Matematyka I – lista zadań nr 7.

1. ■ Wykaż opierając się na def. Cauchy'ego, że $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.

2. ■ Zbadać ciągłość funkcji: $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

3. ■ Ciągłość jednostajna: opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $[1, +\infty[$.

4. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, 2[$.

5. ■ Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.

6. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.

7. Czy funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, 1]$?

8. ■ Czy funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, \infty[$?

9. Czy funkcja $f(x) = e^x$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, \infty[$? A w przedziale $]-\infty, 0]$?

10. ■ Pokazać, że *funkcja Dirichleta*: $f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie.

11. ■ Pokazać, że funkcja Dirichleta jest granicą całkiem przyzwoicie wyglądającego ciągu: $f_D(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty}[\cos(n!\pi x)]^{2k}$ (zwrócić uwagę na kolejność granic!)

12. Definicja. Sprawdzić, że spełniona jest 'jedynka hiperboliczna'. Która jest symetryczna a która antysymetryczna względem zamiany $x \to -x$? Wyrazic $\sinh 2x$ i $\cosh 2x$ przez $\sinh x$ i $\cosh x$. Naszkicować wykresy. Obliczyc funkcje odwrotne (pamiętając o dziedzinach).

Pochodne

13. Niech ■ $f(x) = \sqrt{9x+2}$. Obliczyć z definicji $f'(3)$.

14. Niech ■ $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Obliczyć z definicji $f'(2)$.

15. Niech ■ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$. Obliczyć z definicji $f'(1)$.

16. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Obliczyć z definicji $f'(2)$.

17. Niech $f(x) = e^{x-1}$. Obliczyć z definicji $f'(3)$.

18. ■ Obliczyć (jeśli istnieje) $f'(1)$ dla funkcji: $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x + 1 & \text{dla} \quad x \leqslant 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}$

19. ■ Obliczyć (jeśli istnieją) $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, $f'(0)$ dla funkcji: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla} \quad x < 0 \\ x(1-x)(2-x) & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

20. Obliczyć pochodne funkcji po skorzystaniu z odpowiednich twierdzeń:

    (a) $\frac{1}{x^3-1}$;
    (b) $\frac{x^2+2x+2}{x^2-1}$;
    (c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$;
    (d) $\cos^5 x$;
    (e) $\sin(5x-3)$;
    (f) $\sin(\sqrt[3]{1-x^3})$;
    (g) $\frac{x^2}{4^x}$;
    (h) $\arcsin\frac{2}{x}$;
    (i) $\ln\sin x$;
    (j) $\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$;
    (k) $e^{\sqrt{2+x^2}}$;
    (l) $\cosh(x^3-2x+1)$;

21. Obliczyć pochodne funkcji:

    (a) x^x;
    (b) $(\sin x)^{\cos x}$;
    (c) $x^{\sin x}$.

22. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x)=\sqrt{\ln(1+x^2)}$ w punkcie $x=0$.

23. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x)=\sqrt{\cosh x-1}$ w punkcie $x=0$.

24. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ w punkcie $x=0$. (Funkcja f jest określona na $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$).

25. Obliczyć pierwsze, drugie i trzecie pochodne funkcji:

    (a) $f(x)=e^{-x^2}$;
    (b) $f(x)=\operatorname{tg} x$;
    (c) $f(x)=\operatorname{th} x$.

26. Obliczyć $n-$te pochodne funkcji $f(x)$:

    (a) $f(x)=\sin x$;
    (b) $f(x)=\cos x$;
    (c) $f(x)=\sinh x$;
    (d) $f(x)=\cosh x$;

(e) $f(x) = e^{2x}$;

(f) $f(x) = e^{-3x}$;

(g) $f(x) = \sin^2 x$; *Wsk.* Wyrazić $\sin^2 x$ przez funkcję trygonometryczną podwojonego kąta.

(h) $f(x) = \cos^2 x$;

(i) $f(x) = \ln x$;

(j) $f(x) = \frac{1}{(x+1)2}$;

(k) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; *Wsk.* Rozłożyć na ułamki proste.

(l) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$;

(m) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

27. Znaleźć styczne i prostopadłe do następujących krzywych w następujących punktach:

(a) paraboli $y = x^2$ w punkcie $x = 3$;

(b) wykresu funkcji $y = e^x$ w punkcie $x = 1$;

(c) wykresu funkcji $y = \ln x$ w punkcie $x = e^2$;

(d) krzywej danej równaniem $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (jaka to krzywa?) w punkcie $(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$;

(e) krzywej danej równaniem $x^2 + xy + y^2 = 3$ (jaka to krzywa?) w punkcie $(1, 1)$.

28. Pokazać, że funkcja $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $x = 0$.