Matematyka II, lista zadań No. 4: Wektory i odwz. liniowe

08.03.2012

1. Wykazać liniową niezależność układów funkcji (określonych na $\mathbb{R}$):

   (a) ■ $1, \sin x, \cos x$;

   (b) ■ $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$;

   (c) ■ $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$;

   (d) ■ $1, \sin x, \sin^2 x, \dots, \sin^n x$;

   (e) $1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos n^x$.

   Wsk. Dopuszczalne są narzędzia z analizy.

2. Czy są liniowo niezależne układy funkcji:

   (a) ■ $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x$;

   (b) $1, \sinh x, \cosh x, \sinh^2 x, \cosh^2 x$?

3. ■ Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami odpowiednich przestrzeni wektorowych:

   (a) Wektory płaszczyzny o początku w punkcie 0, których końce leżą na danej prostej;

   (b) Wektory płaszczyzny o początku w punkcie 0, których końce *nie* leżą na danej prostej;

   (c) Wektory płaszczyzny, których końce leżą w pierwszej ćwiartce;

   (d) Wielomiany, spełniające warunek: $w(1) = 1$ (traktowane jako podzbiór $\mathbb{R}_n[\cdot]$;

   (e) Wielomiany, spełniające warunek: $w(1) = 0$ (traktowane jako podzbiór $\mathbb{R}_n[\cdot]$.

4. Wykazać, że następujące zbiory wektorów z $\mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami. Znaleźć jakąś z ich baz oraz wymiar:

   (a) ■ Wektory, których pierwsza i ostatnia współrzędna są równe;

   (b) ■ Wektory, których współrzędne o parzystych indeksach są równe zeru;

   (c) Wektory, których współrzędne o parzystych indeksach są równe;

   (d) Wektory, których współrzędne o parzystych i nieparzystych indeksach są równe;

   (e) ■ Wektory, których składowe spełniają jednorodny układ równań. (Tu bazy i wymiaru nie wyznaczać).

5. ■ Niech $\mathbb{R}_n^n$ będzie przestrzenią wektorową macierzy rzeczywistych (dodawanie macierzy oraz ich mnożenie przez liczbę określamy w sposób naturalny). Wyjaśnić, które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami $\mathbb{R}_n^n$. W przypadku, gdy zbiór jest podprzestrzenią, znaleźć bazę i wymiar.

   (a) Macierze symetryczne;

   (b) Macierze antysymetryczne;

(c) Macierze nieosobliwe (jeśli za trudne to ograniczyć się do $n = 2$);

(d) Macierze osobliwe (j.w.);

(e) Macierze o śladzie równym zeru.

6. Wyznaczyć bazę i wymiar powłoki liniowej następującego układu wektorów:

(a) ■ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

(b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

7. Przydałoby się jakieś zadanko na *sumę prostą*...

8. oraz na *przecięcie podprzestrzeni wektorowych*... ale program 'zadaniowy' zrobiłby się zbyt przeładowany. Dla chętnych jest to więc materiał nadobowiązkowy; zadania na ten temat mogą znaleźć np. w zbiorku pod red. Kostrikina, 'Zbiór zadań z algebry', część II, rozdz. 1.2.

9. Które z następujących odwzorowań, w odpowiednich przestrzeniach wektorowych, są odwzorowaniami liniowymi:

(a)

10. Wyznaczyć macierze:

11. ■ Niech odwzorowanie liniowe $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie reprezentowane przez macierz

$$[A]^f{}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(tzn. w bazach $e = (e_1, e_2, e_3)$ w $\mathbb{R}^3$ i $f = (f_1, f_2)$ w $\mathbb{R}^2$). Znaleźć macierz tegoż odwzorowania $[A]^F{}_E$w bazach $E_1 = e_1$, $E_2 = e_1 + e_2$, $E_3 = e_1 + e_2 + e_3$ oraz $F_1 = f_1, F_2 = f_1 + f_2$.

12. ■ Niech operator liniowy T w przestrzeni $\mathbb{R}_2[\cdot]$ będzie reprezentowany macierzą:

$$[T]^e{}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

w bazie standardowej $e_0 = 1, e_1 = x, e_2 = x^2$. Znaleźć jego macierz $[T]^E{}_E$ względem bazy: $E_0 = 3x^2 + 2x + 1, E_1 = x^2 + 3x + 2, E_2 = 2x^2 + x + 3$.