Analiza zespolona, lista zadań nr 3

07.12.2016

1 Całki z funkcji wieloznacznych

1.1 Całki po dziurce od klucza lub kawałku tortu

1. Obliczyć całkę:
$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
Dla jakich α powyższa całka jest zbieżna?

1.2 Całki po kości

2. Obliczyć całki:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(9-7x)\sqrt[3]{(1-x)(1-x^2)}}\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x$ *Odp.* $I = \pi\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$.

   (c) $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\mathrm{d}x, \quad -1 < p < 2.$

   Odp. $I = 2^{p-3}\pi p(1-p)\frac{1}{\sin \pi p}$.

1.3 Inne kontury

3. Całkując odpowiednią funkcję po odpowiednim konturze pokazać, że
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

2 Sumy i iloczyny

2.1 Sumy szeregów

2.2 Rozwinięcia na ułamki proste

4. Udowodnić (jeśli nie było na wykładzie) twierdzenie o rozkładzie na 'ułamki proste': Załóżmy, że f jest funkcją meromorficzną posiadającą jedynie bieguny pierwszego rzędu w punktach $a_1, a_2, \ldots$, przy czym $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Niech $A_n = \mathrm{Res}(f, a_n)$. Załóżmy, że istnieje ciąg konturów $\{C_m\}$ taki, że:

(a) Żaden kontur nie przechodzi przez żaden z biegunów,

(b) Każdy kontur C_m leży wewnątrz konturu C_{m+1},

(c) Średnice konturów dążą do nieskończoności, tzn. $\min\limits_{z\in C_m} \equiv R_m \to \infty$ dla $m \to \infty$,

(d) Długość konturu C_m jest nie większa niż Cm, gdzie C jest stałą,

(e) Na konturach wartość $f(z)$ jest wspólnie ograniczona: $\min\limits_{z\in C_m} |f(z)| \leqslant M$ dla dowolnego m.

Rozważając całkę $\int\limits_{C_m} \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi - z)}$ wykazać, że

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right),$$

gdzie suma szeregu jest rozumiana w tym sensie, że grupujemy w jeden wyraz składniki, odpowiadające biegunom leżącym pomiędzy C_n a C_{n+1}.
Uwaga. Najczęściej spotykane kontury spełniające powyższe warunki to okręgi lub kwadraty; poniższe zadania najłatwiej zrobić używając do oszacowań którejś z tych dwu możliwości.

5. Pokazać, że:

(a) $\frac{1}{\cos x} = 4\pi \left(\frac{1}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{3}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{5}{25\pi^2 - 4x^2} + \ldots \right)$

(b) $\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + 2x \left(\frac{1}{\pi^2 + x^2} + \frac{1}{4\pi^2 + x^2} + \frac{1}{9\pi^2 + x^2} + \ldots \right)$

(c) $\operatorname{tg} \pi z = 2z \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2 - z^2}$

(d) Dla $0 < a < 1$ zachodzi:

$$\frac{e^{az}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z \cos 2a\pi n - 4\pi n \sin 2\pi a n}{z^2 + 4n^2\pi^2}$$

(e) Dla $\alpha \neq 0$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq \pm 1, \pm 2, \ldots$ zachodzi:

$$\frac{\pi}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n\alpha + \beta} - \frac{1}{n\alpha + (\alpha - \beta)} \right)$$

(f) Dla $z \neq n\pi(\pm 1 \pm i)$ zachodzi

$$\frac{1}{\pi x^2 (\cosh x - \cos x)} =$$

$$= \frac{1}{\pi x^4} - \frac{1}{\sinh \pi} \cdot \frac{1}{\pi^4 + \frac{1}{4}x^4} + \frac{2}{\sinh 2\pi} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4 + \frac{1}{4}x^4} - \frac{3}{\sinh 3\pi} \cdot \frac{1}{(3\pi)^4 + \frac{1}{4}x^4} + \ldots$$

Wsk. Rozważyć całkę

$$\int_{C_n} \frac{2\pi z \mathrm{d}z}{(\pi^4 z^4 + \frac{1}{4}x^4) \sinh \pi z \sin \pi z}$$

gdzie $C_n = C(0, n + \frac{1}{2})$ i wziąć granicę $n \to \infty$.

2.3 Rozwinięcia na iloczyny nieskończone

6. Udowodnić twierdzenie (WW1, str. 145 – 146):
   Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną w całej $\mathbb{C}$, o zerach jednokrotnych w punktach $a_1, a_2, \dots$, przy czym $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \dots$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Wtedy $f(z)$ daje się przedstawić jako iloczyn nieskończony

$$f(z) = f(0)\exp\left(\frac{zf'(0)}{f(0)}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}\right].$$

   Uwaga. Poniższe zadania dają się zrobić przez odpowiednie skorzystanie z powyższego twierdzenia.

7. Wyprowadzić wzory:
   (a) $\sin \pi z = \pi z \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.
   (b) $\sinh \pi z = \pi z \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right)$
   (c) $\cosh z - \cos z = z^2 \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^4}{\pi^4 n^4}\right)$
   (d) $\cos \pi z = \prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n+\frac{1}{2})^2}\right)$

8. Wyrazić następujące iloczyny przez funkcje elementarne:
   (a) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z^4}{n^4}\right)$
   (b) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{z^4}{n^4}\right)$
   (c) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^6}{n^6}\right)$
   (d) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^6}{n^6}\right)$
   (e) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}+\frac{z^4}{n^4}\right)$

9. Wykazać, że:
   (a) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^4}\right) = \frac{\sinh \pi}{4\pi}$
   (b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1+\cosh \pi\sqrt{3}}{2\pi^2}$
   (c) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^6}\right) = \frac{\sinh \pi}{2\pi^3}(\cosh \pi - \cos\sqrt{3}\pi)$

   Wsk. Jest to banał, jeśli ktoś zrobił poprzednie zadanie.