

W. I. Arnold – wielkiej klasy matematyk – zauważył, że:

’Główne odkrycie Newtona, to, którego zdecydował się nie ujawniać i opublikował tylko w postaci anagramu, brzmi: *Data aequatione quodcunque fluentes quantitiae involvente fluxiones invenire et vice versa*. W tłumaczeniu [z łaciny i] na współczesny język matematyki oznacza to, że *Rozwiązywanie równań różniczkowych jest rzeczą pożyteczną*.’

Tak się składa, że ogromna większość praw fizyki sformułowana jest jako równania różniczkowe. Pierwsze z brzegu przykłady to: Prawo Newtona $f = ma$, równania Maxwella, równanie Schrödingera. Aby wydobyć fizyczną treść z równania, trzeba je umieć rozwiązać lub zbadać jego własności. Niniejszy rozdział jest wstępem do tego.

1 Ogólnikowa definicja

Niech F będzie funkcją $n + 1$ zmiennych, zaś y niech będzie funkcją *jednej* zmiennej x . Równanie

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

(gdzie $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$) nazywamy *równaniem różniczkowym zwyczajnym*. Każdą funkcję $y(x)$, która po wstawieniu do tego równania spełnia je tożsamościowo, nazywamy *rozwiązaniem równania różniczkowego*.

Tak sformułowany problem jest bardzo ogólny i bardzo trudny – w tej chwili dalecy jesteśmy od jego pełnego rozwiązania. Będziemy zaczynać od szczególnych przypadków, o których da się więcej powiedzieć.

2 Garść przykładów

Zanim podamy formalne definicje, podamy najspierw garść przykładów, które Czytelnik najprawdopodobniej już zna, nie będąc może jedynie obznajomionym z terminologią.

1. (a) Znaleźć funkcję $x(t)$, spełniającą równanie:

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \tag{1}$$

gdzie $f(t)$ jest zadaną funkcją. Rozwiązanie problemu każdy umie znaleźć (a przynajmniej powinien):

$$x(t) = \int f(t)dt + C, \quad C - \text{dowolna stała}. \tag{2}$$

W języku najbardziej chyba typowego przykładu z fizyki: Rozpatrujemy ruch punktu materialnego po prostej. Niech $f(t)$ jest prędkością punktu w chwili t . Szukamy zależności drogi od czasu.

- (b) Możemy też mieć do czynienia z nieco innym postawieniem problemu: Znaleźć rozwiązanie zagadnienia (1) zakładając, że $x(t_0) = x_0$ – dane. (W języku fizyki, zakładamy, że w danej chwili czasu t_0 punkt materialny znajduje się w określonym położeniu $x_0 = x(t_0)$). Wtedy rozwiązanie (2) jest już *jednoznaczne* – stała C przybiera określoną wartość.

2. *Rozpad promieniotwórczy*. Szybkość rozpadu promieniotwórczego próbki jest proporcjonalna do jej masy. Można więc zapisać:

$$\frac{dm}{dt} = -km; \quad (3)$$

(gdzie k jest dodatnią stałą); chcemy znaleźć zależność masy próbki od czasu.

Rozważmy ogólniejszy problem: Znaleźć funkcję $x(t)$, spełniającą równanie:

$$\frac{dx}{dt} = g(x). \quad (4)$$

Tu wygodniej jest szukać nie $x(t)$, a funkcji odwrotnej $t(x)$. Pamiętając, że pochodna funkcji odwrotnej $\frac{dt}{dx}$ wyraża się przez pochodną $\frac{dx}{dt}$ wzorem: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$, mamy:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g(x)}, \quad (5)$$

co daje

$$t(x) = \int \frac{1}{g(x)} dx + C, \quad C - \text{dowolna stała}. \quad (6)$$

(Powyższą procedurę można zapamiętać za pomocą sztuczki mnemotechnicznej, polegającej na potraktowaniu lewej strony równania (4) jako ułamka i przekształceniu go do postaci: $dt = \frac{dx}{g(x)}$ i obłożeniu obu stron znakiem całki, co daje (6). Ten sposób postępowania należy traktować WYŁĄCZNIE jako sztuczkę mnemotechniczną, bo pochodna *nie jest* ułamkiem, a całościowym wyrażeniem).

Rozwiązując w ten sposób równanie (3), mamy

$$t = -k \int \frac{1}{m} dm = -k \ln m + C,$$

co przekształcamy do postaci

$$m(t) = e^C e^{-kt}$$

zatem masa próbki *wykładniczo* maleje w czasie.

Jest to *ogólne* rozwiązanie problemu. Gdy mamy do czynienia z konkretnym *warunkiem początkowym*, tzn. warunkiem, że masa próbki w danej chwili czasu (powiedzmy $t = 0$) jest równa m_0 , mamy

$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

3. Omawiane dotąd przykłady miały jedną cechę wspólną: Istniało *jednoznaczne* rozwiązanie równania z zadaniem warunkiem początkowym. Istnieją jednak sytuacje, w których jednoznaczność *nie ma* miejsca.

Rozważmy równanie:

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 0$.

Rozwiązanie ogólne równania jest proste do uzyskania:

$$t = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C,$$

skąd, uwzględniając warunek początkowy

$$x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ale też! Funkcja $x(t) = 0$ spełnia zarówno równanie (7) jak i warunek początkowy $x(0) = 0$. Rozwiązanie zatem *nie jest* jednoznaczne. Niedługo zobaczymy, przy jakich warunkach *istnienie i jednoznaczność* rozwiązania mają miejsce.

2.1 Algorytmy rozwiązywania niektórych równań pierwszego rzędu

(Prawie) najogólniejsza postać równania pierwszego rzędu to

$$y' = F(x, y) \quad (8)$$

gdzie F jest daną funkcją ciągłą. Szukamy funkcji $y(x)$, która spełnia równanie (8).

1. **Równanie o zmiennych rozdzielonych.** Nazywamy tak sytuację, gdy $F(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$, gdzie f, g – funkcje ciągłe. Wtedy równanie (8) przyjmuje postać

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Zapiszmy je w postaci:

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x).$$

Niech F, G będą funkcjami pierwotnymi do f i g odpowiednio (tzn. $F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$). Wtedy powyższe równanie można zapisać

$$(G(y(x)))' = F'(x)$$

co daje

$$G(y(x)) = F(x) + C;$$

rozwiązanie jest więc dane w postaci uwikłanej. Po odwróceniu G (jeśli się to da zrobić) mamy

$$y'(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Przykł. Podajmy ogólne rozwiązanie równania

$$y' = \frac{e^{-x}}{y}; \quad \text{zakładamy, że } y > 0$$

Postępując jak powyżej, mamy

$$y \cdot y' = e^{-x} \quad \text{lub} \quad y \frac{dy}{dx} = e^{-x}, \quad \text{co daje}$$

$$\int y dy = \int e^{-x} dx,$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -e^{-x} + C, \quad \text{czyli} \quad y^2(x) = -2e^{-x} + C$$

i ostatecznie

$$y(x) = \sqrt{C - 2e^{-x}}.$$

Uwaga. Do klasy równań o zmiennych rozdzielonych należą dwa pierwsze przykłady z poprzedniej Subsection.

2. **Równanie jednorodne.** Nazywamy tak równanie (8), gdzie prawa strona jest funkcją zależącą tylko od $\frac{y}{x}$:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (9)$$

Rozwiązanie otrzymujemy podstawiając zamiast y nową zmienną u , zdefiniowaną jako

$$u = \frac{y}{x}$$

Mamy wtedy:

$$y(x) = u(x)x, \quad y'(x) = u'(x)x + u(x)$$

i wstawiając to do równania (9), otrzymujemy

$$xu' + u = F(u), \quad \text{co daje} \quad u' = \frac{F(u) - u}{x}$$

co jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Całkując je otrzymamy

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (10)$$

Przykł. Rozwiążmy równanie:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$$

Podstawiając standardowo $y = ux$, otrzymamy:

$$u + xu' = u^2 - 2, \quad \text{tzn.} \quad u' = \frac{u^2 - u - 2}{x}$$

i całkując, otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c = \int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln \left(\sqrt[3]{\frac{u-2}{u+1}} \right),$$

i wracając do zmiennej y , dostajemy rozwiązanie w postaci

$$Cx^3 = \frac{y-2x}{y+x}.$$

bądź, gdybyśmy chcieli mieć rozwiązanie w postaci nieuwikłanej,

$$y = \frac{Cx^3 + 2}{1 - Cx}x.$$

3. **Równanie liniowe.** Nazywamy tak równanie

$$y' - p(x)y = b(x) \quad (11)$$

gdzie p, b – zadane funkcje. Gdy $b(x) \equiv 0$, to równanie powyższe nazywamy *jednorodnym*; w przeciwnym wypadku mówimy o równaniu *niejednorodnym*.

Uwaga. Sprawdza się natychmiastowo, że jeśli $y_1(t), y_2(t)$ – dwa rozwiązania równania *jednorodnego*, to ich suma też jest rozwiązaniem; ponadto, jeśli jakieś rozwiązanie pomnoży się przez stałą, to również otrzymuje się rozwiązanie. To pokazuje, że rozwiązania równania *jednorodnego* są *przestrzenią wektorową*. Jej wymiar jest równy 1 – co za chwilę zobaczymy.

Ogólny przypadek równania (11) – równania *niejednorodnego* – rozwiązuje się w dwóch etapach. Pierwszy z nich to rozwiązanie ogólne równania *jednorodnego*. Drugi, to uzyskanie jakiegoś (tzw. szczególnego) rozwiązania równania *niejednorodnego*. Ogólne rozwiązanie równania *niejednorodnego* będzie sumą powyższych dwu rozwiązań.

(a) Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ). Mamy

$$y' - p(x)y = 0,$$

co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Mamy

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y = \int p(x)dx + c,$$

i oznaczając: $\int p(x)dx = P(x)$ oraz $e^c = C$, mamy

$$y_{OJ} = Ce^{P(x)},$$

gdzie C – dowolna stała, a OJ – 'Ogólne Jednorodne'.

(b) Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN). Znajdowanie tego rozwiązania odbywa się za pomocą tzw. *metody uzmienniania stałej*. Polega ona na tym, iż *zakładamy*, że rozwiązanie równania niejednorodnego jest postaci $y_{SN} = C(x)e^{P(x)}$. Zakładając tę postać, wstawiamy ją do równania (11) i mamy

$$C'(x)e^{P(x)} + C(x)P'(x)e^{P(x)} - p(x)C(x)e^{P(x)} = b(x),$$

a że $P'(x) = p(x)$, to drugi i trzeci wyraz z lewej strony się kasują i dostajemy

$$C'(x)e^{P(x)} = b(x),$$

skąd

$$C(x) = \int b(x)e^{-P(x)}dx.$$

Można zapytać, dlaczego przy całkowaniu nie dopisaliśmy kolejnej dowolnej stałej? Otóż dlatego, że dopisanie tej stałej prowadziło do dodania do y_N wyrazu *proporcjonalnego do równania jednorodnego*, a więc nie prowadziło do rozwiązania ogólniejszego, niż już mamy.

Ostatecznie mamy wzór na rozwiązanie równania (11)

$$y(x) = y_{OJ} + y_{SN} = Ce^{P(x)} + \int b(x)e^{-P(x)}dx \quad (12)$$

gdzie C – dowolna stała.

Przykł. Znajdźmy ogólne rozwiązanie równania

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}. \quad (13)$$

• RORJ: Równanie jednorodne: $y' + \frac{1}{x}y = 0$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Mamy:

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \text{skąd} \quad \ln y = -\ln x + c \quad \text{co daje} \quad y_{OJ} = \frac{C}{x} \quad (\text{gdzie } C = e^c)$$

• • RSRN: Uzmienniamy stałą C tzn. przyjmujemy, że jest ona funkcją x . Mamy: $y_{SN} = \frac{C(x)}{x}$, co po wstawieniu do wyjściowego równania (13) daje, po kilku skróceniach: $C'(x) = e^x$, skąd $C(x) = e^x$; tak więc • • • RORN:

$$y = \frac{C}{x} + \frac{e^x}{x}.$$

2.2 Równania 2. rzędu: Obniżenie rzędu równania – parę sztuczek

2.2.1

$$y'' = F(x)$$

Przykł. Ruch ze stałym przyspieszeniem a . Dwie stałe całkowania mają sens fizyczny *prędkości* oraz *położenia początkowego*: $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$.

2.2.2

$$y'' = F(y')$$

2.2.3

$$y'' = F(y)$$

Przykł. Obniżenie rzędu dla równania Newtona z siłą gradientową: $f = ma$, tzn.

$$mx'' = f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Po obustronnym pomnożeniu przez x' mamy:

$$\frac{1}{2}m((x')^2)' = -(U(x))', \quad \text{a po scałkowaniu} \quad \frac{1}{2}m(x')^2 = E - U(x)$$

gdzie E jest dowolną stałą. Jaki jest jej sens fizyczny? Po przeniesieniu $-U(x)$ na drugą stronę mamy

$$\frac{1}{2}m(x')^2 + U(x) = E$$

czyli stała C ma sens fizyczny *energii całkowitej*.

Otrzymaliśmy w ten sposób *równanie pierwszego rzędu*. Stąd po przekształceniu mamy:

$$x' = \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\int dt = t - t_0 = \int \sqrt{\frac{m}{2(E - U(x))}} dx.$$

- Oscylator harmoniczny

- • Wahadło bez przybliżenia małych drgań i ELIPTYSIE.

2.3 Równania wyższych rzędów

Okazuje się, że równanie n -tego rzędu

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (14)$$

można sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu.

Wprowadźmy bowiem pomocnicze funkcje:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Wtedy równanie (14) można zapisać w postaci układu równań:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ F(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Przykł. Równanie ruchu oscylatora harmonicznego zapisane jako układ 2 równań I rzędu.

3 Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności – sformułowanie i ilustracja

3.1 Wstęp ideowy

Rozważamy tu układy równań różniczkowych pierwszego rzędu; zgodnie z otrzymanym dopiero co wynikiem, dowolne równanie n -tego stopnia możemy wyrazić jako układ n równań pierwszego rzędu.

Zadamy określony warunek początkowy i zapytamy, kiedy układ ma jednoznaczne rozwiązanie.

Odpowiedź dana jest przez twierdzenie (Cauchy’ego)¹ o istnieniu i jednoznaczności dla takich układów.

Zanim sformułujemy to twierdzenie, podamy najspierw wstęp ideowy, a potem przygarść niezbędnych definicji.

Niech $x \equiv x(t) \in \mathbb{R}^n$. Będziemy rozważać układ równań różniczkowych z warunkiem początkowym:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (16)$$

Def. *Odzworowaniem Picarda* nazywamy odzworowanie A , przeprowadzające funkcję $\varphi : \mathbb{R} \ni t \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$ w funkcję $A\varphi : \mathbb{R} \ni t \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, gdzie

$$(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\varphi(\tau), \tau) d\tau. \quad (17)$$

Okazuje się, że φ jest rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = x_0$

$\Longleftrightarrow$

φ jest punktem stałym odzworowania A , tzn. $\varphi = A\varphi$.

Dow. jest natychmiastowy, jeśli się nie przejmujemy ’drobiazgami’, tzn. porządnym określeniem używanych obiektów oraz ich istnieniem. (*Na razie* się tym nie przejmujemy, ale zrobimy to później):

Jeśli zróżniczkujemy $(A\varphi)(t)$, to dostaniemy $F(\varphi(t), t)$ (z podstawowego tw. rachunku różniczkowego i całkowego); mamy więc: $\frac{d(A\varphi)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi(t), t)$. Ponadto $(A\varphi)(t_0) = x_0$, więc spełniony jest też warunek początkowy.

Koniec dowodu – ale tylko formalnego!

Tu będzie:

¹Zwane też tw. Picarda lub Picarda–Cauchy’ego

1. Co to jest punkt stały;
2. Jak się szukało punktu stałego przy ciągach rekurencyjnych;
3. Co to jest odwz. zbliżające (zwężające);
4. agitacja że jeśli A – zbliżające to ma punkt stały;
5. Jeśli A – odwz. Picarda to przy pewnych założeniach jest zbliżające – co daje dowód na istn. i jednozn. rozw. układu (16).

Na razie przykład: Skonstruujemy rozwiązanie układu (16) przez kolejne iteracje odwzorowania A .

Przykł. Znajdźmy rozwiązanie równania różniczkowego z warunkiem początkowym:

$$\frac{dx}{dt} = x + t, \quad x_0 = x(0) = 1 \quad (18)$$

metodą Picarda.

Musimy wziąć jakąś funkcję i następnie działać na nią kolejnymi potęgami odwzorowania Picarda. Weźmy dla prostoty:

$$x_0(t) = 1, \quad x_n(t) = Ax_{n-1}(t) = x_0 + \int_0^t (t + x_{n-1}(\tau)) d\tau.$$

Liczymy kolejno:

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2;$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{1}{2!}\tau^2) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3;$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{2}{2!}\tau^2 + \frac{1}{3!}\tau^3) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!}t^2 + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4;$$

$$x_4(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{2}{2!}\tau^2 + \frac{2}{3!}\tau^3 + \frac{1}{4!}\tau^4) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!}t^2 + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{2}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5;$$

itd. Z postaci kilku pierwszych wyrazów ciągu funkcji $x(t)$ łatwo chyba już domyślić się postaci n -tego elementu:

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{2}{3!}t^3 + \frac{2}{4!}t^4 + \dots + \frac{2}{n!}t^n + \frac{1}{(n+1)!}t^{(n+1)}$$

w czym można rozpoznać rozwinięcie w szereg funkcji

$$x(t) = e^t - 1 - t.$$

Czytelnik zechce się przekonać, że powyższa funkcja jest rozwiązaniem problemu (18).

3.2 Przy pewnych warunkach odwz. Picarda jest zwężające

3.2.1 Gdzie działa odwz. Picarda

Powiemy teraz nieco – podając jedynie definicję z niewielkim komentarzem – *przestrzeni* $A : M \rightarrow M$ w której działa odwz. Picarda;

Przestrzeń metryczna odwzorowań M . Rozpatrzmy wszystkie możliwe odwzorowania ciągle h walca: $\|x - x_0\| \leq b', |t - t_0| \leq a'$ w przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^n$. Przez M oznaczymy zbiór takich odwzorowań, spełniających ponadto warunek

$$\|h(x, t)\| \leq C|t - t_0| \quad (19)$$

(dla takich odwzorowań, w szczególności, jest spełnione: $h(x, t_0) = 0$).

Możemy uczynić z M przestrzeń metryczną, jeśli wprowadzimy metrykę ρ : Dla dwóch odwzorowań h_1, h_2 ich odległość definiujemy jako

$$\rho(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\| = \sup_{|t-t_0| \leq a', \|x-x_0\| \leq b'} |h_1(x, t) - h_2(x, t)|.$$

Tw. Zbiór M wyposażony w powyższą metrykę ρ jest przestrzenią metryczną zupełną. Zdefiniujmy odwzorowanie $A : M \rightarrow M$ przyjmując

$$(Ah)(x, t) = \int_{t_0}^t F(x + h(x, \tau), \tau) d\tau. \quad (20)$$

3.2.2 Kiedy odwz. Picarda jest zwężające

Okazuje się, że jeśli odcinek czasu, na którym rozpatrujemy ewolucję daną przez układ (16) jest mały, to gwarantuje już to, że odwz. Picarda będzie zwężające.

Tw. Jeśli wartość a' jest dostatecznie mała, to wzór (20) określa odwzorowanie zwężające przestrzeni M w siebie.

Dow.

nie będzie.

I jako wniosek mamy:

3.3 Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania

Tw. (*Cauchy'ego² o lokalnym istnieniu i jednoznaczności rozwiązania układu równań różniczkowych I. rzędu.*)

Rozważmy układ równań różniczkowych z warunkiem początkowym:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) \quad (21)$$

Niech prawa strona F będzie różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu (t_0, x_0) .

Wówczas istnieje takie otoczenie punktu t_0 , w którym określone jest rozwiązanie układu (21) przy warunku początkowym $\phi(t_0) = x$, gdzie x jest dowolnym punktem dostatecznie bliskim x_0 . Rozwiązanie to zależy przy tym od punktu początkowego w sposób ciągły.

Dow. Przy powyższych założeniach, odwzorowanie Picarda A zdefiniowane w poprzedniej Subsection jest zwężające. Skoro tak, to posiada punkt stały, który jest rozwiązaniem układu (16).

CBDO

(oczywiście, przy tych wszystkich kawałkach pominiętych...)

Uwaga. (dla zainteresowanych) Często w sformułowaniu założeń twierdzenia spotyka się tzw. *warunek Lipschitza*, który jest słabszy niż powyższe założenie, że F jest różniczkowalna w sposób ciągły. Do kompletu więc:

Mówimy, że F spełnia warunek Lipschitza w pierwszym argumentie, tzn. istnieje taka stała L , że:

$$\forall_{t \in [a, b]} \forall_{x, x' \in \mathcal{O}} \|F(x, t) - F(x', t)\| \leq L \|x - x'\|. \quad (22)$$

²Zwane też tw. Picarda lub Picarda–Cauchy'ego

4 Równania i układy liniowe

Def. *Układem równań liniowych* nazywamy układ (21) z prawą częścią zależącą *liniowo* od x :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (23)$$

Tu $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ jest macierzą $n \times n$. Zakładamy, że wszystkie elementy macierzy $A(t)$ oraz wektora niejednorodności $b(t)$ zależą w sposób *ciągły* od t dla $t \in [a, b]$ (jakiś odcinek).

Uwaga (terminologiczna). Analogicznie jak w przypadku równania I rzędu, układ (24) nazywamy *niejednorodnym*, gdy $b(t) \equiv 0$, oraz *jednorodnym*, gdy $b(t) \not\equiv 0$.

I takż podobnie jak w przypadku równania I rzędu: Jeśli $x_1(t), x_2(t)$ są dwoma rozwiązaniami układu *jednorodnego*, to ich suma i – ogólniej – ich dowolna liniowa kombinacja też jest rozwiązaniem. Tak więc rozwiązania układu jednorodnego mają strukturę przestrzeni wektorowej.

Zapytajmy teraz, jak wygląda sprawa istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla układów równań liniowych. W celu zbadania tej sytuacji zauważmy najspierw, że dla układów równań liniowych warunek Lipschitza *jest spełniony*:

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| = \|A(t)x + b(t) - A(t)x' - b(t)\| = \|A(t)(x - x')\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x - x'\|.$$

Funkcja $t \rightarrow \|A(t)\|$ jest *ciągła*. Oznaczając

$$L = \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\|$$

widzimy, że jest spełniony warunek Lipschitza ze stałą L . Ponieważ warunek Lipschitza jest spełniony, to istnieje lokalnie jednoznaczne rozwiązanie.

Ale dzięki temu, że układ (24) jest *liniowy*, można o rozwiązaniu podać znacznie dokładniejsze informacje, niż w ogólnym przypadku. Ale to już pominiemy.

5 Układy liniowe o stałych współczynnikach

Ważną klasą układów równań liniowych, dla których istnieje ogólny algorytm rozwiązywania, są *układy o stałych współczynnikach*, tzn. układy (24), dla których macierz A *nie zależy od czasu*.

Rozpatrujemy więc:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (24)$$

Pokuśmy się o nieco więcej, szukając *ogólnego* rozwiązania układu $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + b(t)$, bez specyfikowania warunku początkowego. Rozwiązywanie takiego układu przebiega, podobnie jak dla równania I rzędu, w dwóch etapach: i) Znalezienie ROUJ, ii) znalezienie RSUJ; wtedy: iii) $ROUN = ROUJ + RSUJ$.

Rozwiązanie takiego układu łatwo znaleźć: Okazuje się że:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0.$$

5.1 Przykłady – w inny sposób.

Tu będą przykłady układów równań liniowych, najspierw *jednorodnych*.

1. Weźmy układ $\dot{x} = Ax$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ z warunkiem początkowym $x_0 \equiv x(0) \equiv \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Zgodnie z ogólną receptą, liczymy wielomian charakterystyczny macierzy: $w_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 4$, którego pierwiastki: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ są wartościami własnymi A .

Będziemy też tu potrzebować wektorów własnych A :

$$v_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$v_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Pamiętacie, co to jest Ker , czyli jądro? Jądem macierzy M nazywamy zbiór wektorów x , takich, że $Mx = \mathbf{0}$. Powiedzenie, że i -ty wektor własny v_i jest jądrem macierzy $A - \lambda_i \mathbf{I}$ to to samo, co powiedzieć, że v_i jest rozwiązaniem układu równań $(A - \lambda_i \mathbf{I})v_i = \mathbf{0}$, tzn. $Av_i = \lambda_i v_i$).

Po znalezieniu wektorów własnych, rozkładamy wektor warunku początkowego w bazie wektorów własnych: $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ i znajdujemy, że $c_1 = 3, c_2 = -1$. Mamy dalej

$$x(t) = e^{At} x_0 = e^{At} (c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = 3e^{-t} v_1 - 1 \cdot e^{3t} v_2 = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 3e^{3t} \\ e^{-t} + 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

2. Weźmy teraz układ $\dot{x} = Ax$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ z warunkiem początkowym

$$x_0 \equiv x(0) \equiv \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Postępujemy analogicznie jak uprzednio: liczymy wielomian charakterystyczny macierzy: $w_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2 + 1$, którego pierwiastki, tzn. wartości własne A , są tym razem *zespolone*: $\lambda_1 = 2 - i, \lambda_2 = 2 + i$.

Liczb zespolonych bać się tu nie należy. Na pośrednich etapach rachunków (wartości własne, wektory własne) możemy mieć do czynienia z liczbami zespolonymi; ale pod koniec (jeśli się nie pomyliły) muszą one wystąpić w takiej kombinacji, aby końcowy wynik był liczbą rzeczywistą.

Liczymy znów wektory własne A :

$$v_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Układy równań z liczbami zespolonymi rozwiązujemy tak samo, jak znane nam układy z liczbami rzeczywistymi).

Rozkładamy wektor warunku początkowego w bazie wektorów własnych:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

i otrzymujemy

$$c_1 = 3 - i, \quad c_2 = 3 + i$$

Stąd rozwiązanie w chwili t jest

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = e^{At} (c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \\ &= (3 - i) e^{(2-i)t} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + (3 + i) e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 3ie^{-it} + e^{-it} - 3ie^{it} + e^{it} \\ 3e^{-it} - ie^{-it} + 3e^{it} + ie^{it} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

i, przypominając sobie zależności między funkcją wykładniczą (od argumentu urojonego) a funkcjami trygonometrycznymi: $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie w postaci

$$x(t) = 2e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t + 3 \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

6 Równania liniowe

6.1 Równania jednorodne

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań:

1. $y'' + y' - 2y = 0$. ($y' = \frac{dy}{dt}$ itd.) Tworzymy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
2. $y'' - 4y' = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{0 \cdot t} = C_1 e^{4t} + C_2$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
3. $y'' + y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 1 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = a_1 e^{it} + a_2 e^{-it}$. Rozwiązanie, zamiast w postaci wykładniczej, można równoważnie zapisać w postaci trygonometrycznej: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
4. $y'' + 6y' + 13y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = -3 - 4i$, $\lambda_2 = -3 + 4i$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = a_1 e^{(-3-4i)t} + a_2 e^{(-3+4i)t} = e^{-3t} (a_1 e^{-4it} + a_2 e^{4it})$, co równoważnie można zapisać w postaci trygonometrycznej: $y = e^{-3t} (C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
5. $y'' - 2y' + y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ posiada jeden pierwiastek podwójny $\lambda = 1$, zatem rozwiązanie ogólne jest $y = (C_1 + C_2 t) e^t$.

6.2 Równania niejednorodne

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań:

1. $y'' + 4y = e^t$ (*). *i)* Znajdujemy Rozwiązanie Ogólne Równania Jednorodnego (RORJ), tzn. z prawą stroną równą zeru: $y'' + 4y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 4 = 0$ ma pierwiastki: $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Wypisujemy od razu RORJ w postaci trygonometrycznej: $\text{RORJ} = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$. *ii)* Znajdujemy Rozwiązanie Szczególne Równania Niejednorodnego (RSRN) metodą 'zgadywania': Przewidujemy postać rozwiązania y_N jako: $y_N = Ae^t$, gdzie A jest stałą; po wstawieniu y_N do (*) dostajemy: $5Ae^t = e^t$, skąd $A = \frac{1}{5}$, zatem $\text{RSRN} = \frac{1}{5}e^t$. *iii)* Rozwiązanie Ogólne Równania Niejednorodnego (RSRN) jest sumą RORJ i RSRN: $\text{RORN} = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t + \frac{1}{5}e^t$.
2. $y'' - 9y = (12t - 8)e^{-3t}$ (**). *i)* RORJ: $\lambda^2 - 9 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. $\text{RORJ} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$. *ii)* RSRN: Niejednorodność jest 'zgadywalna', (bo jest postaci: wielomian razy funkcja wykładnicza). Wykładnik niejednorodności pokrywa się z jedną z wartości własnych, zatem RSRN przewidujemy w postaci: $y_N = t(A + Bt)e^{-3t}$, gdzie A i B są stałymi, które musimy wyznaczyć. Po wstawieniu y_N do (**) dostajemy: $(-2B - 6A - 12Bt)e^{-3t} = (12t - 8)e^{-3t}$, skąd, porównując współczynniki przy potęgach wielomianów po obu stronach, dostajemy: $-12Bt = 12t$, $2B - 6A = 8$, skąd $B = -1$, $A = 1$. *iii)* $\text{RSRN} = \text{RORJ} + \text{RSRN} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + t(1 - t)e^{-3t}$.