

MATEMATYKA II – permutacje i wyznaczniki

lista nr 7, 21.04.2012

1. Złożyć poniższe permutacje w podanym i odwrotnym porządku; wynik zapisać w postaci dwukolumnowej; obliczyć parzystość każdej z występujących tu permutacji:

(a) $[(135)(2467)] \circ [(147)(2356)];$

(b) $[(13)(57)(246)] \circ [(135)(24)(67)];$

(c) $[(1473)(67248)(32)] \circ [(86725)].$

2. Znaleźć znak permutacji, rozkład na cykle, permutację odwrotną oraz N -krotne złożenie permutacji σ , jeżeli:

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = 15$

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = 796$

(c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & 3 & 10 & 4 & 2 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = 2005$

(d) $\sigma(x) := 3x - 25E(\frac{x-1}{8}), \quad x \in \{0, 1, \dots, 25\}, \quad N = 34.$

3. Znaleźć rozwiązania układów równań w zależności od parametru:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix};$

c) $\begin{bmatrix} a-5 & 2 & 1 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 1 & 2 & a-5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Obliczyć wyznaczniki, starając się przez kombinacje lin. kolumn bądź wierszy zwiększyć ilość zer, a następnie stosując z rozwinięcia Laplace'a:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$(d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Obliczyć wyznaczniki przez sprowadzenie ich do postaci trójkątnej:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \mathbf{c)} \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

6. Obliczyć wyznaczniki:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

7. Pokazać, że wartość wyznacznika macierzy antysymetrycznej nieparzystego wymiaru wynosi 0.

8. Pokazać, że wyznacznik *macierzy cyklicznej*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

jest równy iloczynowi $f(\epsilon_1)f(\epsilon_2)\dots f(\epsilon_n)$, gdzie $f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$, zaś $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ są kolejnymi pierwiastkami n -tego stopnia z 1.

Wskazówka. Obliczyć wyznacznik iloczynu powyższej macierzy cyklicznej oraz macierzy:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \dots & \epsilon_n \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \dots & \epsilon_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon_1^n & \epsilon_2^n & \epsilon_3^n & \dots & \epsilon_n^n \end{bmatrix}$$

9. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania, obliczyć wyznaczniki:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Pokazać, że wyznacznik *Vandermonde'a*

$$V_n(x_1, \dots, x_n) := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & (x_n)^{n-1} \end{bmatrix}$$

jest równy:

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j < k}^n (x_k - x_j).$$

Wskazówka. Zauważyć, że V_n jako funkcja x_n jest wielomianem; znaleźć jego pierwiastki; zastosować rozwinięcie Laplace'a względem ostatniego wiersza i odwołać się do indukcji.

11. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne operatorów linowych danych w pewnej bazie przez macierze:

$$\mathbf{a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c)} \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{d)} \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$