

MATEMATYKA II – ciągłość i różniczkowalność

lista nr 6, 31.03.2012

Przypomnienie def.: Funkcja jest różniczkowalna rzędu r , jeżeli ma wszystkie pochodne cząstkowe do rzędu r włącznie i są one ciągłe.

1. Zbadać ciągłość następujących funkcji $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$:

(a) $f(0, 0) = 0$ i $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$;

(b) $f(0, 0) = 0$ i $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$;

(c) $f(0, 0) = 0$ i $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. Obliczyć z definicji pochodne kierunkowe podanych niżej funkcji w kierunku podanych niżej wektorów.

(a) $f(x, y) = x^2 + xy + 3y - 1$ w punkcie $p = (1, 1)$ w kierunku wektora $v = [2, 1]$.

(b) $g(x, y) = \sqrt{x + y}$ w punkcie $p = (4, 5)$ w kierunku wektora $v = [-1, 1]$.

(c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ w punkcie $p = (1, 0, -1)$ w kierunku wektora $v = [0, 1, 2]$.

3. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

(a) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;

(c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(d) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

(e) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;

(f) $f(u, v) = \ln(u + \ln v)$;

(g) $g(x, y, z) = (\sin x)^{yz}$;

(h) $h(x, y, z) = \ln \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

4. Obliczyć z definicji pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji w następujących punktach:

(a) $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $p = (3, 4)$;

(b) $f(x, y) = \ln(x + \frac{y}{2x})$ w punkcie $p = (1, 2)$;

(c) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + xz$ w punkcie $p = (1, -1, 1)$.

5. Zbadać różniczkowalność funkcji:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$;

- (c) z zad. 1b);
- (d) funkcji: $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$: $f(0, 0) = 0$ i $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$.
6. Niech $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$: $f(0, 0) = 0$ i $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$. Pokazać, że f jest ciągła oraz ma pochodne cząstkowe w dowolnym punkcie płaszczyzny, ale nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$. Pokazać, że f ma w punkcie $(0, 0)$ pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach.
7. Niech $f(x, y) = x^y$, $x > 0, y > 0$. Pokazać, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
8. Niech $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $x \neq 0$. Pokazać, że $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.
9. Znaleźć pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji:
- $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;
 - $g(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$;
 - $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$.
10. Pokazać, że 2. pochodne cząstkowe mieszane poniższej funkcji istnieją w $(0, 0)$, ale *nie są* tam równe: $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$: $f(0, 0) = 0$ i $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$.
11. Obliczyć macierz Jacobiego superpozycji $T \circ S$ dwóch odwzorowań i sprawdzić, że $D(T \circ S) = DT \circ DS$:
- $S : \mathbb{R}^1 \ni x \rightarrow (x, \log(1 + x^4)) \in \mathbb{R}^2$,
 $T : \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \rightarrow (\sin u, e^{u+v}, 1) \in \mathbb{R}^3$.
 - $S : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (x - y - z) \in \mathbb{R}^1$,
 $T : \mathbb{R}^1 \ni t \rightarrow (2^t, 1 + t^2, 0) \in \mathbb{R}^3$.
 - $S : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (xy, x + y, \sin xy) \in \mathbb{R}^3$,
 $T : \mathbb{R}^3 \ni (X, Y, Z) \rightarrow (X + Y + Z, -Y) \in \mathbb{R}^2$.
12. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = y f(x^2 - y^2)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

13. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ spełnia równanie

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 - 2y^2$$

14. Pokazać, że funkcja: $z(x, t) = \phi(x - vt) + \psi(x + vt)$, gdzie ϕ, ψ są dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami, zaś v – parametr, spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Uwaga. Powyższe równanie to *równanie falowe*, opisujące rozchodzenie się fali w ośrodku jednowymiarowym. Zinterpretować powyższe rozwiązanie jako superpozycję dwu fal o dowolnym kształcie, rozchodzących się w przeciwnych kierunkach.