MATEMATYKA II – odwzorowania odwrotne, f. uwikłane
lista zadań nr 7, 25.04.2012

1. Poniższe odwzorowania określają różne układy współrzędnych. W każdym przypadku: Policzyć pochodną tzn. znaleźć macierz Jacobiego; znaleźć jej wyznacznik czyli jakobian; zobaczyć, gdzie jakobian się zeruje; tam, gdzie się da, napisać odwzorowanie odwrotne; znaleźć i naszkicować linie współrzędnych. W zadaniach poniżej: x, y – wsp. kartezjańskie na $\mathbb{R}^2$; x, y, z – wsp. kartezjańskie na $\mathbb{R}^3$; x, y, z, t – wsp. kartezjańskie na $\mathbb{R}^4$.

   (a) Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie: (r, ϕ) :

   $$\begin{cases} x &= r\cos\phi, \\ y &= r\sin\phi. \end{cases}$$

   (b) Uogólnione współrzędne biegunowe na płaszczyźnie: (r, ϕ) :

   $$\begin{cases} x &= ar\cos\phi, \\ y &= br\sin\phi. \end{cases}, \quad a, b > 0.$$

   (c) Współrzędne: (ξ, η) definiowane przez:

   $$\begin{cases} x &= \xi^2 - \eta^2, \\ y &= 2\xi\eta. \end{cases}$$

   Odp. Liniami współrzędnych są parabole współogniskowe. Rysunek, p. Fichtenholz, t. III, ustęp[1] 604.

   (d) Współrzędne: (u, v) definiowane przez:

   $$\begin{cases} x &= u\cosh v, \\ y &= u\sinh v. \end{cases}$$

   (e) Współrzędne: (ξ, η) definiowane przez:

   $$\begin{cases} x &= \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \\ y &= \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}. \end{cases}$$

   Odp. Liniami współrzędnych są okręgi przechodzące przez środek ukl. współrzędnych. Rysunek, p. Fichtenholz, t. III, ustęp 604.2.

   (f) Współrzędne: (p, q) definiowane przez:

   $$\begin{cases} y^2 &= 2px, \\ x^2 &= 2qy. \end{cases}$$

   Wsk. i Rys. P. Fichtenholz j.w.

[1] Tak są tam nazywane podrozdziały...

(g) Współrzędne eliptyczne (μ, ν) na płaszczyźnie:

$$\begin{cases} x &= a\cosh\mu\cos\nu, \\ y &= a\sinh\mu\sin\nu. \end{cases}$$

Odp. Krzywe μ =const są *elipsami* (o jakim równaniu?), zaś ν =const – *hiperbolami* (o jakim równaniu?)

(h) Współrzędne walcowe (r, ϕ, ζ) w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x &= r\cos\phi, \\ y &= r\sin\phi, \\ z &= \zeta. \end{cases}$$

(i) Współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{cases}$$

(j) Uogólnione współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) w $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x &= ar\sin\theta\cos\phi, \\ y &= br\sin\theta\sin\phi, \\ z &= cr\cos\theta. \end{cases} \quad , \quad a, b, c > 0.$$

(k) Współrzędne 'walcowe' (r, θ, ϕ, τ) w $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta, \\ t &= \tau. \end{cases}$$

2. Obliczyć pochodną (-e) funkcji złożonej:

(a) $u = e^{x-3y}$, gdzie $x = \cos t$, $y = t^2$; obliczyć $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

(b) $u = x^3 + y^3 + xy^2$; $x = \sin t$, $y = e^t$; obliczyć $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

(c) $z = \operatorname{arctg}(x - y)$, $x = 2t$, $y = 3t^2$; obliczyć $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

(d) $z = x^2y - y^2x$, gdzie $x = u\cos v$, $y = u\sin v$. Obliczyć $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

(e) $z = f(x^2 + y^2, e^{xy})$, gdzie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – dowolna funkcja różniczkowalna. Obliczyć $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. Pokazać, że funkcja $z = \phi(x^2+y^2)$, gdzie $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – dowolna funkcja różniczkowalna, spełnia równanie:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

4. Niech $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$, gdzie gdzie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – dowolna funkcja różniczkowalna. Sprawdzić, że niezależnie od postaci F

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x\cos y.$$

5. Niech $x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5$. Znaleźć $\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x}$ przy $x = y = a$.

6. Obliczyć $\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x}$ i $\frac{\mathsf{d}^2y}{\mathsf{d}x^2}$ dla funkcji uwikłanej $y(x)$, określonej następującymi równaniami:

   (a) $x^2 + 3xy - y^2 = c^2$;

   (b) $y - \epsilon \sin y = x$. Dla jakich ϵ funkcja $y(x)$ jest określona globalnie (dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$)?

   (c) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

   (d) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.

   (e) $xy - \ln y = a$.

   (f) $y^x = x^y$.

7. (Przykład ważny w termodynamice). Niech $F(x, y, z) = 0$. Zakładając, że w jakimś punkcie wszystkie pochodne cząstkowe F są różne od zera w jakimś punkcie $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, tak że dowolna zmienna daje się w otoczeniu p_0 wyrazić jednoznacznie jako funkcja dwóch pozostałych (tak że np. $x \equiv x(y, z)$ itd.), pokazać, że

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 1; \qquad \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = -1.$$

8. Pokazać, że podstawiając w równaniu

$$x^2 \frac{\mathsf{d}^2y}{\mathsf{d}x^2} + x\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x} + y = 0$$

nową zmienną t określoną przez: $x = e^t$, otrzymamy równanie

$$\frac{\mathsf{d}^2u}{\mathsf{d}t^2} + u = 0.$$

9. Przekształcić równanie różniczkowe wprowadzając nową zmienną:

$$(1 - x^2)\frac{\mathsf{d}^2y}{\mathsf{d}x^2} + \frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x} + n^2y^2 = 0, \quad x = \cos t$$

10. Wykazać, że równanie Laplace'a w $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

we współrzędnych biegunowych (r, ϕ) (jeśli ktoś nie pamięta definicji to jest wyżej) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

11. Napisać dwuwymiarowe równanie Laplace'a w zmiennych $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{y}{x^2+y^2}$.

12. Napisać dwuwymiarowe równanie Laplace'a w zmiennych u, v określonych przez: $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$.

13. Przechodząc do współrzędnych sferycznych pokazać, że wyrażenia:

$$K = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad L = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

przyjmują postać

$$\tilde{K} = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)^2,$$

$$\tilde{L} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$