

Matematyka II: Lista zadań No. 9: Taylor again, ekstrema: zwykłe funkcji uwikłanych i związane

1. Rozwinąć w szereg Taylora wokół $x = 0, y = 0$ do członów 3. rzędu włącznie funkcje:

- (a) $f(x, y) = e^x \sin y$;
- (b) $f(x, y) = \sin(x + y)$;
- (c) $f(x, y) = e^{x^2} \cos y$;
- (d) $f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$.

2. Znaleźć punkty krytyczne, zbadać czy funkcja ma w tych punktach ekstremum, a jeśli tak, to jakiego typu:

- (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
- (b) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$
- (c) $f(x, y) = -x^2 + 5xy - y^2$
- (d) $f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4$
- (e) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$
- (f) $f(x, y) = (2ax - x^2)(2by - y^2)$
- (g) $f(x, y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$
- (h) $f(x, y) = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$
- (i) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$
- (j) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2)$, $a > 0, b > 0$.
- (k) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$
- (l) $z(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{50}{y}$ ($x > 0, y > 0$);
- (m) $z(x, y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ($a > 0, b > 0$);
- (n) $f(x, y, z) = xyz(a - x - y - z)$;
- (o) $u(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$;
- (p) $f(x, y, z) = xy^2z^3(a - z - 2y - 3z)$ ($a > 0$);
- (q) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{2}{x_3}$ ($x_i > 0, i = 1, 2, 3$).
- (r) Sprawdzić, że funkcja

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

posiada minimum w punkcie $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

3. Znaleźć punkty krytyczne funkcji uwikłanej $z(x, y)$ zadanej przez następujące równania, zbadać, czy ma ona w tych punktach ekstremum i jakiego typu:

- (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$;

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$;

(c) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

4. Zbadać ekstrema warunkowe funkcji u przy zadanych następujących warunkach (czasem zwanych *wiązaniami*):

(a) $f(x, y) = x + y$ przy warunku $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

(b) $f(x, y, z) = xyz$ przy warunku $x + y + z = c$. Ekstremów szukać dla x, y, z spełniających $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

(c) $f(x, y, z) = xyz$ przy warunkach $x + y + z = 5, xy + xz + yz = 8$.

(d) $u(x, y, z) = x - 2y + 2z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(e) $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ przy warunku $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c > 0$);

(f) $u(x, y, z) = xy^2z^3, x + 2y + 3z = a$ ($x > 0, y > 0, z > 0, a > 0$);

(g) $u(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$ ($a > b > c > 0, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$);

5. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$z(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

w prostokącie, ograniczonym prostymi: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.

6. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$z(x, y) = x^2y(4 - x - y)$$

w trójkącie, ograniczonym prostymi $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

7. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$z(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

w kwadracie: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

8. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$z(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$$

w kole $x^2 + y^2 \leq 4$.

9. Spośród prostopadłościanów wpisanych w elipsoidę

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

i o krawędziach równoległych do osi współrzędnych, znaleźć ten, którego objętość jest największa.

10. Na prostopadłościanie o krawędziach równych $2a, 2b, 2c$ opisano elipsoidę. Znaleźć tę, która ma najmniejszą objętość.

11. W części paraboloidy eliptycznej:

$$z = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2}, \quad z = 1$$

wpisano prostopadłościan o krawędziach równoległych do osi współrzędnych. Znaleźć ten, którego objętość jest największa.

12. Na paraboli $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y$ znaleźć punkt, znajdujący się w najbliższej odległości od prostej $9x - 7y + 16 = 0$.
13. Na paraboli $x^2 + 2xy + y^2 + 4y$ znaleźć punkt, znajdujący się w najbliższej odległości od prostej $3x - 6y + 4 = 0$.