Analiza zespolona, lista zadań nr 2

1 Warunki Cauchy'ego-Riemanna itd.

1. Dla następujących funkcji wypisać ich części rzeczywiste i urojone. Sprawdzić, czy następujące funkcje spełniają w całej płaszczyźnie równania Cauchy'ego–Riemanna. Sprawdzić też, czy części rzeczywiste i urojone spełniają równanie Laplace'a.
   (a) $f = z^3$;
   (b) $f = (\mathrm{Re}z)z^2$;
   (c) $f = e^{iz^2}$;
   (d) $f = \bar{z}\mathrm{Re}z$;
   (e) $f = \frac{1}{z}$;
   (f) $f = \frac{1}{z^2+1}$.
2. Sprawdzić, czy następujące funkcje są harmoniczne. Jeśli tak, to znaleźć funkcję harmonicznie sprzężoną do danej, oraz wynik zapisać jako funkcję samego z.
   (a) $x^2 - y^2 + 4xy$;
   (b) $\frac{x}{x^2+y^2}$;
   (c) $x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$;
   (d) $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;
   (e) $e^x(x\cos y - y\sin y)$.

2 Całki bez użycia residuów

Przypomnienie. Niech f – holomorficzna w $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω – otwarty; niech $a \in \Omega$, niech γ – krzywa obiegająca punkt a jednokrotnie antyzegarowo. Wtedy:

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0; \tag{1}$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z; \tag{2}$$

$$f^{(n)}(a) = n!\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z. \tag{3}$$

3. Obliczyć całkę $\int_\gamma \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$ dla:
   (a) $\gamma = [0, 2+2i]$;
   (b) γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 1.
4. Obliczyć całkę: $\int_\gamma |z-1||\mathrm{d}z|$, gdzie γ – okrąg o środku w 0 i promieniu 1.
5. Obliczyć całkę $\int_\gamma |z|\mathrm{d}z$, jeżeli:

(a) $\gamma = [-i, i]$;

(b) γ jest lewym półokręgiem łaćzącym punkt $-i$ z punktem i,

(c) γ jest prawym półokręgiem łaćzącym punkt $-i$ z punktem i

6. `Całki Fresnela czyli Fresnelki czyli Frędzelki` (Terminologia P. Ch.) Obliczyć *całki Fresnela:*

$$F_c = \int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x, \qquad F_s = \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x.$$

Odp. Obie $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$. **Rozw.** Scałkujmy funkcję $f(z) = e^{iz^2}$ po konturze $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_R \cup \Gamma_2$, gdzie: $R \in \mathbb{R}_+$; $\Gamma_1 = [0, R]$; $\Gamma_R = \{z \in C(0, R), 0 \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{4}\}$; Γ_3 – odcinek zamykający kontur Γ, tzn. odcinek łączący $e^{i\pi/4}R$ z zerem.

Ponieważ $f(z)$ jest holomorficzna na całej $\mathbb{C}$, to

$$\int_\Gamma e^{iz^2}\mathrm{d}z = 0$$

Obliczmy lub oszacujmy całki na każdej części konturu Γ.

- $$\int_{\Gamma_1} e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^R (\cos(x^2) + i\sin(x^2))\mathrm{d}x \xrightarrow{R} F_c + iF_s \tag{4}$$

  – więc po przejściu $R \to \infty$ otrzymamy oba Frędzelki.

- $\int_{\Gamma_3} e^{iz^2}\mathrm{d}z$: Sparametryzujmy $z \in \Gamma_3$ przez: $z = e^{i\pi/4}t$, $t \in [R, 0]$. Mamy więc, dla $z \in \Gamma_3$: $z^2 = e^{i\pi/2t^2} = it^2$, $\mathrm{d}z = e^{i\pi 4}\mathrm{d}t$, zatem:

  $$\int_{\Gamma_3} e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_R^0 e^{-t^2}e^{i\pi/4}\mathrm{d}t \xrightarrow{R} -\frac{1}{2}e^{i\pi/4}\sqrt{\pi} = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{8}}. \tag{5}$$

- $\int_{\Gamma_2} e^{iz^2}\mathrm{d}z$: Sparametryzujmy $z \in \Gamma_2$ przez: $z = Re^{i\phi}$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{4}]$; $e^{iz^2} = e^{iR^2e^{2i\phi}} = e^{iR^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)}$; $\mathrm{d}z = iRe^{i\phi}\mathrm{d}\phi$;

  $$I_2 = \int_{\Gamma_2} e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\phi\; iRe^{iR\phi}e^{iR^2\cos 2\phi - R^2\sin 2\phi};$$

  szacujemy moduł z całki I_2 przez całkę z modułu (... – funkcja podcałkowa). *Uwaga.* Można skorzystać z lematu Jordana, ale raz oszacujmy wprost.

  $$|I_2| = |\int_0^{\pi/4} ...\,\mathrm{d}\phi| \leqslant \int_0^{\pi/4} |...|\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\phi\; Re^{-R^2\sin 2\phi};$$

  szacujemy sinus *od dołu*, tak by $-sin2\phi$ był oszacowany *od góry*:

  $$\forall\ \phi \in [0, \pi/4]:\ \sin 2\phi \geqslant \frac{4}{\pi}\phi,$$

  skąd

  $$|I_2| \leqslant R\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\phi e^{-4R^2/\pi} = -R\frac{\pi}{4R^2}e^{-4R^2/\pi} \xrightarrow{R} 0.$$

Porównując (4) oraz (5) mamy:

$$F_c = \int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}, \qquad F_s = \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x\sqrt{\frac{\pi}{8}},$$

czyli wydawałoby się, że mamy już odpowiedź... GDYBY NIE to, że musimy się jeszcze upewnić, że Frędzelki ISTNIEJĄ! a są to całki niewłaściwe o istnieniu nieewidentnym.

Przetestujmy więc Frędzelka np. F_s, zamieniając zmienną: $x = \sqrt{t}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$,:

$$F_s = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{t}} \sin t \mathrm{d}t.$$

W zerze jest to całkowalne (dla Frędzelka F_c też). A co dla $t \to \infty$? Skorzystajmy z *kryterium Dirichleta*: Dla całki $I = \int_a^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t$, jeśli $\int_a^M f(t)\mathrm{d}t$ jest wspólnie ograniczona dla dowolnego M, a $g(t)$ dąży do zera monotonicznie, to I istnieje.

Tu bierzemy oczywiście $f(t) = \sin t$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ i to kończy sprawę.

7. **Ozn.** Okrąg o środku w punkcie p i promieniu r będziemy oznaczać $C(p, r)$.

   Obliczyć całkę $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z$, jeżeli:

   (a) $\gamma = C(0, \frac{1}{2})$;

   (b) $\gamma = C(0, 2)$;

   (c) $\gamma = C(i, 1)$;

   (d) $\gamma = C(-i, 1)$.

   Wsk. Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste.

8. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z}\mathrm{d}z$$
   gdzie $\gamma = C(2+i, \sqrt{2})$. *Wsk.* Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

9. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$$
   gdzie $\gamma = C(a, a)$, $a > 1$. *Wsk.* Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste i korzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

10. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$$
    gdzie $\gamma = C(0, 2a)$, $a > 0$. *Wsk.* jw.

11. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathrm{d}z$$
    gdzie:

    (a) $\gamma = C(0, \frac{1}{2})$,

    (b) $\gamma = C(1, \frac{1}{2})$.

    Wsk. Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego dla drugiej pochodnej funkcji holomorficznej.

3 Taylor & Laurenty

Tw. Laurenta: Niech $f(z)$ będzie holomorficzna na okręgach współśrodkowych $C(a,R)$ i $C'(a,r)$ (gdzie $r<R$) oraz w pierścieniu pomiędzy nimi. Wtedy w każdym punkcie z pierścienia $f(z)$ ma rozwinięcie postaci

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \ldots, \tag{6}$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z. \tag{7}$$

Szczególny przypadek – rozwinięcie Taylora: Gdy $f(z)$ jest holomorficzna wewnątrz okręgu C i ...... na okręgu, to w rozwinięciu Laurenta pojawiają się tylko potęgi nieujemne.

12. Dla podanych niżej funkcji znaleźć cztery początkowe różne od zera współczynniki rozwinięcia w szereg Taylora wokół $z=0$, oraz podać promień zbieżności R odpowiedniego szeregu Taylora:

    (a) $\exp\frac{z}{1-z}$;

    (b) $\sin\frac{z}{1-z}$;

    (c) $\cos^2 z$;

    (d) $\frac{1}{\cos z}$.

13. Rozwinąć funkcję $f(z)=\frac{1}{1-z}$ w szereg Laurenta w obszarach: I: $|z|<1$, II: $|z|>1$, explicite licząc całki.

Rozw. Obszar I: Jako C bierzemy $C(0,R)$, $0<R<1$. Najsampierw popatrzmy na współczynniki b_n, $n\geqslant 1$:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1-z}{z}^{n-1}\mathrm{d}z = 0,$$

bo funkcja podcałkowa jest holomorficzna wewnątrz C.

Współczynniki a_n, $n\geqslant 0$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{1-z}\frac{1}{z}\mathrm{d}z = \left.\frac{1}{1-z}\right|_{z=0} = 1;$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{1-z}\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = \left.\left(\frac{1}{1-z}\right)'\right|_{z=0} = 1;$$

i ogólnie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{1-z}\frac{1}{z}^{n+1}\mathrm{d}z = \left.\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n)}\right|_{z=0} = 1,$$

zatem jako rozwinięcie otrzymujemy *szereg geometryczny*, czego oczywiście należało się spodziewać.

II:

Odp. Szeregi geometryczne w odpowiedniej zmiennej: I. $f(z)=1+z+z^2+\ldots$, II. $f(z)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots$.

14. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0=0$ dla:

    (a) $|z|<1$;

    (b) $1<|z|<2$;

(c) $|z| > 2$.

15. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:

(a) $|z| < 1$;

(b) $1 < |z| < 2$;

(c) $|z| > 2$.

16. Pokazać, że

$$f(z) \equiv \exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = J_0(x) + zJ_1(x) + z^2J_2(x) + \cdots + z^nJ_n(x) + \ldots$$

$$-\frac{1}{z}J_1(x) + \frac{1}{z^2}J_2(x) + \cdots + \frac{(-1)^n}{z^n}J_n(x) + \ldots \tag{8}$$

gdzie

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

Rozw. Punktem osobliwym $f(z)$ jest jedynie $z = 0$ (*jaki to punkt osobl.? ppo,b,pio?*) więc na podstawie tw. Laurenta można napisać rozwinięcie $f(z)$:

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots,$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]\frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}}, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] z^{n-1}\,\mathrm{d}z,$$

gdzie C, C' są *dowolnymi* okręgami o środku w $z = 0$. Można więc w obu przypadkach wziąć okrąg jednostkowy. Mamy więc parametryzację: $z = e^{i\theta}$, $a - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta$, $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ i mamy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-ni\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta;$$

część urojona a_n jest równa zeru, bo $\mathrm{Im}\, a_n = \int_0^{2\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta$, co można stwierdzić, zamieniając zmienną $\theta \to 2\pi - \phi$.

Mamy więc, zgodnie z definicją (9): $a_n = J_n(x)$, $b_n = (-1)^nJ_n(x)$. To ostatnie wynika z faktu, że rozwinięcie Laurenta nie zmieni się tu przy zamianie $z \to -\frac{1}{z}$. *Uwaga.* Współczynniki $J_n(x)$ są to *funkcje Bessela*, a wzór (8) może służyć jako jedna z definicji tychże.

17. Znaleźć residua funkcji:

(a) $\frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)}$ w punktach $0, 1, -1$;

(b) $\frac{e^{z^2}}{z^2(z-1)}$ w punktach $0, 1$;

(c) $\frac{e^{ez}}{1-z^4}$ w punktach $1, -1, i, -i$;

(d) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$ $(a \neq 0)$ w punktach $ai, -ai$; **Odp.** $\frac{-ie^{-am}}{4a^3}(am+1)$ w punkcie ai

(e) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^3}$ $(a \neq 0)$ w punktach $ai, -ai$;

(f) $(z^3 - z^5)^{-1}$ w punktach osobliwych;

(g) $\operatorname{ctg}^3 z$ w punktach osobliwych;

(h) $\sin\frac{z}{z+1}$ w punktach osobliwych;

(i) $\frac{1}{(1+z^2)^4}$ z punkcie i;

(j) $\frac{z^6}{(1+z)^3}$ w punkcie -1.

4 Całki trygonometryczne

18. Obliczyć całkę:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$

19. Wykazać, że przy $0 < b < a$ zachodzi:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta \mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2}).$$

20. Wykazać, że przy $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta \mathrm{d}\theta}{1+a^2-2a\cos 2\theta} = \pi\frac{1-a+a^2}{1-a}$$

21. Wykazać, że dla $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+a\cos\theta)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}^3}$$

5 Całki z funkcji wymiernych

22. Wykazać, że

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3} \quad (a > 0);$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}, \quad a, b > 0;$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^6 \mathrm{d}x}{(a^4+x^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}, \quad a > 0.$

6 Całki z funkcji wymiernych razy f. trygonometryczne

23. Wykazać, że

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x \mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \quad (a > 0);$

(b) $\int_0^\infty \frac{x \sin x \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi e^{-a}}{4a} \quad (a > 0);$

(c) $\int_0^\infty \frac{\cos x \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right) \quad (a \neq b, a, b > 0);$

(d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3} = \frac{\pi e^{-a}(a^2+3a+3)}{2^3 a^5} \quad (a > 0);$ *Uwaga.* wynik sprawdzony dla $a = 1$ only

7 Całki z funkcji wieloznacznych

7.1 Całki po dziurce od klucza lub kawałku tortu

24. Całkując po "dziurce od klucza" funkcję: $\frac{z^{a+1}}{z+1} \equiv \frac{\exp((a+1)\mathrm{Log} z)}{z+1}$ wykazać, że dla $-2 < a < -1$

$$I(a) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{a+1}\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Skąd się bierze powyższy warunek na a?

Rozw. Warunki zbieżności całki po półosi rzeczywistej: asymptotyka w pobliżu $+\infty$ musi być x^α, $\alpha < -1$, co daje: $a + 1 - 1 < -1$ tzn. $a < -1$. Zachowanie w zerze: Musi zachodzić: $a + 1 > -1$ czyli $a > -2$.

Zachowanie $f(z)$ w $\mathbb{C}$: $f(z)$ ma biegun prosty w $z = -1$ i punkt rozgałeżienia w $z = 0$.

Kontur 'dziurka od klucza' $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_R \cup \Gamma_- \cup \Gamma_r$. ($\Gamma_\pm$ – kontur jest odcinkiem $[r, R]$ nad $(+)$ i pod (-) brzegiem rozcięcia; Γ_r – okrąg otaczający 0; $\Gamma_R = \{z : z = Re^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi\}$).

Mamy:

$$\int\limits_\Gamma = 2\pi i \mathrm{Res}\,(f, -1)$$

Bierzemy taką wartość z^{a+1}, że na Γ_+ mamy fazę 0. Wtedy $\lim\limits_{r\to 0, R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_+} = I(a)$. Po obiegu po Γ_R faza $f(z)$ zmienia się do $e^{2\pi i(a+1)} = e^{2\pi i a}$ wskutek zmiany fazy czynnika z^{a+1}. Zatem $\lim\limits_{r\to 0, R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_-} = e^{2\pi i a} I(a)$. Ze standardowych szacowań mamy: $\lim\limits_{r\to 0} \int\limits_{\Gamma_r} = 0 = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R}$.

Liczymy residuum:

$$\mathrm{Res}\,(f, -1) = \lim_{z\to -1} \frac{z^{a+1}}{1+z}(1+z) = (-1)^{a+1}.$$

Liczba po r.h.s. jest wysoce niejednoznaczna. Ale! Tu mamy przepis na jej ujednoznacznienie, tzn. wybór jednej spośród (skończenie albo nieskończenie wielu – zależnie od wymierności a) wartości. Pamiętajmy bowiem, że idziemy po łuku od wartości rzeczywistej $z = |z|e^{i0}$. Po obiegnięciu zera o pół obrotu, mamy jednoznacznie: $(-1)^{a+1} = e^{i\pi(a+1)} = -e^{i\pi a}$.

Składając wszystko powyższe do kupy, mamy:

$$I(a)(1 - e^{2i\pi a}) = 2i\pi \mathrm{Res}\,(f, -1) = 2i\pi(-)e^{i\pi a},$$

tzn.

$$I(a) = -2\pi i \frac{e^{i\pi a}}{1 - e^{2i\pi a}} = -2\pi i \frac{1}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}} = +\pi \frac{2i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

25. Całkując po "dziurce od klucza" funkcję: $z^a(z^2+1)^{-2} \equiv \exp(a\mathrm{Log}z(z^2+1)^{-2}$ wykazać, że dla $-1 < a < 3$

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{x^a \mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi(1-a)}{4\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

Skąd się bierze powyższy warunek na a?

Rozw. Cały setup jak poprzednio.

Warunki zbieżności całki po półosi rzeczywistej: asymptotyka w pobliżu $+\infty$: $a-4 < -1$ tzn. $a < 3$; asymptotyka w zerze: $a > -1$, w sumie $-1 < a < 3$.

Funkcja podcałkowa ma dwa bieguny drugiego rzędu w $z = +i$ oraz $z = -i$.

Pamiętając o fazie, mamy:

$$I(a)(1 - e^{2i\pi a}) = 2i\pi(\mathrm{Res}\,(f,i) + \mathrm{Res}\,(f,-i)).$$

Liczymy residua:

$$\mathrm{Res}\,(f,+i) = \lim_{z\to i}[f(z)(z-i)^2]' = \lim_{z\to i}\left(\frac{az^{a-1}}{(z+i)^2} - 2\frac{z^a}{(z+i)^3}\right) = \frac{z^a}{(z+i)^3}\left(a\frac{z+i}{z} - 2\right)\Bigg|_{z=i}$$

$$= i^a \frac{1}{2^3 i^3}(2a-2) = i^a i \frac{a-1}{4}.$$

Znów wyrażenie i^a jest ogólnie niejednoznaczne, ale znów ujednoznaczniamy je przez przepis, że dochodzimy do i po łuku startując z jedynki. Naówczas: $i^a = e^{i\pi a/2}$, i mamy: $\mathrm{Res}\,(f,+i) = ie^{i\pi a/2}\frac{a-1}{4}$.

Drugie residuum liczymy tak samo:

$$\mathrm{Res}\,(f,-i) = \frac{z^a}{(z-i)^3}\left(a\frac{z-i}{z} - 2\right)\Bigg|_{z=-i} = (-i)^a \frac{1}{(-2i)^3}(2a-2) = -ie^{3i\pi a/2}\frac{a-1}{4}$$

Razem:

$$I(a) = 2\pi i \frac{1}{1-e^{2i\pi a}} i \cdot \frac{a-1}{4}(e^{i\pi a/2} - e^{3i\pi a/2}) = -\pi\frac{a-1}{2}\cdot\frac{e^{-i\pi a/2} - e^{i\pi a/2}}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}}$$

$$= \pi\frac{1-a}{2}\cdot\frac{\sin(\pi a/2)}{\sin(\pi a)} = \pi\frac{1-a}{4}\cdot\frac{1}{\cos(\pi a/2)}.$$

26. Obliczyć całkę:

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dla jakich α powyższa całka jest zbieżna? (oczywiście α może zależeć od n).
Wsk. Całkować po dziurce od klucza lub (bardziej sugerowane) kawałku tortu.

7.2 Całki po konturze ODS

Terminologia: *Konturem ODS*[1] będziemy nazywać figurę, złożoną z dwóch półokręgów o promieniach r oraz R ($R > r$), o środkach w 0 i leżących w górnej półpłaszczyźnie, oraz odcinków $[-R,-r]$ i $[r,R]$, leżących na osi rzeczywistej.

[1] Geneza nazwy ODS będzie podana na życzenie zainteresowanych

27. Całkując funkcję $f(z) = (\mathrm{Log} z)^2(z^2 + a^2)^{-1}$ po konturze ODS wykazać, że przy $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8a}(\pi^2 + 4(\log a)^2), \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\log a.$$

28. Wykazać w podobny sposób, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

29. Całkując funkcję $\frac{\mathrm{Log} z}{1+z^2}$ wzdłuż brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R\} \cap \{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}\}$ wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^4}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2\log x}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

30. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x = 2^{-3/2}\pi a^{-5/2}\left(\frac{3}{2}\log a - 1 - \frac{3\pi}{4}\right), \quad a > 0.$$

31. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi \log 2.$$

Wsk. Całkować funkcję $\frac{\mathrm{Log}(z+i)}{1+z^2}$ po brzegu górnego półkola $K(0,R)$.