Matematyka I – lista zadań nr 5.

Motto: Szumy, zlepy, CIĄGI

1. Obliczyć granice ciągów:

   (a) ■ $x_n = \frac{n}{n^2+2}\cos(2n+1)$;

   (b) $x_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^4+1}\sin 2^n$;

   (c) ■ $x_n = \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{2n^2+3}}$;

   (d) ■ $x_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{5n^3-2n^2+3n+2}$;

   (e) $x_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n+3} - \frac{n}{2}$;

   (f) ■ $x_n = \frac{5\cdot 3^{n+2}+3\cdot 4^n}{2^n+4^{n+5}}$;

   (g) $x_n = \frac{\binom{n+2}{n}}{n^2}$

   (h) $x_n = \frac{\sqrt{n^2+n+3}-n}{\sqrt{n^2+2n+5}-n}$

   (i) ■ $x_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}}$

   (j) $x_n = \frac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$

   (k) $\frac{\sqrt{n^4+n^3}+n+\sin n}{n^2+n+7}$

2. ■ Pokazać, że $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. *Wsk.* Najsampierw wykazać nierówność podobną do nierówności Bernoulliego: $\forall_{n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2} : \forall x > 0 : (1+x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2$. Następnie postępować podobnie jak przy dowodzie równości $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$, który był na wykładzie.

3. Wykorzystując twierdzenie o trzech ciągach, obliczyć granice następujących ciągów:

   (a) ■ $x_n = \sqrt[n]{5\cdot 4^n + 7\cdot 9^n}$;

   (b) ■ $x_n = \sqrt[n]{6\cdot 3^n + (\cos n)^n + 7\cdot 4^{2n}}$;

   (c) $x_n = \sqrt[n]{10+\sin^2 n}$;

   (d) ■ $x_n = \sqrt[n]{5n - 3\cos(2n)}$;

   (e) $x_n = \sqrt[n]{\frac{(-1)^n}{n^2} + 2n^2}$

(f) $x_n = \sqrt[n]{2n^3 - n^2 + 5n + 9}$

(g) $x_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$

(h) ■ $x_n = n\left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n}\right)$

(i) $x_n = \left(\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)} - \sqrt[3]{n(n-1)(n+3)}\right)$

(j) ■ $x_n = n\left(\sqrt[3]{n^3+n+1} - n\right)$

(k) $x_n = \left(\sqrt[4]{n(n^2-1)(n+2)} - n\right)$

(l) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{n(n+1)}$

(m) $x_n = \left(\sqrt[10]{n^3(n+1)^7} - n\right)$

4. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$. *Wsk.* Pokazać najsampierw, że $n < 2^n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, a następnie skorzystać z tw. o trzech ciągach, umiejętnie szacując 2^{-n}.

5. ■ Rozszerzyć powyższy wynik pokazując, że dla ciągu $a_n = a^n$, gdzie $|a| < 1$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Wsk.* Pokazać najsampierw, że $\frac{1}{n} > a^n$ dla $n > M$; jakie można tu wybrać M?

6. ■ Wykorzystując powyższe zadanie, przypomnieć sobie (lub wyprowadzić – jeśli ktoś nie zna) wzór na sumę szeregu geometrycznego: Niech $s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n$; wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$ dla $|q| < 1$.

7. ■ Pokazać, że jeśli ciąg $\{a_n\}$ spełnia: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$, to ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do zera. *Wsk.* Wykorzystać powyższe zadanie oraz twierdzenie o trzech ciągach do oszacowania ciągu $\{a_n\}$.

8. ■ Pokazać, że:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{2^n} = 0.$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n} = 0.$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = 0.$

9. Pokazać, że: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, gdzie a jest dowolną liczbą.

10. *O pułapkach dowodów kalkulatorowych*: Kuszące jest liczenie numeryczne granic ciągów, np. gdy ktoś nie potrafi inaczej, lub kiedy chce sprawdzić czy dobrze policzył w inny sposób. Np. większość przykładów z zad. 1 daje się sprawdzić w ten sposób (a wszystkie, jeśli ktoś pokombinuje, aby nie przekroczyć zakresu standardowego

kalkulatora). Czasem jednak ten sposób może być mylący. Np: Policzyć kilka pierwszych wyrazów ciągu $a_n\frac{100^n}{n!}$. Dla jakiego n następuje przepełnienie kalkulatora? Ile wynosi granica ciągu? Porównać zachowanie kilku pierwszych wyrazów z wartością granicy. Wyjaśnic obserwowane zjawisko przez oszacowanie, dla jakiego n wartość a_n jest maksymalna; oszacować, począwszy od jakiego n mamy $a_n < 1$, $a_n < 10^{-3}$, $a_n < 10^{-9}$.

11. Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

12. ■ Pokazać, że ciąg $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n}$ jest zbieżny. Oszacować granicę tego ciągu. *Uwaga:* Granicę policzyć nietrudno, jeśli zna się patent – pojawi się on za ok. miesiąc. W tym momencie *liczenie* granicy nie jest obowiązkowe.

13. Jw. dla ciągu $a_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$, $|x| < 1$.

14. Jw. dla ciągu $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2^2}{2^2} + \dfrac{3^2}{2^3} + \cdots + \dfrac{n^2}{2^n}$.

15. Pokazać, że ciąg $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ jest zbieżny. Pokazać, że granica jest nie większa niż 2. *Uwaga.* Granica jest policzalna, ale patent jest bardziej wyśrubowany – może będzie o tym w 3. semestrze. Jeśli kogoś ciekawi, niech znajdzie gdzieś wartość dokładną granicy (np. w Wikipedii) i porówna z powyższym oszacowaniem.

16. Jw. dla ciągu $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \cdots + \dfrac{1}{n^4}$.

Parę zadań o kresach

17. Zbadać ograniczoność i wyznaczyć (jeśli istnieją) kresy następujących zbiorów:

    (a) ■ $X = \left\{2 + \dfrac{1}{3^n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

    (b) $X = \left\{\dfrac{n^2+n+1}{n+2} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

    (c) ■ $X = \left\{n \sin(\dfrac{n\pi}{2}) \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

    (d) ■ $X = \left\{3 + \dfrac{(-1)^n n}{n^2+2} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

18. Wyznaczyć kresy zbiorów:

    (a) $A = \left\{\dfrac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$

    (b) $B = \left\{\dfrac{n}{n+k} \ : \ k, n \in \mathbb{N}\right\}$

Ciągi rekurencyjne

19. Znaleźć granice ciągów rekurencyjnych: *Wsk.* do zadań poniżej: Naturalnym kandydatem na granicę ciągu rekurencyjnego $x_{n+1} = f(x_n)$ jest *punkt stały* funkcji f, tzn. liczba x^* spełniająca $f(x^*) = x^*$. Trzeba to jednak uzasadnić.

(a) $x_0 = a > 0, \quad x_{n+1} = 2\sqrt{x_n}$. *Wsk.* Pokazać, że dla $a < 4$ ciąg jest rosnący i ograniczony (przez co?) a dla $a > 4$ – malejący i ograniczony. (Przy wykazywaniu tego dopuszczalne jest używanie rachunku różniczkowego). Liczenie kolejnych wyrazów ciągu można zilustrować graficznie (pomocne jako ilustracja tego, jak ciąg dąży do granicy, ale *nie jest* to dowód).

(b) ■ $x_0 = a > 0, x_{n+1} = \sqrt[3]{2 + 3x_n}$. *Wsk.* jw.

(c) $x_0 = a > 0, x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + 7x_n}$. *Wsk.* jw.

(d) $x_0 = a > 0, x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n + 1}$. *Wsk.* jw.

(e) ■ $x_0 = a > 0, x_{n+1} = 2 + \dfrac{3}{x_n}$. *Wsk.* Pokazać, że podciąg wyrazów parzystych jest monotoniczny (rosnący czy malejący? – odpowiedź zależy od a) i podciąg wyrazów nieparzystych jest też monotoniczny (jaki dokładniej? – odpowiedź też zależy od a). Podciągi te są więc zbieżne. Pokazać, że ich granica jest wspólna, jest więc granicą wyjściowego ciągu.

(f) $x_0 = a > 0, x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$. *Wsk.* jw.

(g) $x_0 = a > 0, x_{n+1} = e^{\frac{1}{x} - 1}$. *Wsk.* jw.

Ciągi z funkcjami $\exp$ **i** $\ln$

■ Poniższe dwie własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej będą dowodzone niedługo na wykładzie, ale proszę się z nimi zapoznać teraz.

- Funkcje: wykładnicza i logarytmiczna są *ciągłe*.
- Mają miejsce nierówności: $\forall_{x \in \mathbb{R}}$: $1 + x \leqslant e^x$, $\forall_{x<1}$: $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$. Zilustrować je na wykresie.
- Wywnioskować, że wynikają z nich nierówności: Dla $x > 0$, zachodzi: $\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$

20. ■ Używając powyższych faktów pokazać następujące twierdzenie.

Tw. Niech będą dane dwa ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ o własnościach: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, przy czym granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = g$ jest skończona. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^{b_n} = e^g$.

21. Znaleźć granice ciągów:

(a) ■ $u_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$,

(b) ■ $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$,

(c) $u_n = \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$,

(d) ■ $u_n = \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^{-n+7}$,

(e) $u_n = \left(\dfrac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$,

(f) ■ $u_n = \left(\dfrac{n^2+2}{3n^2+1}\right)^{2n^2}$

22. Znaleźć granice ciągów:

(a) ■ $x_n = n[\ln(n+5) - \ln n]$

(b) ■ $x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$

(c) ■ $x_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$

(d) $x_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{7}}{3}\right)^n$

(e) $x_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2}$

23. Udowodnić *twierdzenie Stolza*:

Jeżeli są dane dwa ciągi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, przy czym:

(a) Ciąg $\{y_n\}$ jest ściśle rosnący,

(b) Ciąg $\{y_n\}$ jest rozbieżny do nieskończoności: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$,

(c) Istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$,

to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

24. Korzystając z twierdzenia Stolza, pokazać, że:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \dfrac{1}{4}$,

(b) ogólnie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k} - \dfrac{n}{k+1}\right) = \dfrac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 3^3 + \cdots + (2n+1)^k}{n^{k+1}} = \dfrac{2^k}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.