

1 Rozwiązywanie układów równań. Wyznaczniki.

2 Wektory – kilka faktów użytkowych

2.1 Wektory.

2.1.1 Wektor jako n -ka liczb

W fizyce mamy do czynienia z pojęciami lub obiektami o różnym charakterze. Są np. wielkości, które można charakteryzować podaniem *jednej* liczby – np. masa, temperatura. Nazywamy je *skalarami*. Inaczej jest, gdy musimy podać położenie np. *punktu w przestrzeni*. Do podania położenia np. samolotu w przestrzeni trzeba wskazać jego długość i szerokość geograficzną oraz wysokość, na jakiej leci – więc *trzy* liczby. Położenie punktu w przestrzeni jest przykładem *wektora*. Poszczególne współrzędne nazywamy *składowymi* wektora.

Piszemy więc, np. dla wektora $\mathbf{x}$ wskazującego położenie punktu w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Tak jest dla wektora w przestrzeni trójwymiarowej; wektor na płaszczyźnie ma dwie składowe. Można również rozpatrywać wektory z $\mathbb{R}^n$ jako (uporządkowanej) n -ki liczb; będziemy to robić później.

(Inne oznaczenia wektora to: $\vec{x}$; $\underline{x}$). W tych notatkach wektory będą oznaczane generalnie grubymi literami; ale gdyby przyszło pisać na tablicy, wykładowca będzie oznaczał wektory strzałką, jako że łatwiej to pisać niż grube litery kredą.)

(Generalnie będziemy się trzymać powyższej notacji, tzn. zapisu wektora jako *kolumny* liczb. Czasem – dla oszczędności miejsca – będziemy też stosować zapis *wierszowy*, tzn. $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$).

Wektory ilustrujemy w sposób, który Czytelnik/Słuchacz z pewnością zna, tzn. jako strzałki. Traktujemy jako równoważne wektory zaczepione w różnych punktach.

RYS.

(Później pojawi się potrzeba rozpatrywania sytuacji, gdy trzeba uwzględniać również punkt zaczepienia wektora; na razie jednak takich sytuacji nie rozpatrujemy).

2.1.2 Dwa podstawowe działania na wektorach

Na wektorach możemy wykonywać dwa podstawowe działania¹:

- *Dodawanie wektorów*: Dla dowolnych wektorów $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ określamy ich sumę jako wektor $\mathbf{z}$: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, o składowych

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

¹za chwilę poznamy ich więcej, ale nie są one tak podstawowe – w tym sensie, że wymagają dodatkowych struktur geometrycznych na przestrzeni

- *Mnożenie wektora $\mathbf{x}$ przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$* : Wektorem $\alpha\mathbf{x}$ nazywamy wektor o składowych

$$\alpha\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$$

RYS. RYS. – ilustracje dwuwymiarowe

Mamy następujące ważne pojęcie:

Def. *Kombinacją liniową k wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ ze współczynnikami $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (gdzie $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$) nazywamy wektor $\mathbf{Y}$ określony jako*

$$\mathbf{Y} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j\mathbf{x}_j. \quad (1)$$

2.2 Bazy. Rozkład wektora w bazie.

Zauważmy, że dowolny wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

gdzie oznaczyliśmy: $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Znaczy to, że *dowolny* wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

można przedstawić jako *liniową kombinację* wektorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Wektory te stanowią przykład *wektorów bazowych*, tzn. takich, że dowolny wektor z $\mathbb{R}^3$ można *jednoznacznie* przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy. Zapiszmy to formalnie:

Def. *Bazą w $\mathbb{R}^3$ nazywamy taki zbiór trzech wektorów z $\mathbb{R}^3$, że dowolny wektor z $\mathbb{R}^3$ można *jednoznacznie* przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy.*

Przykł. Omówione dopiero co wektory $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ stanowią bazę; jest to tzw. *baza standardowa*. Weźmy inne trzy wektory: $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, określone następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Czy stanowią one bazę? Jest tak, jeśli wyrażenie wektorów $\{\mathbf{f}_i\}$ przez $\{\mathbf{e}_i\}$ jest *odwracalne*, tzn. gdy $\{\mathbf{e}_i\}$ wyrażają się przez $\{\mathbf{f}_i\}$ *jednoznacznie*. Tutaj tak jest; gdy bowiem potraktujemy (2) jako układ równań na niewiadome $\{\mathbf{e}_i\}$, to możemy go rozwiązać i mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

W ten sposób, dowolny wektor $\mathbf{x}$ możemy wyrazić w bazie $\{\mathbf{f}_i\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 &= x_1\left(-\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2\right) + x_2\left(\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2\right) + x_3\left(\mathbf{f}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)\mathbf{f}_1 + \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)\mathbf{f}_2 + x_3\mathbf{f}_3. \end{aligned}$$

2.3 Iloczyn skalarny i zastosowania.

2.3.1 Definicja ogólna i standardowy iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ jest liczbą. Oznaczamy go: $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. (Inne oznaczenia: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, (\mathbf{x}|\mathbf{y})$). Żądamy, aby iloczyn skalarny spełniał następujące własności dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ oraz współczynnika $\alpha \in \mathbb{R}$:

- Nieujemność: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, przy czym równość $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ zachodzi tylko dla wektora zerowego.
- Symetria: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- Liniowość: $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. (Nazywa się czasem tę własność *liniowością multiplikatywną*).
- Rozdzielność: $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$. (Tę własność nazywa się też *liniowością addytywną*).

Iloczyn skalarny można wprowadzać na wiele sposobów (tzn. można znaleźć wiele funkcji $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, spełniających powyższe warunki). W naszej euklidesowej przestrzeni jest jednak jedna wyróżniona funkcja, mająca postać:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \equiv \sum_{i=1}^3 x_iy_i. \quad (4)$$

Powyższe warunki łatwo się sprawdza dla (4).

Aby bardziej uzmysłowić sobie znaczenie geometryczne powyższego wzoru, zastosujmy go najspierw do iloczynu skalarnego wektora samego z sobą. Mamy:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

i z tw. Pitagorasa widzimy, iż jest to *kwadrat długości* wektora $\mathbf{x}$. Długość wektora $\mathbf{x}$ będziemy oznaczać jako $\|\mathbf{x}\|$; mamy więc:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Uwaga. Długość wektora (zwaną czasem *normą*) określamy analogicznym wzorem dla *dowolnego* iloczynu skalarnego, nie tylko standardowego:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}. \quad (5)$$

W celu dalszego zobaczenia własności geometrycznych iloczynu skalarnego, pokażemy ważną nierówność.

2.3.2 Nierówność Schwarza

Tw.. *Nierówność Schwarza* Załóżmy, że mamy przestrzeń wektorową² z iloczynem skalarnym. Wtedy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zachodzi nierówność

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \quad (6)$$

²Tu: $\mathbb{R}^3$; ale nier. Schwarza prawdziwa jest dla $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego n .

Dow. Z wektorów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ zbudujemy następującą kombinację liniową: $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, i obliczymy iloczyn skalarny tego wektora samego z sobą. Mamy, z warunku nieujemności iloczynu skalarnego:

$$(\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y}) \geq 0. \quad (7)$$

Jednocześnie:

$$(\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + t^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Popatrzmy na to wyrażenie jako na *trójmian kwadratowy* w zmiennej t . Z nieujemności iloczynu skalarnego (7) wynika, że trójmian ten jest nieujemny dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ oraz t . Skoro tak, to wyróżnik tego trójmianu jest *niedodatni*:

$$\Delta = 4(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq 0,$$

a to znaczy, że

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

lub, wyciągając pierwiastek kwadratowy i uwzględniając definicję długości wektora (5), otrzymujemy nierówność (6). ■

2.3.3 Interpretacja geometryczna iloczynu skalarnego

Utwórzmy teraz, dla dowolnych *niezerowych* wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ wielkość

$$K = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Z nierówności Schwarza widzimy, że K może przyjmować wartości ze zbioru $[-1, 1]$. (Dwie skrajne wartości są osiągane dla $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ – wtedy $K = -1$; oraz dla $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ – wtedy $K = +1$).

Teraz *zdefiniujemy* kąt θ pomiędzy wektorami $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jako

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}. \quad (8)$$

Widać, że ta definicja ma szansę być sensowna, ponieważ: $\theta = 0$ dla $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\theta = \pi$ dla $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ oraz θ leży pomiędzy tymi skrajnymi wartościami dla innego wyboru $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{y}$.

Uwaga. Powyższy wzór jest często używany jako *definicja* iloczynu skalarnego. Wtedy ta definicja ma postać:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta,$$

zaś wyrażenie (4) pojawia się jako jej konsekwencja. Tu przyjęliśmy odwrotną kolejność – gwoili ogólności: Kąt pomiędzy wektorami można zdefiniować wzorem (8) dla *dowolnego* iloczynu skalarnego, niekoniecznie standardowego.

W celu lepszego 'wyczucia' iloczynu skalarnego, zastosujmy go teraz do wektorów bazy $\{\mathbf{e}_i\}$ (tzn. bazy *standardowej*, nazywanej też *kartezjańską*). Mamy, np.:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

i tak samo dla wektorów $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Mamy też:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

i podobnie dla innych wektorów bazy o różnych wskaźnikach:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0 \quad (\text{i symetrycznie } (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0 \text{ itd.})$$

Możemy to skrótowo zapisać jako:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

(gdzie liczby i, j – wskaźniki – mogą przyjmować wartości 1, 2, 3), zaś symbol δ_{ij} zwany jest *deltą Kroneckera* i jest zdefiniowany następująco:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } i = j \\ 0, & \text{jeżeli } i \neq j \end{cases}$$

Jak zinterpretujemy powyższe równości dla różnych wskaźników? Możemy na nie popatrzeć jako na wyrażenie faktu, że $\mathbf{e}_1$ jest *prostopadły* do $\mathbf{e}_2$ itd.; bo skoro iloczyn skalarny dwu niezerowych wektorów jest równy zeru, to kąt pomiędzy nimi jest równy $\frac{\pi}{2}$. (Wektory prostopadle nazywamy też *ortogonalnymi*).

Okazuje się, że iloczyn skalarny ma ważną własność, której teraz nie pokażemy (odkładając ją na ok. 3 miesiące, kiedy nabędziemy więcej wprawy w przestrzeniach wektorowych), a mianowicie, iż jest on *niezmienniczy względem obrotu baz*. To znaczy, gdy mamy dwie bazy kartezjańskie, obrócone względem siebie, to iloczyn skalarny *nie zależy* od tego, w której bazie go liczymy.

Korzystając z niezmienniczości iloczynu skalarnego względem obrotów, wyprowadzimy inne pożyteczne wyrażenie na iloczyn skalarny:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta, \quad (9)$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorami, mierzonym od $\mathbf{x}$ do $\mathbf{y}$.

Przejdźmy bowiem przez obrót do takiego układu współrzędnych, że wektor $\mathbf{x}$ ma różną od zera tylko pierwszą składową, zaś wektor $\mathbf{y}$ – tylko pierwszą i drugą.

Mamy wtedy:

(RYS.)

Jak pamiętamy, funkcja $\cos(\cdot)$ jest funkcją *parzystą*, zatem sprawdzamy, że iloczyn skalarny jest *przemienny*:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}. \quad (10)$$

2.3.4 Zastosowanie: Praca w polu sił.

$$W = (\mathbf{F}, \mathbf{s}) = F s \cos \alpha$$

2.4 Iloczyn wektorowy i zastosowania.

2.4.1 Permutacje (zb. 3-elementowego), parzyste i nieparzyste

2.4.2 Symbol zupełnie antysymetryczny

ϵ_{ijk}

2.4.3 Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \quad z_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j y_k;$$

konkretnie:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

Własności iloczynu wektorowego:

- $\mathbf{z}$ jest prostopadły do $\mathbf{x}$ oraz do $\mathbf{y}$. (Tu rachunek).
- $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ (tu uzasadnienie)
- Długość wektora $\mathbf{z}$ nie zależy od wyboru bazy, w której się go liczy (musi to być tylko baza kartezjańska, tzn. $(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = \delta_{ij}$). (To jest zapodane na wiarę – uzasadnienie będzie później). (Niezła dyskusja w: Byron, Fuller, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, t. 1).
- Konsekwencja tej własności: Przejdźmy do takiej bazy, której pierwsza oś pokrywa się z wektorem $\mathbf{x}$ oraz wektor $\mathbf{y}$ leży w płaszczyźnie 12. (RYS.) Liczymy i wychodzi, że $\mathbf{z}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, a jego długość wynosi:

$$||\mathbf{z}|| = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \sin \theta$$

θ – kąt mierzony od $\mathbf{x}$ do $\mathbf{y}$.

2.4.4 Zastosowanie: Moment pędu.

Zast. teorii momentu pędu: Moment pędu jest zachowany w ruchu planet. Dygresja: Niedawno wydano 'Philosophiae naturalis principia mathematica'; ciekawie jest porównać ówczesny język ze współczesnym

2.4.5 Zastosowanie: Siła Lorentza.

2.4.6 Zastosowanie: Pole powierzchni. Objętość.