1 Szeregi nieskończone

1.1 Definicje i przykłady

Dla danego ciągu $\{a_n\}$ utwórzmy nowy ciąg $\{s_n\}$, zdefiniowany jako:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \; \dots, \; s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \tag{1}$$

Def. Jeśli wyżej zdefiniowany ciąg $\{s_n\}$ posiada granicę, to granicę tę oznaczamy symbolem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

i nazywamy *sumą szeregu nieskończonego* $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$. Mówimy w takim przypadku, że szereg jest *zbieżny*. Jeśli powyższa granica nie istnieje, to mówimy, że szereg jest *rozbieżności.*

Uwaga. Szeregi możemy więc uważać za szczególny przypadek ciągów. Mają one jednak swoją specyfikę, a przy tym są na tyle ważne, że rozważa się je na ogół odrębnie.

Przykładem takiej pewnej odrębności problemów przy rozważaniu ciągów i szeregów jest problem ich zbieżności. W przypadku ciągów (przynajmniej tych które rozważaliśmy) w większości przypadków umiemy policzyć ich granice. Inaczej jest z szeregami: Za pomocą dostępnych nam środków rzadko umiemy znaleźć wartość granicy i najczęściej rozważanym problemem jest problem zbieżności szeregu.

Def. Ciąg $\{s_n\}$ nazywamy ciągiem *sum częściowych* szeregu nieskończonego.

Przykł.

1. Szereg: $1 + 1 + 1 + \dots$ jest rozbieżny do ∞, ponieważ $s_n = n$.
2. Szereg *geometryczny* $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ jest zbieżny, gdy $|q| < 1$. Mamy bowiem:
$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
i dla $|q| < 1$ ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny, a jego granica jest
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$$
3. Szereg $1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots$ jest rozbieżny; ciąg $\{s_n\}$ jest w tym przypadku: $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ i nie posiada ani właściwej, ani niewłaściwej granicy.

Def. $n-$tą resztą szeregu $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ nazywamy szereg

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m. \tag{2}$$

Stw. Jeśli szereg $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Dow. Zauważmy, że jeśli szereg $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ jest zbieżny, to również szereg (2) jest zbieżny przy każdej wartości n. Ponieważ

$$r_n = \lim_{k\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}) = \lim_{k\to\infty} s_{n+k} - s_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - s_n,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - \sum_{m=1}^{\infty} a_m = 0.$$

CBDO

1.2 Ogólne własności szeregów związane ze zbieżnością

Niektóre własności szeregów są bezpośrednimi konsekwencjami własności ciągów. W tej Subsection wymienimy właśnie takie.

Tw. (Warunek Cauchy'ego). Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby szereg $a_1 + a_2 + \dots$ był zbieżny, jest, aby:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}} : |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \epsilon. \tag{3}$$

Dow. Widzieliśmy, że zbieżność szeregu jest równoważna zbieżności jego sum częściowych. Ponadto, przypomnijmy sobie warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu $\{s_n\}$: Mówił on, iż

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}} : |s_{k+m} - s_k| < \epsilon,$$

a że s_n jest $n-$tą sumą częściową szeregu, to otrzymujemy warunek (3).

CBDO

Tw. Jeśli szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uwaga: Innymi słowy, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to szereg $a_1 + a_2 + \dots$ nie jest zbieżny.

Dow. Mamy: $a_n = s_n - s_{n-1}$, co daje

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0,$$

ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}$.

CBDO

Uwaga: Powyższe twierdzenie nie daje się odwrócić. Istnieją bowiem szeregi $a_1+a_2+\dots$ *rozbieżne*, dla których jednak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Takim szeregiem jest *szereg harmoniczny*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Mamy bowiem:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 2^2\frac{1}{2}; \quad \dots \quad \frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

mamy więc

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} > \frac{1}{2} \Longrightarrow s_{2^n} > \frac{1}{2}n.$$

Tak więc $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$, czyli ciąg sum ćzęściowych szeregu harmonicznego jest rozbieżny, a to znaczy, że sam szereg harmoniczny też jest rozbieżny (do ∞).

Def. Szereg nazywamy *ograniczonym*, jeśli ciąg jego sum częściowych jest ograniczony (tzn. jeśli istnieje taka liczba M, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$: $s_n < M$).

Tw. Każdy szereg zbieżny jest ograniczony.

Dow. jest to inne wypowiedzenie znanego nam twierdzenia, że każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

CBDO

Mamy dwa naturalne twierdzenia dotyczące zbieżności szeregu sumy oraz iloczynu szeregu przez stałą.

Tw. Jeżeli szeregi $a_1 + a_2 + \dots$ i $b_1 + b_2 + \dots$ są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dla ustalenia uwagi weźmy sumę. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

dla różnicy dowód jest analogiczny.

CBDO

Tw. Jeżeli szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny, to dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dow. Mamy bowiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty}(ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n)$$

$$= c\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

CBDO

Wniosek. W szczególności

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1.3 Szeregi naprzemienne-twierdzenie Leibniza; twierdzenie Abela

Def. *Szeregiem naprzemiennym* nazywamy szereg postaci

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \quad \text{gdzie } a_n \geqslant 0. \tag{4}$$

Tw. (Leibniza). zwane też częściej *kryterium Leibniza* Szereg naprzemienny (4), spełniający warunki

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \dots \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{5}$$

jest zbieżny. Ponadto sumy częściowe tego szeregu: $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_n$ oraz suma szeregu spełniają nierówności

$$s_{2n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \leqslant s_{2n+1}. \tag{6}$$

Dow. Ciąg sum częściowych o wskaźnikach *parzystych* jest *niemalejący*. Mamy bowiem

$$s_{2m+2} = s_{2m} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}), \quad \text{a z założenia } \ a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant 0.$$

Jest to jednocześnie ciąg *ograniczony*, ponieważ

$$s_{2n} = a_1 - ((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots) \leqslant a_1.$$

Skoro tak, to ciąg $\{s_{2n}\}$ jest zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez g: $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = g$. Zauważmy, że udowodnimy zbieżność szeregu (5) dowodząc, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = g$.

Mamy: $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, co daje

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = g,$$

bo $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ na mocy założenia.

Wreszcie, nierówności (6) wynikają z faktów, że ciąg $\{s_{2n}\}$ jest rosnący (więc jego granica jest większa lub równa dowolnemu z wyrazów ciągu), zaś ciąg $\{s_{2n+1}\}$ jest malejący (więc $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} \geqslant s_{2k+1}$ dla dowolnego k).

Przykł. Szereg anharmoniczny:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{7}$$

jest zbieżny. Pokażemy później, że sumą tego szeregu jest $\ln 2$.

i interpretacja elektrostatyczna.

Tw. (Abela).zwane też częściej *kryterium Abela* Jeśli ciąg $\{a_n\}$ dąży monotonicznie do zera, zaś szereg sum częściowych ciągu $\{b_n\}$: $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ jest ograniczony, to szereg

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots \tag{8}$$

jest zbieżny.

Dow. Oznaczmy przez $\{s_n\}$ ciąg sum częściowych szeregu $b_1 + b_2 + \dots$: $s_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Na mocy założenia, istnieje takie M, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|s_n| < M$.

Aby dowieść, że szereg (8) jest zbieżny, oszacujmy sumę

$$a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \dots + a_n b_n \tag{9}$$

dla $n > k$. Zauważmy najsampierw, iż

$$-2M < b_m + b_{m+1} + \dots + b_n < 2M \tag{10}$$

dla każdego m i $n \geqslant m$, ponieważ

$$|b_m + b_{m+1} + \dots + b_n| = |s_n - s_{m-1}| \leqslant |s_n| + |s_{m-1}| \leqslant 2M.$$

Wyrażenie (9) przepiszmy teraz tak:

$$a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \dots + a_n b_n =$$

$$(a_k - a_{k+1}) b_k + (a_{k+1} - a_{k+2})(b_k + b_{k+1}) +$$

$$+ (a_{k+2} - a_{k+3})(b_k + b_{k+1} + b_{k+2}) + \dots + +(a_n)(b_k + b_{k+1} + \dots + b_n) \leqslant$$

$$\leqslant 2M((a_k - a_{k+1}) + (a_{k+1} - a_{k+2}) + \dots + a_n) = 2Ma_k \tag{11}$$

na mocy (10).

Analogicznie mamy $a_k b_k + a_{k+1}b_{k+1} + \dots + a_n b_n \geqslant -2Ma_k$, a stąd

$$|a_k b_k + a_{k+1}b_{k+1} + \dots + a_n b_n| \leqslant 2Ma_k. \tag{12}$$

Weźmy teraz jakieś $\epsilon > 0$. Zakładamy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do zera; znaczy to, że istnieje takie k, że $a_k < \frac{\epsilon}{2M}$. Wyżej udowodniliśmy (12), co przepiszemy jako $|a_k b_k + a_{k+1}b_{k+1} + \dots + a_n b_n| < \epsilon$. Zgodnie z warunkiem Cauchy'ego zbieżności ciągu (jeżeli $|a_n - a_m| < \epsilon$ dla n, m dostatecznie dużych, to ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny), szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

CBDO

Uwaga. Z wzoru (12) mamy oszacowanie na sumę szeregu:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leqslant 2Ma_1; \tag{13}$$

jest tak, ponieważ na mocy wzoru (12) nierówność $|a_1 b_1 + a_{k+1}b_{k+1} + \dots + a_n b_n| \leqslant 2Ma_1$ zachodzi dla każdego n.

Uwaga 2. Kryterium Leibniza jest szczególnym przypadkiem kryterium Abela: W tym ostatnim trzeba za ciąg $\{b_n\}$ wziąć $b_n = (-1)^n$.

1.4 Szeregi o wyrazach dodatnich. Kryteria zbieżności d'Alemberta i Cauchy'ego

Przy założeniu, że wszystkie składniki szeregu $a_1 + a_2 + \dots$ są dodatnie, ciąg jego sum częściowych jest rosnący. Wynika stąd natychmiast stwierdzenie:

Stw. Szereg o wyrazach dodatnich jest albo zbieżny, albo rozbieżny do ∞.

CBDO

Tw. (kryterium porównawcze)[1]

(Z) Jeśli dla wszystkich n zachodzi $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ i jeśli szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg $b_1 + b_2 + \dots$. Przy tym zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(R) Jeżeli natomiast szereg $b_1 + b_2 + \dots$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest też szereg $a_1 + a_2 + \dots$.

Dow. (Z) Oznaczmy sumy częściowe szeregów $a_1 + a_2 + \dots$ i $b_1 + b_2 + \dots$ jako s_n i t_n:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Mamy oczywiście $t_n \leqslant s_n$.

Mamy też: (przypomnijmy sobie odpowiednie twierdzenia o granicach ciągów monotonicznych)

$$s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{więc} \quad t_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

[1] Można je wyrażać w różnych wersjach; tu jest jedna z nich

Z nierówności tej wnioskujemy, że ciąg sum częściowych szeregu $b_1+b_2+\dots$ jest ograniczony, a więc szereg $b_1+b_2+\dots$ jest zbieżny. Z drugiej strony, wynika stąd nierówność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (pamiętamy, że dla ciągów było: Jeżeli dla ciągu $\{x_n\}$ każdego n zachodzi: $x_n \leqslant C$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant C$).

(R) Ciąg sum częściowych szeregu $b_1+b_2+\dots$ jest monotoniczny i nieograniczony, i – z uwagi na nierówność $b_n \leqslant a_n$ – taki jest też ciąg sum częściowych szeregu $a_1+a_2+\dots$; wobec tego szereg $a_1+a_2+\dots$ jest rozbieżny do ∞.

CBDO

Kryterium powyższe jest ogólne i sukces w jego stosowaniu do jakiegoś szeregu $b_1 + b_2 + \dots$ zależy od tego, czy znajdziemy taki szereg zbieżny $a_1 + a_2 + \dots$, który szacuje od góry $b_1 + b_2 + \dots$.

Przykł. Pokażemy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{14}$$

Uczynimy to przez porównanie go z szeregiem:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots; \tag{15}$$

mamy:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

czyli granica sum częściowych s_n szeregu (15) jest: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Na mocy kryterium porównawczego, szereg (14) jest zbieżny[2].

Biorąc do porównywania w kryterium porównawczym szereg geometryczny, otrzymujemy następujące dwa kryteria.

Tw. (kryterium d'Alemberta). Szereg $a_1+a_2+\dots$ o wyrazach dodatnich, spełniający warunek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \tag{16}$$

jest zbieżny.

Dow. Weźmy h takie, aby były spełniona nierówności: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < h < 1$. Istnieje więc k takie, że dla $n \geqslant k$ mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < h$, czyli $a_{n+1} < a_n h$. Tak więc szereg $a_k + a_{k+1} + \dots$ ma składniki odpowiednio nie większe od składników szeregu geometrycznego $a_k + a_k h + a_k h^2 + \dots$. Ten szereg geometryczny jest zbieżny, bo $0 < h < 1$. Z kryterium porównawczego jest więc zbieżny szereg $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, a co za tym idzie – i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

CBDO

Tw. (kryterium Cauchy'ego). Szereg $a_1+a_2+\dots$ o wyrazach dodatnich, spełniający warunek

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \tag{17}$$

jest zbieżny.

Dow. Podobnie jak w kryterium d'Alemberta, istnieje takie h i takie k, że dla $n \geqslant k$ zachodzi $\sqrt[n]{a_n} < h$, a to jest równoważne nierówności $a_n < h^n$. Porównując teraz szereg

[2]Zobaczymy później, że suma szeregu (14) jest równa $\frac{\pi^2}{6}$

$a_k + a_{k+1} + \ldots$ z szeregiem geometrycznym $h^k + h^{k+1} + \ldots$, widzimy, że jeżeli szereg geometryczny jest zbieżny (tzn. $h < 1$), to zbieżny jest również szereg $a_1 + a_2 + \ldots$.

Ustaliliśmy więc pewne kryteria zbieżności. Daje się też znaleźć kryteria *rozbieżności.*

Tw. (Kryteria rozbieżności). Jeśli dla szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$ o składnikach dodatnich zachodzi jedna z nierówności

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1, \tag{18}$$

to szereg jest rozbieżny.

Dow. Jeśli ma miejsce pierwsza z nierówności (18), to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{co daje} \quad a_{n+1} > a_n,$$

a to znaczy, że ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0, czyli nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu – tak więc szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest *rozbieżny.*

Jeśli natomiast spełniona jest druga z nierówności (18), to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\sqrt[n]{a_n} > 1; \quad \text{co daje} \quad a_{n+1} > 1,$$

i znowu ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0.

CBDO

Przykł. Szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{19}$$

dla $x \geqslant 0$ jest zbieżny.

Dow. Mamy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Z kryterium d'Alemberta wynika, że szereg (19) jest zbieżny.

Przykł. Kryterium d'Alemberta *nie rozstrzyga* o zbieżności szeregu harmonicznego ani szeregu (14).

W takich przypadkach trzeba stosować inne, bardziej subtelne kryteria (Kummera, Raabego), o których zainteresowany Czytelnik może przeczytać w książkach podanych w literaturze. Tu sformułujemy jeszcze jedno, dość uniwersalne

Tw. (kryterium "zagęszczeniowe" Cauchy'ego). Rozważmy szereg $S = a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, gdzie ciąg $\{a_n\}$ dąży do zera monotonicznie. Utwórzmy szereg "zagęszczony": $Z = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Wtedy jeśli szereg Z jest zbieżny, to szereg S też jest zbieżny; i jeśli szereg Z jest rozbieżny, to szereg S też jest rozbieżny.

Dow. *Zbieżność*: Mamy następujące oszacowanie z góry na szereg S:

$$\begin{aligned} S &= a_1 \\ &+ a_2 + a_3 \\ &+ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\ &+ a_8 + a_9 + \dots + a_{15} + \dots \\ &\leqslant a_1 \\ &+ 2 \cdot a_2 \\ &+ 4 \cdot a_4 \\ &+ 8 \cdot a_8 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = Z; \end{aligned}$$

jeśli więc zbieżny jest szereg zagęszczony Z, to – wziąwszy pod uwagę kryterium porównawcze – jest zbieżny też szereg wyjściowy S.

Rozbieżność: Mamy też następujące oszacowanie *z dołu* na szereg S:

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 \\ &+ a_3 + a_4 \\ &+ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &+ a_9 + \dots + a_{15} + \dots \\ &\geqslant a_1 + a_2 \\ &+ 2 \cdot a_4 \\ &+ 4 \cdot a_8 \\ &+ 8 \cdot a_{16} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots) \geqslant \frac{1}{2} Z, \end{aligned}$$

zatem – z kryterium porównawczego – jeśli rozbieżny jest szereg zagęszczony Z, to rozbieżny jest też wyjściowy szereg S.

CBDO

Przykł. Rozważmy zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{20}$$

gdzie $\alpha > 0$ (dla $\alpha \leqslant 0$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu).

Rozważmy szereg "zagęszczony":

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{(1-\alpha)}\right)^k$$

W ostatniej sumie rozpoznajemy szereg *geometryczny*. Oznaczając: $q = 2^{(1-\alpha)}$ widzimy, że będzie on zbieżny, jeśli $q < 1$, co ma miejsce wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Tak więc: szereg (20) jest zbieżny dla $\alpha > 1$, a rozbieżny dla $\alpha \leqslant 1$.

1.5 Szeregi bezwzględnie zbieżne

Def. Szereg $a_1+a_2+\dots$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, jeśli szereg $|a_1|+|a_2|+\dots$ jest zbieżny. Szereg, który jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, nazywamy *warunkowo zbieżnym.*

Tw. Jeśli szereg $a_1+a_2+\dots$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest też zbieżny w zwykłym sensie. Ponadto

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{21}$$

Dow. Zgodnie z warunkiem Cauchy'ego zbieżności szeregów, musimy oszacować sumę: $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$ i pokazać, że dla dostatecznie dużych k i dowolnych n $(n > k)$ suma ta jest dowolnie mała. Mamy:

$$|a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n| \leqslant |a_k| + |a_{k+1}| + \cdots + |a_n| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|.$$

Ostatnia suma powyżej, jako reszta r_{k-1} szeregu zbieżnego, dąży do 0, gdy k dąży do ∞. Innymi słowy, dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie k, że $r_{k-1} < \epsilon$, skąd $|a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n| < \epsilon$ dla każdego $n > k$.

W ten sposób pokazaliśmy zbieżność szeregu $a_1 + a_2 + \dots$. Ponadto, oznaczając: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ oraz $t_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ mamy: $|s_n| \leqslant t_n$, skąd, po przejściu do granicy, wynika

$$|\lim_{n\to\infty} s_n| = \lim_{n\to\infty} |s_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} t_n,$$

a to jest dokładnie wzór (21).

CBDO

Przykł. Szereg geometryczny $1 + q + q^2 + \dots$, gdzie $|q| < 1$, jest zbieżny bezwzględnie, ponieważ jest zbieżny szereg $1 + |q| + |q|^2 + \dots$.

Przykł. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego x. Jak się niedługo okaże, jego suma jest równa e^x.

Przykł. Szereg anharmoniczny jest zbieżny *warunkowo*, ponieważ szereg wartości bezwzględnych jego składników to szereg *harmoniczny*, który jest rozbieżny.

1.6 (Pozorne) paradoksy z szeregami nieskończonymi

Przyjrzymy się teraz zagadnieniu *przemienności* szeregów nieskończonych. Wiemy, że dodawanie jest *przemienne*, tzn. $a + b = b + a$, co implikuje, że suma *skończonej* ilości składników jest przemienna, tzn. nie zależy od kolejności składników. Okazuje się, że analogiczna własność ma też miejsce dla szeregów bezwzględnie zbieżnych, natomiast na ogół *nie zachodzi* dla szeregów zbieżnych warunkowo. Będziemy to pokazywać, ale najsampierw sprecyzujemy, co rozumiemy przez zmianę kolejności składników, gdy ilość tych składników jest nieskończona.

Def. Przez *permutację* ciągu liczb naturalnych rozumiemy ciąg liczb naturalnych $\{m_n\}$ $= m_1, m_2, \dots$ taki, że każda liczba naturalna występuje w ciągu $\{m_n\}$ dokładnie raz. Jeśli $m_1, m_2, \dots$ jest permutacją ciągu liczb naturalnych, to mówimy, że szereg $a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_n} + \dots$ powstał z szeregu $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ przez zmianę porządku jego składników.

Tw. Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest przemienny. Inaczej mówiąc, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny i jeśli $m_1, m_2, \ldots$ jest permutacją ciągu liczb naturalnych, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{22}$$

Dow. Niech $\epsilon > 0$. Ze zbieżności szeregu $|a_1| + |a_2| + \ldots$ wynika, że istnieje takie k, że

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i| < \epsilon. \tag{23}$$

Ponieważ ciąg $\{m_n\}$ zawiera wszystkie liczby naturalne, więc istnieje takie r, że wśród liczb $m_1, m_2, \ldots, m_r$ występują liczby $1, 2, 3, \ldots,$ aż do k. Ponieważ zaś każda liczba naturalna występuje dokładnie raz w ciągu $\{m_n\}$, to dla każdego $n > r$ mamy $m_n > k$. Jeśli więc przy danym $n > r$ ze zbioru $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots, m_n$ skreślimy liczby $1, 2, \ldots, k$, to pozostaną w nim wyłącznie liczby większe od k (przy tym wszystkie różne). Tak więc, oznaczając

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad t_n = a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_n}$$

i skreślając w różnicy $t_n - s_n$ składniki o równych wskaźnikach, otrzymamy w różnicy $t_n - s_n$ jedynie składniki o wskaźnikach większych od k. Wynika stąd, że

$$|t_n - s_n| \leqslant 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i|,$$

skąd mamy:

$$|t_n - s_n| < 2\epsilon.$$

na mocy (23). Ponieważ ta ostatnia nierówność zachodzi dla każdego $n > r$, to zachodzi: $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, a to oznacza, że spełniona jest teza twierdzenia, tzn. (22).

CBDO

Uwaga. Powyższe twierdzenie *nie jest* prawdziwe dla dowolnego szeregu zbieżnego. Jako przykład, weźmy szereg anharmoniczny i oznaczając jego sumę przez c (niedługo okaże się, że $c = \ln 2$), przestawmy jego składniki w następujący sposób:

$$c = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots;$$

policzmy $c + \frac{1}{2}c$:

$$c + \frac{1}{2}c = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

w czym rozpoznajemy sumę szeregu anharmonicznego *po przestawieniu składników*. Tak więc przez przestawienie składników uzyskaliśmy szereg zbieżny *do innej wartości*. Okazuje się, że ma miejsce nawet bardziej (pozornie) paradoksalna sytuacja:

Tw. (Riemanna): Mając dany szereg zbieżny warunkowo, można przez zmianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do dowolnej, z góry zadanej granicy (skończonej lub nieskończonej).

Bez dowodu. (Dla ciekawych, jest np. w skrypcie P. Urbańskiego, "Analiza", t. 1).

Zagadka. Widzieliśmy, że energia elektrostatyczna kryształu jednowymiarowego jest równa sumie szeregu anharmonicznego. Czy to znaczy, że ta energia może być *dowolna*, jeśli przez zmianę kolejności sumowania można uzyskać dowolną wartość? Może więc energia elektrostatyczna jest źle określoną wielkością?

1.7 Mnożenie szeregów

Wiemy, że jeśli pomnożymy dwie skończone sumy, to znów otrzymamy jakąś sumę. Przy szeregach nieskończonych pojawiają się pytania o zbieżność. Poniższe twierdzenie pokazuje, że dla szeregów bezwzględnie zbieżnych szeregi dadzą się pomnożyć, i szereg w wyniku powstały ma taką postać, jakiej oczekujemy.

Tw. (Cauchy'ego). Przy założeniu, że szeregi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne, zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{24}$$

gdzie

$$c_1 = a_1 b_1,$$

$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1,$$

$$\dots,$$

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b^{n+1-k}.$$

Dow. Oznaczmy

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n, \quad u_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n,$$

czyli

$$u_n = a_1 t_n + a_2 t_{n-1} + a_3 t_{n-2} + \dots + a_n t_1.$$

Będziemy szacować różnicę

$$s_n t_n - u_n = a_1 t_n + a_2 t_n + \dots + a_n t_n - u_n =$$

$$= a_2(t_n - t_{n-1}) + a_3(t_n - t_{n-2}) + \dots + a_n(t_n - t_1). \tag{25}$$

Ponieważ szeregi: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ są zbieżne, a więc ograniczone, to istnieje taka liczba M, że dla każdego j zachodzi:

$$|t_j| < M \text{ oraz } |a_1| + |a_2| + \dots + |a_j| < M. \tag{26}$$

Warunek zbieżności szeregu $b_1 + b_2 + \dots$ oznacza dokładnie tyle, co warunek zbieżności ciągu $\{t_n\}$; zapiszmy warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu $\{t_n\}$: Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje takie k, że jeśli $n > m > k$, to zachodzi

$$|t_n - t_m| < \epsilon \tag{27}$$

Podobnie dla szeregu $|a_1| + |a_2| + \dots$ mamy

$$|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + \dots + |a_n| < \epsilon. \tag{28}$$

W dalsym ciągu weźmy $n > 2k$. Na mocy (25) mamy

$$|s_n t_n - u_n| \leqslant (|a_2||t_n - t_{n-1}| + \dots + |a_k||t_n - t_{n-k+1}|)+$$

$$+(|a_{k+1}||t_n - t_{n-k}| + \dots + |a_n||t_n - t_1|).$$

Oszacujmy teraz pierwszy nawias wykorzystując (27), a drugi – wykorzystując (26), pamiętając zarazem, że $n-k+1>k$ oraz $|t_n-t_j|\leqslant|t_n|+|t_j|<2M$:

$$|s_nt_n-u_n|\leqslant(|a_2|+\dots+|a_k|)\epsilon+(|a_{k+1}|+\dots+|a_n|)\cdot 2M<M\epsilon+\epsilon\cdot 2M,$$

Tym samym pokazaliśmy, że nierówność: $|s_nt_n-u_n|<3M\epsilon$ zachodzi dla każdego $n>2k$. Znaczy to, że $\lim\limits_{n\to\infty}(s_nt_n-u_n)=0$. Ponieważ zaś ciągi: $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ są zbieżne, więc $\lim\limits_{n\to\infty}s_nt_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n\lim\limits_{n\to\infty}t_n$, a to znaczy, że $\lim\limits_{n\to\infty}s_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_nt_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, czyli zachodzi wzór (24).

CBDO

Przykł. Pokażemy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} \tag{29}$$

Mamy bowiem:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1\cdot\frac{y^n}{n!}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\cdot 1\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(y^n+\frac{n}{1!}xy^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2}+\dots+x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

(przy ostatniej równości wykorzystaliśmy wzór dwumienny Newtona).

Uwaga. Twierdzenie o mnożeniu szeregów jest prawdziwe też przy słabszym założeniu, a mianowicie, że jeden z szeregów (tu: $a_1+a_2+\dots$) jest bezwzględnie zbieżny, a drugi(tu: $b_1+b_2+\dots$) jest zbieżny, ale niekoniecznie bezwzględnie. W dowodzie wykorzystywaliśmy bowiem tylko bezwzględną zbieżność szeregu $a_1+a_2+\dots$.

Jeśli natomiast oba szeregi są warunkowo zbieżne, to szereg $c_1+c_2+\dots$ może być rozbieżny.

Przykł. Weźmy

$$a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};$$

szeregi $a_1+a_2+\dots$ i $b_1+b_2+\dots$ są wówczas zbieżne (z jakiego kryterium?), zaś szereg $c_1+c_2+\dots$ jest rozbieżny.

2 Szeregi potęgowe

Def. *Szeregiem potęgowym* nazywamy szereg

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{30}$$

Wyrażenia bardzo podobne pojawiały się przy omawianiu wzoru Taylora; tyle że tam suma była *skończona* i na końcu figurowała tam reszta. Ale jeśli resztę można uczynić dowolnie małą, to otrzyma się wyrażenie dokładnie takie, jak (30).

Żeby to dokładniej zobaczyć, przypomnijmy sobie wzór Taylora:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n, \tag{31}$$

Dla ustalenia uwagi weźmy $a = 0$ oraz oznaczmy $x = b$ Wtedy widać, że jeśli zachodzi $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, to funkcja $f(x)$ daje się rozwinąć w szereg potęgowy:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n \tag{32}$$

Podamy teraz proste kryterium, kiedy funkcję można rozwinąć w szereg (32).

Stw. Załóżmy, że *wszystkie* pochodne $f^{(n)}$ są ograniczone w przedziale $[0, x]$, tzn. istnieje taka liczba M, że nierówność $|f^{(n)}(\theta x)| < M$ zachodzi dla każdego n i dla każdego $\theta \in]0, 1[$. Wtedy $f(x)$ ma rozwinięcie (32) w szereg potęgowy.

Dow. Mamy:

$$|R_n| = \left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)\right| \leqslant \left|\frac{x^n}{n!}\right| M,$$

a ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \quad \text{więc też } \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

CBDO

Def. *Przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego nazywamy zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg (30) jest zbieżny.

2.1 Rozwinięcia w szereg różnych funkcji

2.1.1 Funkcja wykładnicza

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Mamy bowiem: $f^{(n)}(x) = e^x$, a stąd $f^{(n)}(0) = 1$. Oszacowanie reszty: Zauważmy, że w przedziale $[0, x]$ pochodne wszystkich rzędów są wspólnie ograniczone; jeśli bowiem $0 \leqslant x$, to $f^{(n)}(\theta x) \leqslant e^x$, zaś gdy $x < 0$, to $f^{(n)}(\theta x) < 1$. Szereg powyższy jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

2.1.2 Funkcje trygonometryczne

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Bowiem mamy: $f^{(n)}(0) = \sin 0$ dla n parzystych, oraz $f'(0) = 1$, $f'''(0) = -1$, $f^{(5)}(0) = +1$ itd. Oszacowanie reszty: Pochodne wszystkich rzędów funkcji $\sin x$ są wspólnie ograniczone dla dowolnego x przez 1.

Podobnie pokazujemy, że

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Rozwinięcia w szereg funkcji sin i cos są zbieżne dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

2.1.3 (uogólniony) dwumian Newtona dla dowolnych wykładników rzeczywistych (nie naturalnych)

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n \quad \text{dla } |x|<1. \tag{33}$$

Z uwagi na nieco odmienne techniki oszacowań, rozważymy oddzielnie przypadki $x>0$ i $x<0$.

1. Przypadek $x>0$. Dla $f(x)=(1+x)^a$, $n-$ta pochodna jest

   $$f^{(n)}(x)=a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

   co daje wyrażenie na resztę w postaci Lagrange'a

   $$R_n(x)=\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n(1+\theta_n x)^{a-n}.$$

   Mamy:

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n=0 \quad \text{dla } |x|<1$$

   Gdyby ktoś zapomniał, jak takie granice się liczy, to weźmy iloraz $(n+1)-$wszego i $n-$tego wyrazu ciągu $a_n=\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n$. Mamy:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a-n+1}{(n+1)}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   czyli wyrazy ciągu $\{a_n\}$ są – co najmniej od pewnego miejsca – mniejsze od wyrazów ciągu geometrycznego o $q<1$; za q można wziąć jakąś liczbę większą od x a mniejszą od 1. A to znaczy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do zera.

   Aby więc dowieść, że $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, wystarczy pokazać, że przy danym x ciąg $(1+\theta_n x)^{a-n}$ jest ograniczony dla dowolnego n. Ponieważ $x>0$, to zachodzi nierówność: $1<1+\theta_n x<1+x$, z czego wynika

   $$1\leqslant(1+\theta_n x)^a\leqslant(1+x)^a \text{ dla } a\geqslant 0, \quad \text{lub} \quad (1+x)^a\leqslant(1+\theta_n x)^a\leqslant 1 \text{ dla } a\leqslant 0.$$

   Zachodzi też nierówność $(1+\theta_n x)^{-n}<1$. Ostatecznie widzimy, że ciąg $(1+\theta_n x)^{a-n}$ jest ograniczony.

2. Przypadek $x<0$. Zapisując resztę w postaci Cauchy'ego, mamy

   $$R_n(x)=\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n(1-\theta'_n)^{n-1}(1+\theta'_n x)^{a-n}.$$

   Mamy, podobnie jak poprzednio

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^{n-1}=0 \quad \text{dla } |x|<1$$

   Pokażmy – też podobnie jak poporzednio – że ciąg $(1-\theta'_n)^{n-1}(1+\theta'_n x)^{a-n}$ jest ograniczony. Pokażemy równoważnie, że ciągi:

   $$\left(\frac{1-\theta'_n}{1+\theta'_n x}\right)^{n-1} \quad \text{oraz} \quad (1+\theta'_n x)^{a-1} \tag{34}$$

są ograniczone. Podstawmy: $y = -x$. Mamy: $y > 0$ oraz $\theta'_n > \theta'_n y$, zatem $1 - \theta'_n < 1 - \theta'_n y < 1$. Tak więc

$$\left(\frac{1-\theta'_n}{1-\theta'_n y}\right)^{n-1} < 1.$$

Mamy też: $1 - y < 1 - \theta'_n y < 1$, zatem

$$(1-y)^{a-1} \leqslant (1-\theta'_n y)^{a-1} \leqslant 1 \text{ dla } a-1 \geqslant 0, \quad \text{lub} \quad 1 \leqslant (1-\theta'_n y)^{a-1} \leqslant (1-y)^{a-1} \text{ dla } a-1 \leqslant 0$$

Obydwa ciągi (34) są więc ograniczone. Znaczy to, że $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Rozwinięcia dla kilku wartości a

- $a = -1$. Otrzymujemy znany nam wzór

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \tag{35}$$

  a za chwilę się nam przyda

-

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \tag{36}$$

- $a = \frac{1}{2}$. Mamy:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots$$

- $a = -\frac{1}{2}$. Mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots$$

- Stąd od razu wynika:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots \tag{37}$$

Zastosowanie ostatniego wzoru. Energia kinetyczna w ruchu relatywistycznym jest

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

gdzie m_0 jest masą spoczynkową cząstki, v – prędkość, c – prędkość światła. Gdy v jest znacznie mniejsze od c, to można powyższe wyrażenie rozwinąć w szereg Taylora w potęgach $\frac{v}{c}$ i pierwszych kilka wyrazów będzie dobrym przybliżeniem ogólnego wzoru. Mamy:

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^2}{c^2}m_0 v^2 + \ldots;$$

pierwszy wyraz to energia odpowiadająca masie spoczynkowej; drugi – to zwykła (nierelatywistyczna) energia kinetyczna; i trzeci – to pierwsza poprawka relatywistyczna (znacząca np. w przypadku widm elektronowych cięższych atomów).

2.2 Różniczkowanie szeregów potęgowych

Tw. Jeżeli: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, to dla każdego x leżącego *wewnątrz* przedziału zbieżności zachodzi

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots,$$

przy czym przedziały zbieżności szeregów dla f i f' są takie same.

Dow. Bez dowodu.

CBDO

Uwaga. Innymi słowy, szeregi potęgowe można (wewnątrz przedziału zbieżności) różniczkować wyraz za wyrazem.

Wykorzystując to twierdzenie, wypiszemy rozwinięcia w szereg kilku dalszych funkcji.

- Rozważmy szereg:

$$F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}; \tag{38}$$

Zróżniczkujmy ten szereg wyraz za wyrazem; w myśl powyższego twierdzenia,otrzymany szereg to będzie rozwinięcie w szereg pochodnej $F'(x)$. Widać, że pochodną szeregu (38 jest szereg (35), który definiuje funkcję $\frac{1}{1+x}$. Jaka funkcja $F(x)$ spełnia: $F'(x) = \frac{1}{1+x}$? Odpowiedź jest łatwa: Jest to funkcja: $\ln(1+x) + C$. Musi zachodzić: $F(0) = 0 = \ln 1 + C$, co daje $C = 0$. Mamy zatem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \tag{39}$$

- Teraz rozważmy:

$$G(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots; \tag{40}$$

widać, że jego pochodna to szereg (36). Argumentując jak w poprzednim przykładzie, widzimy, że $G(x) = \mathrm{arctg}(x)$, czyli rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\mathrm{arctg}(x)$ dane jest wzorem (40). Przedział zbieżności tego szeregu to $]-1, 1]$.

- Wreszcie, biorąc szereg:

$$H(x) == x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \ldots \tag{41}$$

widzimy, że pochodna tego szeregu to funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, zatem wzór (41) określa rozwinięcie w szereg funkcji $\arcsin(x)$.