая из пружинок растянута на величину x под действием сил $a^2 m x$. Найти возможные стемы.

877. Один конец пружины закреплен неподвижно в точке O , а к другому прикреплен груз массы $3m$, соединенный другой пружиной с грузом массы $2m$. Оба груза движутся без трения по одной прямой, проходящей через точку O . Каждая из пружинок растянута на величину x под действием сил $a^2 m x$. Найти возможные стемы.

876. Тело массы m движется на плоскости x, y , притягиваясь к точке $(0, 0)$ с силой $a^2 m r$, где r — расстояние до этой точки. Найти движение тела при начальных условиях $x(0) = d, y(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = v$ и траекторию этого движения.

$$874. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad 875. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

В задачах 874 и 875 найти $\det e^{At}$, не вычисляя матрицу e^{At} .

$$872. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 873. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$870. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad 871. A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рис. 4.

