

Pytania egzaminacyjne przedmiotu: Matematyka I

Powtórzenie i uzupełnienie ze szkoły średniej.

1. Rachunek logiczny: koniunkcja, alternatywa, zaprzeczenie zdań, prawa de Morgana, kwantyfikatory, zaprzeczanie kwantyfikatorów.
2. Rachunek zbiorów: Suma, iloczyn, różnica mnogościowe, związek z rachunkiem zdań, iloczyn kartezjański.
3. Funkcja i odwzorowanie. Dziedzina funkcji, wartości, argumenty, obraz, przeciwobraz, injekcja, surjekcja, bijekcja. Funkcja odwrotna. Wykres funkcji.
4. Funkcje liniowe, kwadratowe, homografie. Asymptoty.
5. Niektóre dalsze własności funkcji: Funkcje parzyste, nieparzyste, wykresy: $f(-x)$, $f(x+a)$, $f(x)+b$, $a f(x)$, $f(ax)$. (a, b – stałe).
6. Funkcje trygonometryczne, jedynka trygonometryczna, $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$. Zachowanie funkcji w dziedzinie, okresowość, amplituda, okres, układ współrzędnych biegunowych. Funkcje odwrotne do trygonometrycznych.
7. Wektory, liniowa niezależność, baza, rozkład wektora w bazie.
8. Iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy, zastosowania.
9. Zasada indukcji matematycznej.
10. Funkcja potęgowa, dwumian Newtona, wielomiany i ich pierwiastki, twierdzenie Bezout.
11. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.

Początek analizy właściwej

1. Liczby naturalne, całkowite, wymierne. Niezupełność zbioru liczb wymiernych: dowód że pierwiastek z 2 jest liczbą niewymierną.
2. Liczby rzeczywiste. Aksjomatyka zbioru liczb rzeczywistych.
3. Podzbiory $\mathbf{R}$: zbiór ograniczony i nieograniczony, kresy zbioru, istnienie kresów.
4. Ciąg, pojęcie granicy ciągu.
5. Przykłady obliczania granic. Granice: sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu ciągów.
6. Twierdzenie o trzech ciągach.
7. Ciąg Cauchy'ego i własność Cauchy'ego. Równoważność definicji zbieżności: zwykłej i Cauchy'ego.
8. Podciągi ciągów. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.
9. Liczba e , wyrażenie e przez granicę sumy i iloczynu, równoważność tych sposobów.
10. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.
11. Ciągłość funkcji w punkcie – definicje Heinego i Cauchy'ego i ich równoważność.
12. Funkcje ciągłe. Ciągłość sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, złożenia (superpozycji) funkcji ciągłych. Ciągłość jednostajna.
13. Własność Darboux, twierdzenie Weierstrassa dla funkcji ciągłych.
14. Definicja pochodnej. Interpretacja geometryczna. Równanie stycznej i normalnej.
15. Twierdzenia o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu funkcji różniczkowalnych.
16. Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a, Cauchy'ego.
17. Pochodna funkcji odwrotnej i funkcji złożonej.
18. Reguły de l'Hospitala, przykłady.
19. Wzór Taylora. Reszta w postaci Lagrange'a i Cauchy'ego.
20. Punkty krytyczne i ekstrema lokalne. Kryteria na ekstrema.
21. Wypukłość funkcji, nierówność Jensena, związek wypukłości z drugą pochodną.
22. Całka nieoznaczona. Zamiana zmiennych w całce. Całkowanie przez części.
23. Podstawowe typy całek. Całkowanie funkcji wymiernych.
24. Całkowanie funkcji trygonometrycznych.
25. Całkowanie funkcji niewymiernych.
26. Sumy: górna i dolna, suma wypunktowana, całki: górna i dolna. Całka Riemanna.

- 27. Własności całki. Klasy funkcji całkownych.
- 28. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.
- 29. Twierdzenia o wartości średniej w rachunku całkowym.
- 30. Liczby zespolone i działania algebraiczne na nich. Płaszczyzna zespolona. Postać trygonometryczna liczby zespolonej.