

Matematyka I – lista zadań nr 11.

1 Całki oznaczone

1.1 Całki różne

Obliczyć całki:

1. $\int_1^{2e} \ln x dx;$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx;$

3. $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx;$

4. $\int_0^{\sqrt{\frac{3\pi}{2}}} x \sin x^2 dx;$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^3 x dx;$

6. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx;$

7. $\int_0^e \sqrt{\operatorname{tgh} x} dx;$

8. $\int_0^2 \frac{x+4}{(x^2+1)(x+1)^2} dx;$

9. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx;$

10. $\int_0^\pi x^3 \sin x dx;$

11. $\int_0^\pi e^{2x} \sin x dx;$

12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx;$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx;$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^4 x dx;$

15. $\int_0^3 |2-x| dx;$

16. $\int_2^e |\ln x| dx$;

17. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx$;

18. Rozwiązać równanie, tzn. znaleźć x takie, że spełniona jest poniższa równość:

$$\int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt = \frac{\pi}{12}$$

19. Rozwiązać równanie, tzn. znaleźć x takie, że spełniona jest poniższa równość:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t-1}} dt = \frac{\pi}{6}$$

20. Pokazać, że spełniona jest równość:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 0$$

21. Pokazać, że

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

22. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2} dt$$

na przedziale $[-1, 1]$. *Wsk.* Nie liczyć całki!

23. Pokazać, że jeżeli funkcje f , g , f^2 , g^2 są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to jest spełniona następująca równość:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

zwana *nierównością Schwarz*.

24. Niech

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

(a) Sprawdzić, że $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

(b) Wyprowadzić jawne wyrażenie na I_n . Wypisać oddzielne przypadki dla n parzystych oraz nieparzystych. *Wsk.* Całkując przez części, wyprowadzić wzór rekurencyjny wyrażający I_n przez I_{n-2} , a następnie wykorzystując go wielokrotnie, wyrazić I_n przez I_0 lub I_1 .

1.2 Pola powierzchni

Ogólna wskazówka. W wielu spośród poniższych zadań warto naszkicować krzywe.

25. Obliczyć pole powierzchni figury, ograniczonej krzywymi: $y^2 = 2x+1$ oraz $x-y-1 = 0$.
26. Obliczyć pole powierzchni figury, ograniczonej krzywymi: $x^2 = 2py$ oraz $y^2 = 2px$.
27. Obliczyć pole powierzchni figury, ograniczonej krzywymi: $y = x^2$ oraz $y = \frac{x^3}{3}$.
28. Okrąg $x^2 + y^2 = 8$ podzielono parabolą $y = \frac{x^2}{2}$ na dwie części. Obliczyć pole powierzchni każdej z nich.
29. Obliczyć pole powierzchni figury, ograniczonej krzywymi: $y = \frac{\ln x}{4x}$ oraz $y = x \ln x$.

1.3 Długości krzywych

30. Pokazać, że długość L krzywej (gładkiej), danej równaniem $y = f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, jest równa całce:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

31. Obliczyć długość krzywej $y = a \cosh \frac{x}{a}$, gdzie $0 \leq x \leq b$
32. Obliczyć długość paraboli $y = x^2$, gdzie $0 \leq x \leq b$.
33. Obliczyć długość krzywej $y = \ln(1 - x^2)$, gdzie $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.
34. Obliczyć długość krzywej $y = \ln x$, gdzie $\sqrt{5} \leq x \leq 5$.
35. Obliczyć długość krzywej $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.
36. Obliczyć długość krzywej $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, gdzie $a \leq x \leq b$.
37. Rozważmy krzywą sparametryzowaną na płaszczyźnie: $y = F(t)$, $x = G(t)$, gdzie F, G – funkcje gładkie. Pokazać, że długość L takiej krzywej, dla wartości parametru t pomiędzy a oraz b , wynosi

$$L = \int_a^b \sqrt{(F'(t))^2 + (G'(t))^2} dt.$$

38. Znaleźć długość jednego łuku *cykloidy* (krzywej, jaką zakreśla kamyk przyczepiony do opony samochodowej), tzn. krzywej, danej parametrycznie równaniami

$$x(t) = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad R > 0.$$

39. Znaleźć długość *asteroidy*, tzn. krzywej danej równaniem: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Wsk. Sparametryzować asteroidę przez $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$.
40. Znaleźć długość krzywej, danej parametrycznie równaniami: $x = a \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$.

1.4 Środek ciężkości oraz moment bezwładności