Analiza zespolona, lista zadań nr 1

1. Obliczyć: a) $(\sqrt{3}+i)^{2011}$, b) $\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}}\right]^{2011}$.

2. Wyrazić: a) $\cos\frac{\pi}{12}$ i $\sin\frac{\pi}{12}$; oraz b) $\cos\frac{\pi}{8}$ i $\sin\frac{\pi}{12}$ bez użycia funkcji trygonometrycznych.

3. Rozwiązać równania:

   (a) $z^3-6z+4=0$;

   (b) $z^3-6z^2-4=0$;

   (c) $z^3+(3+3i)z+2+i=0$;

   (d) $z^3-3\sqrt[3]{2}z+2=0$;

   (e) $z^3+6iz+4+4i=0$;

   (f) $z^3-3z^2+1=0$.

4. *Homografią* nazywamy odwzorowanie $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$: $h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$. Pokazać, że homografia przeprowadza rozszerzoną płaszczyznę zespoloną w siebie i jest bijekcją. Znaleźć odwzorowanie odwrotne do danej homografii. Pokazać, że złożenie dwóch homografii jest homografią.

5. Zapisać równanie okręgu oraz prostej na płaszczyźnie zespolonej (tzn. wyrazić równania prostej i okręgu przez z i $\bar{z}$ zamiast x i y).

6. Pokazać, że homografia przeprowadza okrąg uogólniony na okrąg uogólniony.

7. **a)** Znaleźć obraz górnej półpłaszczyzny (tzn. $z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z\geqslant 0$) przy homografii $w=\frac{z+i}{z-i}$. **b)** Znaleźć obraz ćwiartki płaszczyzny, dany przez równania: $y\geqslant 1$, $x\geqslant 1$ przy tejże homografii.

8. Wykazać,że homografia $h(z):=\frac{z-a}{z-\bar{a}}$, $Im(a)>0$ przekształca górną półpłaszczyznę na koło $|z|<1$. Znaleźć obrazy półprostych $\{(b,y)\,,\,y>0\}$ oraz półokręgów $\{(x,y)\,:\,y>0\,,\,(x-b)^2+y^2=r^2\}$.

9. Wykazać, że dla każdych 2 trójek punktów $z_1,z_2,z_3\in\overline{\mathbb{C}}$, $w_1,w_2,w_3\in\overline{\mathbb{C}}$ istnieje *dokładnie jedna* homografia h taka, że $h(z_i)=w_i$.

10. *Homografie zachowujące prostą rzeczywistą.* Wykazać, że jeżeli $h(\overline{\mathbb{R}})=\overline{\mathbb{R}}$, to h jest zadane macierzą rzeczywistą.