1 Całka Riemanna

1.1 Podział odcinka. Suma górna i dolna. Całka górna i dolna

Niech f będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$ o wartościach rzeczywistych.

Niech π będzie (skończonym, $n+1$-elementowym) ciągiem:

$$\pi = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1}$$

gdzie: $x_0 = a$, $x_n = b$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Ciąg π nazywamy *podziałem* odcinka $[a, b]$. Niech

$$\bar{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}). \tag{2}$$

Def. Tak zdefiniowaną wielkość $\bar{S}(f, \pi)$ nazywamy *sumą górną* z funkcji f względem podziału π. **RYS. 1**

Def. *Całką górną* z funkcji f nazywamy infimum z $\bar{S}(f, \pi)$ po wszystkich możliwych podziałach:

$$\overline{\int_{[a,b]}} f = \inf_{\pi} \bar{S}(f, \pi)$$

Analogicznie, *sumą dolną* z funkcji f względem podziału π nazywamy wielkość

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}), \tag{3}$$

oraz *całką dolną* z funkcji f nazywamy

$$\underline{\int_{[a,b]}} f = \sup_{\pi} \underline{S}(f, \pi)$$

Łatwo stwierdzić, że oba te kresy (czyli całki: górna i dolna) istnieją. Bowiem dowolna suma górna jest ograniczona z dołu przez $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b-a)$, a z góry przez $\sup_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b-a)$. **RYS. 2**. Również dowolna suma dolna jest zawarta między tymi dwoma liczbami. Innymi słowy: Zbiór wartości wszystkich sum górnych jest ograniczony. Skoro tak, to istnieje kres dolny tego zbioru – czyli całka górna istnieje. Analogicznie jest z całką dolną.

Mając dany podział π, zdefiniujmy *średnicę podziału* δ_π:

Def. *Średnicą podziału* π nazywamy liczbę δ_π określoną jako

$$\delta_\pi = \max_i (x_i - x_{i-1}); \tag{4}$$

wyrażając słowami, jest to długość najdłuższego odcinka podziału.

Pomocniczo oznaczajmy jeszcze n_π jako liczbę odcinków wchodzących do podziału π.

1.2 Równoważna definicja całki jako granicy ciągu

Wprowadzone wyżej dwie wielkości: Całka górna i dolna są dobrze zdefiniowane, natomiast mają tę nieprzyjemną własność, że obliczyć je z definicji jest bardzo trudno (z wyjątkiem najprostszych funkcji, takich jak funkcja stała czy liniowa). Poniższe twierdzenie zapewnia bardziej konstruktywny sposób liczenia całki górnej i dolnej.

Tw. Niech f – funkcja ograniczona na $[a,b]$ o wartościach rzeczywistych, oraz niech (π_k) – ciąg *podziałów* takich, że $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{\pi_k} = 0$. Wtedy:

$$\lim_{k\to\infty} \bar{S}(f,\pi_k) = \overline{\int}_{[a,b]} f \quad \text{ i analogicznie } \quad \lim_{k\to\infty} \underline{S}(f,\pi_k) = \underline{\int}_{[a,b]} f \tag{5}$$

Dow. Mając dany podział π, oznaczmy przez $\pi \vee \{y\}$ podział, otrzymany z π przez dostawienie jednego punktu y. Załóżmy, że $y \in]x_{i-1}, x_i[$.

Obliczmy różnicę

$$\bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi \vee \{y\});$$

jedyny wkład do tej różnicy będzie pochodził od odcinka $]x_{i-1}, x_i[$, bo reszta się skasuje. Mamy więc:

$$\bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi \vee \{y\})$$

$$= \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) - \left(\sup_{x\in[x_{i-1},y]} f(x)(y - x_{i-1}) + \sup_{x\in[y,x_i]} f(x))(x_i - y) \right)$$

$$= \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \sup_{x\in[x_{i-1},y]} f(x) \right)(y - x_{i-1}) + \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \sup_{x\in[y,x_i]} f(x) \right)(x_i - y) \geqslant 0,$$

bo

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \geqslant \sup_{x\in[x_{i-1},y]} f(x) \quad \text{i} \quad \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \sup_{x\in[y,x_i]} f(x)$$

(supremum po *mniejszym* zbiorze jest nie większe niż supremum po *większym* zbiorze). (Ilustracja rysunkowa **RYS. 3**).

Podsumowując, mamy:

$$\bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi \vee \{y\}) \geqslant 0,$$

innymi słowy: Dostawianie punktów do podziału *zmniejsza* sumę górną (dokładniej: *nie zwiększa* jej).

Mamy też:

$$0 \leqslant \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi \vee \{y\}) \leqslant \delta_{\pi\vee\{y\}} \cdot \left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x) \right) \tag{6}$$

Oznaczmy:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x);$$

możemy wtedy nierówność (6) zapisać jako

$$\delta_{\pi\vee\{y\}} M \geqslant \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi \vee \{y\}) \geqslant 0.$$

Teraz do podziału π dodajmy n punktów $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Mamy:

$$0 \leqslant \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi \vee \{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$$

$$= \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1\}) + \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1\}) - \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1,y_2\}) + \cdots - \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1,y_2,\ldots,y_n\})$$

$$\leqslant M \cdot \left(\delta_{\pi\vee\{y_1\}} + \delta_{\pi\vee\{y_1,y_2\}} + \ldots \delta_{\pi\vee\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}}\right)$$
$$\leqslant M \cdot \delta_\pi \cdot (n-1),$$

co podsumujmy jako:

$$M\delta_\pi(n-1) \geqslant \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}) \geqslant 0. \tag{7}$$

Oznaczając podział $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ jako ρ, mamy, dla dowolnego podziału ρ

$$M \cdot \delta_\pi \cdot n_\rho \geqslant \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi\vee\rho) \geqslant 0. \tag{8}$$

Teraz: Weźmy dowolne $\epsilon > 0$. Wtedy, z definicji kresu dolnego, istnieje taki podział ρ, że

$$\overline{\int\limits_{[a,b]}} f \leqslant \bar{S}(f,\rho) \leqslant \overline{\int\limits_{[a,b]}} f + \frac{\epsilon}{2}. \tag{9}$$

Weźmy teraz π – inny podział. Z udowodnionej dopiero co nierówności (8) mamy

$$\overline{\int\limits_{[a,b]}} f \leqslant \bar{S}(f,\pi) \leqslant \bar{S}(f,\pi\vee\rho) + M\cdot\delta_\pi\cdot n_\rho \leqslant \bar{S}(f,\rho) + M\cdot\delta_\pi\cdot n_\rho$$

$$\leqslant \overline{\int\limits_{[a,b]}} f + \frac{\epsilon}{2} + M\cdot\delta_\pi\cdot n_\rho.$$

Weźmy teraz, dla wyżej wybranego ϵ, następującą liczbę δ:

$$\delta = \frac{\epsilon}{2Mn_\rho}; \tag{10}$$

jeżeli teraz wybierzemy podział π tak, że $\delta_\pi < \delta$, to

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\pi:\delta_\pi<\delta}{\forall}\ \overline{\int\limits_{[a,b]}} f \leqslant \bar{S}(f,\pi) \leqslant \overline{\int\limits_{[a,b]}} f + \epsilon \tag{11}$$

Weźmy teraz ciąg podziałów (π_k) takich, jak w założeniu, tzn. $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{\pi_k} = 0$. Tę własność można równoważnie wypowiedzieć jako:

$$\underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{k>K}{\forall}\ \delta_{\pi_k} \leqslant \delta;$$

przepisując nierówność (11), mamy:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{k>K}{\forall}\ \overline{\int\limits_{[a,b]}} f \leqslant \bar{S}(f,\pi_k) \leqslant \overline{\int\limits_{[a,b]}} f + \epsilon$$

bądź, przepisując nieco inaczej tezę,

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{k>K}{\forall}\ \left|\bar{S}(f,\pi_k) - \overline{\int\limits_{[a,b]}} f\right| \leqslant \epsilon \tag{12}$$

a to dokładnie oznacza, że

$$\lim_{k\to\infty} \bar{S}(f,\pi_k) = \overline{\int_{[a,b]}} f.$$

Dla sumy dolnej i drugiej z równości (5) dowód jest analogiczny.

CBDO

Jeśli π, ρ – podziały, to

$$\bar{S}(f,\pi) \geqslant \bar{S}(f,\pi\vee\rho) \geqslant \underline{S}(f,\pi\vee\rho) \geqslant \underline{S}(f,\rho),$$

co można wypowiedzieć jako:

Stw. Każda suma górna jest większa od każdej sumy dolnej.

Jeżeli teraz (π_k), (ρ_k) – dwa ciągi podziałów o średnicach dążących do zera, to

$$\bar{S}(f,\pi_k) \geqslant \underline{S}(f,\rho_k)$$

i, przechodząc do granicy $\lim\limits_{k\to\infty}$ i przypominając sobie twierdzenie o zachowaniu nierówności przy dążeniu do granicy, mamy

Tw. Dla dowolnej funkcji ograniczonej f zachodzi

$$\overline{\int_{[a,b]}} f \geqslant \underline{\int_{[a,b]}} f \tag{13}$$

Najważniejszy (w zastosowaniach) przypadek ma miejsce, gdy te granice są *równe*. Prowadzi to do następującej definicji.

Def. Niech f – funkcja rzeczywista na $[a,b]$, ograniczona. Mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna*, jeżeli

$$\overline{\int_{[a,b]}} f = \underline{\int_{[a,b]}} f \tag{14}$$

Wtedy tę całkę oznaczamy

$$\overline{\int_{[a,b]}} f = \underline{\int_{[a,b]}} f = \int_a^b f(x)\mathsf{d}x.$$

1.3 Sumy wypunktowane

Niech będzie zadany podział $\pi = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ odcinka $[a,b]$. Niech będzie zadany zbiór n liczb ξ_i takich, że $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Oznaczmy: $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Zbiór ξ nazywamy *wypunktowaniem* (związanym z podziałem π).

Def. (sumy wypunktowanej Riemanna). *Sumą wypunktowaną* nazywamy

$$S(f,\pi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \tag{15}$$

Mamy oczywistą nierówność: Dla dowolnego podziału π i dowolnego wypunktowania ξ zachodzi

$$\underline{S}(f,\pi_k) \leqslant S(f,\pi,\xi) \leqslant S(f,\pi,\xi)$$

W połączeniu z twierdzeniem o trzech ciągach, prowadzi ona do następującego twierdzenia.

Tw. Niech f – funkcja rzeczywista ograniczona na $[a, b]$. Jeżeli f jest całkowalna w sensie Riemanna, to dla dowolnego ciągu podziałów (π_k) takiego, że $\lim\limits_{k\to\infty} = 0$, ciąg wypunktowanych sum Riemanna jest zbieżny do całki Riemanna $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathsf{d}x$.

CBDO

Mamy też twierdzenie w pewnym sensie odwrotne:

Tw. Niech f – funkcja rzeczywista na $[a, b]$ (nie zakładamy, że jest ograniczona). Jeżeli dla dowolnego ciągu podziałów (π_k) takiego, że $\lim\limits_{k\to\infty} = 0$, ciąg wypunktowanych sum Riemanna jest zbieżny do granicy *niezależnej od sposobu wypunktowania*, to f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna.

Dow. tu pominiemy.

CO NIE ZOSTAŁO OKAZANE

1.4 Ważne własności całek

Tw. Niech f, g – funkcje ograniczone na odcinku $[a, b]$. Jeśli f, g są całkowalne na $[a, b]$ to $f + g$ też jest całkowalna na $[a, b]$ oraz

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathsf{d}x = \int_a^b f(x)\mathsf{d}x + \int_a^b g(x)\mathsf{d}x \tag{16}$$

Dow.

Mamy:

$$\bar{S}(f+g,\pi) \leqslant \bar{S}(f,\pi) + \bar{S}(g,\pi)$$

(ponieważ na dowolnym zbiorze X mamy: $\sup\limits_X (f+g) \leqslant \sup\limits_X f + \sup\limits_X g$) oraz

$$\underline{S}(f+g,\pi) \geqslant \underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi)$$

(ponieważ znów, na dowolnym zbiorze X mamy: $\inf\limits_X (f+g) \geqslant \inf\limits_X f + \inf\limits_X g$).

Mamy więc

$$\underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi) \leqslant \underline{S}(f+g,\pi) \leqslant \underline{S}(f+g,\pi) \leqslant \bar{S}(f+g,\pi) \leqslant \bar{S}(f,\pi) + \bar{S}(g,\pi)$$

Jeżeli teraz weźmiemy ciąg podziałów (π_k) taki, że $\lim_{k\to\infty} \pi_k = 0$, to skrajne strony nierówności będą równe $\int_a^b f(x)\mathsf{d}x + \int_a^b g(x)\mathsf{d}x$, a to znaczy, że wyrazy w środku są równe i wynoszą: $\int_a^b (f+g)(x)\mathsf{d}x$ – a to znaczy, że funkcja $f + g$ jest całkowalna i że zachodzi wzór (16).

CBDO

Mamy też proste

Tw. Jeśli f – całkowalna na $[a, b]$, to αf (gdzie α =const.) też jest całkowalna i zachodzi

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\mathsf{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathsf{d}x \tag{17}$$

Dow. Wynika to z oczywistego faktu, że na dowolnym zbiorze X mamy, dla $\alpha > 0$, $\sup\limits_X (\alpha f) = \alpha \sup\limits_X f$ i analogicznie dla infimum, co prowadzi do natychmiastowego wniosku dla całek.

CBDO

Tw. Jeśli f – całkowalna na $[a,b]$ oraz $f \geqslant 0$ na $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x \geqslant 0. \tag{18}$$

Dow. Mamy bowiem, z uwagi na nieujemność f: $\bar{S}(f,\pi) \geqslant 0$ dla dowolnego podziału π i skoro tak, to również $\inf_\pi \bar{S}(f,\pi) \geqslant 0$; a że dla funkcji całkowalnej mamy $\int_a^b f(x)\mathsf{d}x = \inf_\pi \bar{S}(f,\pi)$, to otrzymujemy (18).

CBDO

Przykł.

1. Funkcja stała jest całkowalna: Niech $f(x) = \lambda$ =const. Wtedy, niezależnie od podziału π i wypunktowania ξ:

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\pi) &= \textstyle\sum_i \lambda(x_i - x_{i-1}) = \lambda(b-a),\\ \underline{S}(f,\pi) &= \textstyle\sum_i \lambda(x_i - x_{i-1}) = \lambda(b-a),\\ S(f,\pi,\xi) &= \textstyle\sum_i \lambda(x_i - x_{i-1}) = \lambda(b-a).\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 x^2\mathsf{d}x$

3. $\int_0^1 e^x\mathsf{d}x$

4. Nie wszystkie funkcje są całkowalne. Weźmy *funkcję Dirichleta.*

Interpretacje: Pole powierzchni pod wykresem; droga.

1.4.1 Dwie ważne klasy funkcji całkowalnych

Tw. Jeśli f – ograniczona i monotoniczna na $[a,b]$, to f jest całkowalna.

Uwaga: f nie musi być ciągła!

Dow. Załóżmy, że f jest niemalejąca. (Dla przypadku, gdy f jest nierosnąca, dowód jest analogiczny). Musimy pokazać, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taki podział π, że

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \epsilon. \tag{19}$$

Weźmy jakiś podział π. Ze względu na fakt, że f jest niemalejąca, mamy:

$$\overline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}), \underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1});$$

(p. **RYS.**, stąd

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}).$$

Największa różnica wartości funkcji na $[a,b]$ jest równa $f(b) - f(a)$ (ze względu na monotoniczność f). Zakładamy, że $f(b) > f(a)$, bo inaczej f jest stała, i jako taka jest całkowalna.

Niech będzie dany $\epsilon > 0$. Dla tego ϵ bierzemy taki podział π odcinka $[a, b]$, aby średnica podziału δ_π spełniała warunek

$$\delta_\pi \leqslant \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Wtedy:

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leqslant \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$= \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1})) = \epsilon,$$

czyli dla danego ϵ jawnie podaliśmy przedział spełniający warunek (19) o który chodziło.

CBDO

Tw. Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$ to jest całkowalna na $[a, b]$.

Dow. Było twierdzenie, że jeśli f jest ciągła na odcinku domkniętym, to jest tam jednostajnie ciągła, tzn.

$$\forall_{\epsilon > 0} \, \exists_{\delta(\epsilon) > 0} \, \forall_{x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta} : |f(x) - f(x')| < \epsilon. \tag{20}$$

Zamiast ϵ powyżej weźmy $\frac{\epsilon}{b-a}$.

Szacujemy $\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi)$:

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} (\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x))(x_i - x_{i-1}) \leqslant \ldots$$

... dla danego $\epsilon \equiv \frac{\epsilon}{b-a}$ bierzemy podział o średnicy $\delta\left(\frac{\epsilon}{b-a}\right)$. Ze względu na jednostajną ciągłość, mamy $\forall_{x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta} |f(x) - f(x')| \leqslant \frac{\epsilon}{b-a}$, więc ta nierówność zachodzi też dla różnicy między sup a inf. Wtedy mamy

$$\ldots \leqslant \frac{\epsilon}{b - a} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon(b - a)}{b - a} = \epsilon.$$

Podsumowując słowami to co pokazaliśmy: Dla dowolnego $\epsilon > 0$ znaleźliśmy taki podział π, że dla tego podziału różnica między sumą górną a dolną jest mniejsza od ϵ – a to znaczy, że f jest całkowalna.

CBDO

1.5 Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego

Tw. (podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego). Niech f – funkcja ciągła na $[a, b]$. Wtedy funkcja $F(x)$, zdefiniowana przez:

$$[a, b] \ni x \to F(x) = \int_a^x f(z) \mathsf{d}z$$

jest różniczkowalna oraz zachodzi: $F'(x) = f(x)$, $F(a) = 0$.

Dow. Ponieważ f jest ciągła, to jest całkowalna na $[a, b]$.

Oznaczmy:

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Oczywiste jest, że f jest funkcją całkowalną nieujemną na $[a,b]$. Wobec tego $\int_a^b (f - m)(x)\mathsf{d}x \geqslant 0$, z czego mamy: **RYS.**

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x \geqslant m(b-a).$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x \leqslant M(b-a).$$

Przypomnijmy sobie definicję ilorazu różnicowego:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Weźmy najsampierw $h>0$. Mamy: **RYS.**

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(z)\mathsf{d}z = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z + \int_x^{x+h} f(z)\mathsf{d}z \quad \text{oraz} \quad F(x) = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z,$$

co daje

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(z)\mathsf{d}z.$$

Oznaczmy tymczasowo:

$$m_{x,h} = \inf_{z\in[x,x+h]} f(z), \quad M_{x,h} = \sup_{z\in[x,x+h]} f(z)$$

Mamy:

$$m_{x,h}\cdot h \leqslant F(x+h)-F(x) \leqslant M_{x,h}\cdot h$$

i po podzieleniu przez h dostajemy

$$m_{x,h} \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant M_{x,h}.$$

Weźmy teraz przypadek $h<0$. **RYS.** Mamy:

$$F(x) = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z = \int_a^{x+h} f(z)\mathsf{d}z + \int_{x+h}^x f(z)\mathsf{d}z \quad \text{oraz} \quad F(x+h) = \int_a^{x+h} f(z)\mathsf{d}z,$$

skąd

$$F(x+h) - F(x) = -\int_{x+h}^x f(z)\mathsf{d}z$$

oraz (pamiętajmy, że $(-h)$ jest dodatnie!)

$$m_{x,-h}\cdot(-h) \leqslant -\int_{x+h}^x f(z)\mathsf{d}z \leqslant M_{x,-h}\cdot(-h),$$

gdzie

$$m_{x,-h} = \inf_{z\in[x+h,x]} f(z), \quad M_{x,-h} = \sup_{z\in[x+h,x]} f(z).$$

Po podzieleniu przez $(-h)$ otrzymujemy

$$m_{x,-h} \leqslant -\frac{1}{h}\int_{x+h}^x f(z)\mathsf{d}z = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant M_{x,-h}.$$

Weźmy teraz $\epsilon \geqslant |h|$ i oznaczmy:

$$m_{x,\epsilon} = \inf_{z\in[x-\epsilon,x+\epsilon]} f(z), \qquad M_{x,\epsilon} = \sup_{z\in[x-\epsilon,x+\epsilon]} f(z).$$

Dla $h : |h| \leqslant \epsilon$ (znak h może tu być dowolny) mamy wtedy

$$m_{x,\epsilon} \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant M_{x,\epsilon},$$

a ponieważ f jest ciągła, to przy $\epsilon \to 0$ *obie strony powyższej nierówności dążą do* $f(x)$, tak więc

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

CBDO

Wnioski.

1. Jeśli f – ciągła na $[a,b]$, to mamy:

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x = F(b) - F(a)$$

dla F – dowolnej funkcji pierwotnej do f.

2. ($(1-\epsilon)$–twierdzenie o wartości średniej w rachunku całkowym). Jeśli f – ciągła na $[a,b]$, to istnieje punkt $\xi \in [a,b]$ taki, że

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{21}$$

Dow. Zastosujmy do funkcji pierwotnej $F(x) = \int_a^x f(x)\mathsf{d}x$ twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej w rachunku różniczkowym:

$$\exists\, \xi \in [a,b]:\ F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

co od razu daje wzór (21).

Inny dowód, oparty o własność Darboux.

Tw. (O całkowaniu przez części). Jeśli $f, g \in C^1([a,b])$ (tzn. f', g' są ciągłe na $[a,b]$) to zachodzi wzór

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathsf{d}x = f(x)\cdot g(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathsf{d}x$$

$$\equiv (f\cdot g)(b) - (f\cdot g)(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\mathsf{d}x \equiv f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\mathsf{d}x$$

Dow.

$$\int_a^b (f'\cdot g - f\cdot g')(x)\mathsf{d}x = \int_a^b (f\cdot g)'(x)\mathsf{d}x = (f\cdot g)(b) - (f\cdot g)(a).$$

CBDO

Tw. Jeśli f – całkowalna na $[a,b]$ to $|f|$ też jest całkowalna na $[a,b]$ i zachodzi nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)\mathsf{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathsf{d}x. \tag{22}$$

Dow. Dla dowolnego $x \in [a,b]$ mamy: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, co – przy założeniu, że $|f|$ jest całkowalna – daje

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathsf{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathsf{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathsf{d}x$$

a to znaczy, że zachodzi wzór (22). Do zakończenia dowodu pozostaje więc pokazać, że $|f|$ jest całkowalna – co teraz uczynimy. Pokażemy mianowicie, że

$$\forall_\epsilon \exists_\pi\ \bar{S}(|f|,\pi) - \underline{S}(|f|,\pi) < \epsilon. \tag{23}$$

Pokażemy najsampierw, że na dowolnym odcinku I mamy:

$$\sup_{x\in I} |f(x)| - \inf_{x\in I} |f(x)| \leqslant \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x) \tag{24}$$

Pokażemy to, rozważając trzy możliwe przypadki:

1. Na całym odcinku I funkcja f jest nieujemna: $f(x) \geqslant 0$. **RYS.** Mamy wtedy:

   $$\sup_{x\in I} |f(x)| = \sup_{x\in I} f(x), \quad \inf_{x\in I} |f(x)| = \inf_{x\in I} f(x)$$

   i nierówność (24) zachodzi (mamy w niej równość).

2. Na całym odcinku I funkcja f jest niedodatnia: $f(x) \leqslant 0$. **RYS.** Mamy wtedy:

   $$\sup_{x\in I} |f(x)| = -\inf_{x\in I} f(x), \qquad \inf_{x\in I} |f(x)| = -\sup_{x\in I} f(x),$$

   i znowu nierówność (24) zachodzi (mamy znów w niej równość).

3. Trzecia i ostatnia możliwość to ta, że f zmienia znak na I. Wtedy:

   $$\sup_{x\in I} f(x) > 0, \text{ więc } \sup_{x\in I} f(x) = \sup_{x\in I} |f(x)|,$$

   oraz

   $$\inf_{x\in I} f(x) < 0, \text{ więc } -\inf_{x\in I} f(x) > 0,$$

   więc tym bardziej

   $$-\inf_{x\in I} f(x) > -\inf_{x\in I} |f(x)|$$

   i po dodaniu do obu stron tej nierówności wyrazu $\sup_{x\in I} f(x)$ otrzymujemy znów nierówność (24) (tym razem ostrą).

CBDO

Mamy zatem:

$$\sum_i \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| \right)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_i \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \right)(x_i - x_{i-1})$$

Powyższa nierówność znaczy, że

$$\bar{S}(|f|,\pi) - \underline{S}(|f|,\pi) \leqslant \bar{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi);$$

a ponieważ f z założenia jest całkowalna, to zachodzi

$$\forall_\epsilon \exists_\pi \ \bar{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \epsilon,$$

więc tym bardziej (23) – a to znaczy, że $|f|$ jest całkowalna.

CBDO

Tw. (1. twierdzenie o wartości średniej). Jeśli f, g – ciągłe na $[a,b]$ i g jest funkcją nieujemną: $g(x) \geqslant 0$, wtedy istnieje $\xi \in [a,b]$ taki, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x = f(\xi)\int_b^a g(x)\mathsf{d}x. \tag{25}$$

Dow. Oznaczmy:

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Ponieważ dla dowolnego $x \in [a,b]$ mamy: $m \leqslant f(x) \leqslant M$, to zachodzą też nierówności:

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x)\cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

oraz

$$m\int_a^b g(x)\mathsf{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathsf{d}x$$

Jeżeli $g \geqslant 0$ ciągła nie jest tożsamościowo równa zeru, to $\int_a^b g(x)\mathsf{d}x > 0$. **RYS.** Weźmy bowiem x_0 takie, że $g(x_0) > 0$. Z ciągłości g, istnieje taka $\delta > 0$, że $g(x) > 0$ dla każdego $x \in [\delta - x_0, \delta + x_0]$.

Ponieważ f jest ciągła na odcinku domkniętym $[a,b]$, to osiąga na $[a,b]$ swoje kresy. Przyjmijmy, że kres dolny osiąga w x_1, a kres górny w x_2, gdzie $x_1, x_2 \in [a,b]$. Mamy więc

$$f(x_1) = m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x}{\int_a^b g(x)\mathsf{d}x} \leqslant M = f(x_2)$$

Z własności Darboux dla funkcji f mamy, że funkcja f na odcinku $[x_1, x_2]$ osiąga wszystkie wartości pośrednie pomiędzy m i M, a w szczególności osiąga wartość $\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x}{\int_a^b g(x)\mathsf{d}x}$ (w jakimś punkcie ξ). Mamy więc

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x}{\int_a^b g(x)\mathsf{d}x}$$

a to jest dokładnie równość (25) czyli teza twierdzenia.

CBDO

Tw. (2. twierdzenie o wartości średniej). Niech f, g – ciągłe na $[a,b]$ i ponadto g – rosnąca i różniczkowalna w sposób ciągły. Wtedy istnieje taki $\xi \in [a,b]$, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathsf{d}x. \tag{26}$$

Dow. Niech $F(x)$ – funkcja pierwotna do $f(x)$, np. $F(x) = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z$. Obliczmy lewą stronę równości (26). Mamy

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x = \int_a^b F'(x)g(x)\mathsf{d}x = F\cdot g|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathsf{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathsf{d}x \\
&= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)(g(b) - g(a)) \\
&= g(b)\int_a^b f(x)\mathsf{d}x - g(b)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x + g(a)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x \\
&= g(b)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathsf{d}x - g(b)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x + g(a)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x \\
&= g(b)\int_\xi^b f(x)\mathsf{d}x + g(a)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x
\end{aligned}
$$

czyli dostaliśmy (26).

CBDO