Matematyka I – lista zadań nr 4

1. Sprawdzić słuszność wzorów: Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$\max\{x, y\} = \frac{|x - y| + x + y}{2}, \qquad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

2. Niech p oznacza dowolną liczbę pierwszą. Pokazać, że $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

3. Niech p, q będą dwiema różnymi liczbami niewymiernymi. Pokazać, że liczby: $\sqrt{pq}$ oraz $\sqrt{p} - \sqrt{q}$ są niewymierne.

4. Sprawdzić, czy następujące liczby są wymierne czy niewymierne:
$$\sqrt{3} + \sqrt{2}; \qquad \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6}, \quad \sqrt[4]{2}.$$

5. Czy suma, różnica, iloczyn i iloraz dwóch liczb niewymiernych musi być liczbą niewymierną?

6. Piąty, siódmy i dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tworzą kolejne elementy ciągu geometrycznego. Znaleźć ogólny wyraz ciągu geometrycznego.

7. Zysk firmy wynosi zawsze o 8000 PLN więcej niż dwukrotny zysk z roku poprzedniego. Jeżeli po pierwszym roku działalności firma uzyskała 30000 pln zysku, znajdź wzór na zysk w dowolnym roku.

8. Pokazać, że zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$ jest nieograniczony. *Szkic rozwiązania:* z definicji, $\forall_M \exists_{x \in \mathbb{R}} f(x) > M$ czyli bierzemy dowolne M i pokazujemy, ze istnieje takie $x(M)$, że warunek jest spełniony. x zazwyczaj zależeć będzie od M. Można zadanie ułatwić sobie wstępnie szacując funkcję f przez łatwiejszą do analizy.

9. Pokazać, że zbiór liczb postaci $m\sqrt{5} - n, \quad m, n \in \mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry. (Dowód np. jw.)

10. Pokazać, że funkcja $f(x) = x \sin x, x \in]0, +\infty[$ nie jest ograniczona z góry ani z dołu. Dowód przez sprzeczność. Zakładamy, że f jest ograniczona z góry przez jakieś M i pokazujemy, że dla np. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$ tego warunku spełnić się nie da. Podobnie robimy z ograniczeniem z dołu dla np. $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$

11. Wykazać, że kres górny zbioru liczb postaci $\frac{x}{1+x}, x \in \mathbb{R}$ jest równy 1. Rozwiązanie: a) Zauważamy, że $\frac{x}{1+x} < 1, x > 0$. b) pokazujemy, że dla każdej liczby postaci $1 - \epsilon, \epsilon > 0$ istnieje x_0 takie, że $\frac{x_0}{1+x_0} > 1 - \epsilon$.

12. Wykazać, że liczba 3 nie jest kresem górnym zbioru liczb postaci $\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$. Dowód: wystarczy pokazać, że każda liczba tej postaci jest np. mniejsza od $\frac{3}{2}$. *Uwaga:* Liczba 3 jest ograniczeniem górnym! jak zresztą każda liczba $\geqslant \frac{3}{2}$.

13. Pokazać, że kres dolny zbioru liczb postaci $\frac{-x^2}{1+x^4}, x \in \mathbb{R}$ wynosi $-\frac{1}{2}$.

14. Podaj przykłady zbiorów A, dla których: $\sup A \in A$,$\sup A \notin A$, $\inf A \in A$,$\inf A \notin A$,$\sup A = \inf A$.

15. Zbadać, czy ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest monotoniczny i ograniczony.

16. Wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ jest ograniczony z góry przez 1. Rozwiązanie: rozłożyć $\frac{1}{k(k+1)}$ na różnicę dwóch ułamków i wyjdzie. (a przynajmniej powinno...

17. Wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ jest malejący i ograniczony.

18. Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$.

19. Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$.

20. Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

21. Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n\to+\infty} n^2 + 3 = +\infty$.

22. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (tu już można korzystać z twierdzeń o iloczynie, ilorazie itp. ciągów, których granice juz znamy): $u_n = \frac{n}{n+1}$, $u_n = \frac{n^2-1}{3-n^2}$, $u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$, $u_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$, $u_n = \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3$, $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$, $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n-1}$, $u_n = \frac{2-5n-10n^2}{3n+15}$, $u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$, $u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$, $u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n^2-n}}$.

23. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$,$u_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-15}$, $u_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$.

24. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $u_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n-7}}$, $u_n = \frac{53^{2n}-1}{49^n+7}$, $u_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$, $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$.

25. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (typowe na trzy ciągi): $u_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$, $u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$, $u_n = \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n + (\frac{3}{4})^n}$.

26. Na odsapnięcie od liczenia granic Niech $T_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}_+$. Znaleźć $T_1(x)$. Posługując się tożsamością trygonometryczną $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$ (kto nie udowadniał tego to niech udowodni teraz; a z rozpędu, analogicznie dla $\sin(A+B)+\sin(A-B) = \ldots$; kto chce, niech powie tu gwoli komentarza o dudnieniach) pokazać, że $T_2(x) = 2x^2 - 1$ oraz, że $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$. Udowodnić indukcyjnie lub nie, że $T_n(x)$ jest wielomianem stopnia n (to też jest zadanie maturalne, maj 2004)

Gdyby komu było mało zadań na kresy i liczenie granic ciągów, to znajdzie mrowie dodatkowych zadań w zbiorze: Krysicki, Włodarski: Zbiór zadań z analizy matematycznej; bądź Banaś, Wędrychowicz pod tym samym tytułem (rozdz. VI). **Uwaga:** Na 1. kolokwium granic ciągów jeszcze nie będzie!