

Analiza zespolona, lista zadań nr 3

07.01.2012

1 Całki z funkcji wieloznacznych

1.1 Całki po dziurce od klucza lub kawałku tortu

1. Obliczyć całkę:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dla jakich α powyższa całka jest zbieżna?

1.2 Całki po kości

2. Obliczyć całki:

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{1}{(9-7x)\sqrt[3]{(1-x)(1-x^2)}} dx$$

$$(b) I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx \quad \text{Odp. } I = \pi \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}.$$

$$(c) I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3} dx, \quad -1 < p < 2.$$

Odp. $I = 2^{p-3} \pi p (1-p) \frac{1}{\sin \pi p}$.

1.3 Inne kontury

3. Całkując odpowiednią funkcję po odpowiednim konturze pokazać, że

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

2 Sumy i iloczyny

2.1 Sumy szeregów

2.2 Rozwinięcia na ułamki proste

4. Udowodnić (jeśli nie było na wykładzie) twierdzenie o rozkładzie na 'ułamki proste':
Założmy, że f jest funkcją meromorficzną posiadającą jedynie bieguny pierwszego rzędu w punktach a_1, a_2, \dots , przy czym $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
Niech $A_n = \text{Res}(f, a_n)$. Założmy, że istnieje ciąg konturów $\{C_m\}$ taki, że:

- (a) Żaden kontur nie przechodzi przez żaden z biegunów,
- (b) Każdy kontur C_m leży wewnątrz konturu C_{m+1} ,
- (c) Średnice konturów dążą do nieskończoności, tzn. $\min_{z \in C_m} R_m \rightarrow \infty$ dla $m \rightarrow \infty$,
- (d) Długość konturu C_m jest nie większa niż Cm , gdzie C jest stałą,
- (e) Na konturach wartość $f(z)$ jest wspólnie ograniczona: $\min_{z \in C_m} |f(z)| \leq M$ dla dowolnego m .

Rozważając całkę $\int_{C_m} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi(\xi-z)}$ wykazać, że

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \right),$$

gdzie suma szeregu jest rozumiana w tym sensie, że grupujemy w jeden wyraz składniki, odpowiadające biegunom leżącym pomiędzy C_n a C_{n+1} .

Uwaga. Najczęściej spotykane kontury spełniające powyższe warunki to okręgi lub kwadraty; poniższe zadania najłatwiej zrobić używając do oszacowań którejś z tych dwu możliwości.

5. Pokazać, że:

(a) $\frac{1}{\cos x} = 4\pi \left(\frac{1}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{3}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{5}{25\pi^2 - 4x^2} + \dots \right)$

(b) $\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + 2x \left(\frac{1}{\pi^2 + x^2} + \frac{1}{4\pi^2 + x^2} + \frac{1}{9\pi^2 + x^2} + \dots \right)$

(c) $\operatorname{tg} \pi z = 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 - z^2}$

(d) Dla $0 < a < 1$ zachodzi:

$$\frac{e^{az}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z \cos 2a\pi n - 4\pi n \sin 2\pi a n}{z^2 + 4n^2\pi^2}$$

(e) Dla $\alpha \neq 0$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq \pm 1, \pm 2, \dots$ zachodzi:

$$\frac{\pi}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n\alpha + \beta} - \frac{1}{n\alpha + (\alpha - \beta)} \right)$$

(f) Dla $z \neq n\pi(\pm 1 \pm i)$ zachodzi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi x^2 (\cosh x - \cos x)} = \\ & = \frac{1}{\pi x^4} - \frac{1}{\sinh \pi} \cdot \frac{1}{\pi^4 + \frac{1}{4}x^4} + \frac{2}{\sinh 2\pi} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4 + \frac{1}{4}x^4} - \frac{3}{\sinh 3\pi} \cdot \frac{1}{(3\pi)^4 + \frac{1}{4}x^4} + \dots \end{aligned}$$

Wsk. Rozważyć całkę

$$\int_{C_n} \frac{2\pi z dz}{(\pi^4 z^4 + \frac{1}{4}x^4) \sinh \pi z \sin \pi z}$$

gdzie $C_n = C(0, n + \frac{1}{2})$ i wziąć granicę $n \rightarrow \infty$.

2.3 Rozwinięcia na iloczyny nieskończone

6. Udowodnić twierdzenie (WW1, str. 145 – 146):

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w całej \mathbb{C} , o zerach jednokrotnych w punktach a_1, a_2, \dots , przy czym $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Wtedy $f(z)$ daje się przedstawić jako iloczyn nieskończony

$$f(z) = f(0) \exp\left(\frac{zf'(0)}{f(0)}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}\right].$$

Uwaga. Poniższe zadania dają się zrobić przez odpowiednie skorzystanie z powyższego twierdzenia.

7. Wyprowadzić wzory:

(a) $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$

(b) $\sinh \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$

(c) $\cosh z - \cos z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{\pi^4 n^4}\right)$

(d) $\cos \pi z = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + \frac{1}{2})^2}\right)$

8. Wyrazić następujące iloczyny przez funkcje elementarne:

(a) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z^4}{n^4}\right)$

(b) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{z^4}{n^4}\right)$

(c) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^6}{n^6}\right)$

(d) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^6}{n^6}\right)$

(e) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2} + \frac{z^4}{n^4}\right)$

9. Wykazać, że:

(a) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) = \frac{\sinh \pi}{4\pi}$

(b) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) = \frac{1 + \cosh \pi \sqrt{3}}{2\pi^2}$

(c) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^6}\right) = \frac{\sinh \pi}{2\pi^3} (\cosh \pi - \cos \sqrt{3}\pi)$

Wsk. Jest to banał, jeśli ktoś zrobił poprzednie zadanie.