Analiza zespolona, lista zadań nr 4: Funkcja Γ i okolice

17.12.2016

1 Kilka tożsamości spełnianych przez $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1}$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{2}$$

2 Iloczyny nieskończone przez funkcję Γ

Iloczyny nieskończone, występujące na poprzedniej liście, można powyliczać również przy użyciu poniższego twierdzenia z zadania 2, gdzie odpowiedź wyraża się przez funkcję Γ. Przez tę funkcję można również powyrażać inne iloczyny, co będzie treścią kolejnych zadań.

Rozważamy iloczyny nieskończone postaci:

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n,$$

gdzie u_n jest funkcją wymierną on n.

Rozkładamy u_n na czynniki i wtedy iloczyn można zapisać w postaci

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} A \frac{(n-a_1)(n-a_2)\dots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\dots(n-b_l)}.$$

Jest (chyba) ewidentne, że aby iloczyn był zbieżny, muszą zachodzić warunki: $A = 1$ oraz $k = l$.

1. Pokazać, że warunkiem koniecznym bezwzględnej zbieżności iloczynu P jest

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k - b_1 - b_2 - \dots - b_k = 0.$$

2. Pokazać, że

$$P = \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(1-b_j)}{\Gamma(1-a_j)}. \tag{3}$$

3. Pokazać, że

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} :$$

   (a) wprost,

   (b) testując wzór (3). *Wsk.* Lepiej zrobić to ogólniej, p. następne zadanie.

4. Pokazać, że

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}. \tag{4}$$

5. Przy użyciu wzoru (3) zrobić zadania 7-9 z listy 3.

6. Wykazać, że

$$(1-z)\left(1+\frac{z}{3}\right)\left(1-\frac{z}{5}\right)\cdots=\cos\frac{\pi z}{4}-\sin\frac{\pi z}{4}$$

7. Wyrazić za pomocą funkcji Γ następujące iloczyny nieskończone:

   (a) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)e^{\frac{1}{2n}}$,

   (b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)\left(1-\frac{z}{2n}\right)$

   (c) $(1-z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\ldots$
   Odp. $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\frac{z}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{z}{2})}$.

   (d) $\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{4}\right)\left(1+\frac{z}{6}\right)\ldots$. W szczególności, ile wynosi: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\ldots$?

8. Pokazać, że

$$\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{9^2-1}{9^2}\cdot\ldots=\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^4}{16\pi^2}$$