

## Homografie problemowo

1. *Odzworowaniem afinicznym* (Af'em) nazywamy odzworowanie  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = az + b, a \neq 0$ . Kilka łatwych faktów nt. odwz. afinicznych:

(a)  $g$  jest bijekcją  $\mathbb{C}$  na siebie.

(b) Dla dowolnych  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}, w_1 \neq w_2$  istnieje dokładnie jedno odwz. afiniczne przeprowadzające  $z_1$  na  $w_1$  oraz  $z_2$  na  $w_2$ .

**Odp.** Niech szukane  $g$  ma postać:  $w = g(z) = az + b$ . Wtedy warunki:  $w_1 = g(z_1)$  i  $w_2 = g(z_2)$  tworzą układ dwóch równań liniowych na współczynniki  $a, b$ .

2. *Homografią* nazywamy odzworowanie  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : h(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0$ . Pokazać, że:

(a) homografia jest bijekcją  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ .

**Odp.** Przedstawiamy homografię jako złożenie Af'a, inwersji i Af'a:

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = (g_1 \circ k \circ g_2)(z), \quad (1)$$

gdzie:

$$g_2(z) = cz + d, \quad k(z) = \frac{1}{z}, \quad g_1(z) = \frac{bc-ad}{c}z + \frac{a}{c}.$$

$g_1, g_2$  - Af'y, więc bijekcje;  $k$  - inwersja - też bijekcja; złożenie jest więc bijekcją.

(b) Znaleźć odzworowanie odwrotne do danej homografii.

**Odp.**  $w = \frac{az+b}{cz+d}, czw + dw = az + b, z(cw - a) = b - dw, z = \frac{-dw+b}{cw-a}$ .

(c) Pokazać, że złożenie dwóch homografii jest homografią.

**Odp.** By simple calculation.

3. Zapisać równanie okręgu oraz prostej na płaszczyźnie zespolonej (tzn. wyrazić równania prostej i okręgu przez  $z$  i  $\bar{z}$  zamiast  $x$  i  $y$ ).

**Odp.** Ponieważ:  $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ , to:  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ , i wstawiamy to do równania okręgu o środku w p.  $(a, b) = a + ib$  i promieniu  $R$ . Mamy, po pomnożeniu przez 4:

$$\begin{aligned} 4R^2 &= (2x - 2a)^2 + (2y - 2b)^2 = (z + \bar{z} - 2a)^2 + (i\bar{z} - iz - 2b)^2 \\ &= z^2 + \bar{z}^2 + 4a^2 + 2z\bar{z} - 4az - 4a\bar{z} - z^2 - \bar{z}^2 + 4b^2 + 2z\bar{z} - 4ib\bar{z} + 4ibz \\ &= 4z\bar{z} + z(-4a + 4ib) + \bar{z}(-4a - 4ib) + 4(a^2 + b^2); \end{aligned}$$

Po przekształceniu i oznaczeniu:  $\gamma = -a + ib$  oraz  $\delta = a^2 + b^2 - R^2 = \gamma\bar{\gamma} - R^2 \in \mathbb{R}$  mamy

$$z\bar{z} + \gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} + \delta = 0.$$

Mamy przy tym:  $\gamma\bar{\gamma} - \delta = R^2 \geq 0$ .

Pozostaje jeszcze rozpatrzeć równania prostych:  $Ax + By + C = 0$  ( $A, B, C \in \mathbb{R}$ ). Mamy:

$$2Ax + 2By + 2C = 0 = Az + A\bar{z} - iBz + iB\bar{z} + C = (A - iB)z + (A + iB)\bar{z} + C = 0$$

lub, oznaczając  $\Gamma = A - iB$ , możemy zapisać równanie okręgu w postaci

$$\Gamma z + \bar{\Gamma}\bar{z} + C = 0.$$

4. Pokazać, że homografia przeprowadza okrąg uogólniony na okrąg uogólniony.

**Odp.** *Pierwszy sposób* – bezpośredni rachunek, przydługi, ale do ogarnięcia. *Drugi sposób* (pozwalający zaoszczędzić nieco rachunków) – wykorzystanie zad. 2a. Zauważmy, że odwz. afiniczne, jako złożenie translacji i skalowania (zespolonego), przekształca prostą na prostą i okrąg na okrąg. Zobaczymy jeszcze, co robi inwersja. Jej działanie na prostą nie przechodzącą przez zero ( $C \neq 0$ ) daje

$$\Gamma z + \bar{\Gamma} \bar{z} + C = 0 \rightarrow \Gamma \frac{1}{z} + \bar{\Gamma} \frac{1}{\bar{z}} + C = 0 \implies \frac{\Gamma}{C} \bar{z} + \frac{\bar{\Gamma}}{C} z + z \bar{z} = 0$$

więc okrąg. Gdy  $C = 0$  to obrazem prostej  $\Gamma z + \bar{\Gamma} \bar{z} = 0$  jest prosta  $\Gamma \bar{z} + \bar{\Gamma} z = 0$ . Wreszcie, dla  $\delta \neq 0$ , okrąg przechodzi w:

$$z \bar{z} + \gamma z + \bar{\gamma} \bar{z} + \delta = 0 \rightarrow \frac{1}{z \bar{z}} + \gamma \frac{1}{z} + \bar{\gamma} \frac{1}{\bar{z}} + \delta = 0 \implies \frac{1}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} \bar{z} + \frac{\bar{\gamma}}{\delta} z + z \bar{z} = 0,$$

więc okrąg. Gdy zaś  $\delta = 0$ , to

$$z \bar{z} + \gamma z + \bar{\gamma} \bar{z} = 0 \rightarrow \frac{1}{z \bar{z}} + \gamma \frac{1}{z} + \bar{\gamma} \frac{1}{\bar{z}} = 0 \implies 1 + \gamma \bar{z} + \bar{\gamma} z = 0,$$

więc obrazem jest prosta.

Każde z trzech przekształceń przeprowadza okrąg uogólniony w okrąg uogólniony, więc ich złożenie tak samo.

5. **a)** Znaleźć obraz górnej półpłaszczyzny (tzn.  $S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$ ) przy homografii  $w = \frac{z+i}{z-i}$ .

**Rozw.** Wystarczy rozważyć obraz prostej  $y = 0$  tzn.  $z = \bar{z}$ . Niech  $w$  należy do obrazu,  $w$  powstaje z  $z$  należącego do prostej; wtedy  $z = z(w)$ . Mamy odwzorowanie odwrotne do  $w(z)$ :  $z(w) = i \frac{w+1}{w-1}$ , zatem:

$$z - \bar{z} = 0 \implies i \frac{w+1}{w-1} - (-i) \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1} = 0,$$

po uproszczeniu:  $w\bar{w} = 1$ , tzn. obraz prostej  $y = 0$  jest okręgiem  $C(0,1)$  (przy czym punkt  $(1,0)$  okręgu powstaje jako obraz punktu w nieskończoności). Pozostaje rozstrzygnąć, czy górna półpłaszczyzna przechodzi na wewnątrz czy na zewnątrz. Mamy np.  $w(2i) = 3$ , tak więc **Odp.**  $S$  przechodzi na  $C(0,1)$  razem z zewnątrz  $C(0,1)$ .

**b)** Znaleźć obraz ćwiartki płaszczyzny, dany przez równania:  $y \geq 1, x \geq 1$  przy tejże homografii.

6. **a)** Wykazać, że homografia  $h(z) := \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ ,  $\text{Im}(a) > 0$  przekształca górną półpłaszczyznę na koło  $|z| < 1$ . **Rozw.** Patrz poprzednie zadanie.

**b)** Znaleźć obrazy półprostych  $\{(b, y), y > 0\}$  oraz półokręgów  $\{(x, y) : y > 0, (x-b)^2 + y^2 = r^2\}$ .

7. Wykazać, że dla każdych 2 trójek punktów  $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}, w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$  istnieje dokładnie jedna homografia  $h$  taka, że  $h(z_i) = w_i$ .

8. *Homografie zachowujące prostą rzeczywistą.* Wykazać, że jeżeli  $h(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$ , to  $h$  jest zadane macierzą rzeczywistą.

**Odp.** Niech  $h(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ . Jeżeli  $c = 0$ , to można położyć  $d = 1$ . Wtedy  $h(0) = b \in \mathbb{R}$  oraz  $h(1) = a+b \in \mathbb{R}$ . Jeżeli  $c \neq 0$  to można położyć  $c = 1$  i mamy  $h(x) = \frac{(ax+b)(x+\bar{d})}{|x+d|^2} \in \mathbb{R}$ . Zatem dla  $x \in \mathbb{R}$  wielomian  $x^2 \text{Im}(a) + x \text{Im}(a\bar{d} + b) + \text{Im}(b\bar{d}) = 0$ . Stąd  $a, b, d \in \mathbb{R}$ .

9. Znaleźć przeciwobraz zbioru  $S$  względem odwzorowania  $f = \frac{z}{1-z}$  dla:

(a)  $S = K(ir, r)$ . **Odp.**  $f^{-1}(S) = K(ir, r)$ .

(b)  $S = K(i, 2)$ . **Odp.**  $f^{-1}(S) = \mathbb{C} \setminus \overline{K}(\frac{3-i}{2}, 1)$ .

(c)  $S = K(2 + 4i, 5)$ . **Odp.**  $f^{-1}(S) = \{z = x + iy : y > \frac{1}{8}(6x - 5)\}$ .

10. Niech  $z_1, z_2, z_3, z_4$  – cztery różne punkty płaszczyzny zespolonej. Pokazać, że ich *dwustosunek*  $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ , definiowany jako:

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)}$$

jest niezmiennikiem homografii, tzn. że dla dowolnej homografii  $h$  zachodzi:

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (h(z_1), h(z_2); h(z_3), h(z_4)).$$