

ALGEBRA

Zadanie 1

Zbadać czy wektor $\mathbf{v}$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, gdzie

$$i) \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

oraz

$$ii) \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: $i)$ tak: $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $ii)$ nie.

Zadanie 2

Czy wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 + 2i \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 7 - i \\ 3 + i \end{bmatrix},$$

są liniowo zależne? Zbadać sprawę nad ciałem $\mathbb{R}$ i nad ciałem $\mathbb{C}$.

Rozwiązanie: Pytamy, czy równanie

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{0},$$

(tłuste zero oznacza zero przestrzeni wektorowej, czyli wektor zerowy!) ma rozwiązanie dla $x_i \in \mathbb{R}1$, gdy nad $\mathbb{R}^1$ oraz $x_i \in \mathbb{C}^1$ gdy nad $\mathbb{C}$. Rozwiążmy:

$$\begin{aligned} x_1(1 + 2i) + x_2(7 - i) &= 0, \\ x_1i + x_2(3 + i) &= 0, \end{aligned}$$

Z drugiego $x_1 = (-1 + 3i)x_2$ i to do pierwszego, co da: $[(1 + 2i)(-1 + 3i) + 7 - i]x_2 = 0$. To istotnie jest zero, niezależnie od wartości x_2 . Rozwiązaniami są więc dowolne x_2 i $x_1 = (-1 + 3i)x_2$. Widać jednak, że jeśli $x_2 \in \mathbb{R}$ to x_1 jest zespolone. Zatem nad $\mathbb{R}$ wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są liniowo niezależne, ale nad $\mathbb{C}$ zależne.

Zadanie 3

Zbadać liniową niezależność nad ciałem $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$ wektorów

$$i) \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

oraz

$$ii) \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: W przypadku *i*) widać gołym okiem, że są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$ bo równanie $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_4 \mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$ ma rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda$, $\lambda_3 = -2\lambda$ dla dowolnego λ , a skoro są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$ to i nad $\mathbb{C}^1$ też, bo $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{C}$.

Uwaga: ustalona wyżej liniowa zależność $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_4$ oznacza, że np. $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_4$, tj., że $\mathbf{e}_3$ jest kombinacją liniową pozostałych. W zasadzie zamiast badać istnienie niezerowych rozwiązań równania $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_4 \mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$ moglibyśmy postawić problem, czy wektor $\mathbf{e}_3$ jest liniowo zależny od pozostałych. To jest jednak mniej ogólne: mogłoby się np. okazać, że sam wektor $\mathbf{e}_3$ nie daje się przedstawić jako kombinacja liniowa $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_4$, ale te trzy wektory są liniowo zależne. Np. gdyby badać problem liniowej zależności wektorów

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

to okazałoby się (co w przypadku bardziej skomplikowanych wektorów nie musiałoby być od razu tak łatwo widoczne), że $\mathbf{v}_3$ nie jest kombinacją liniową $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_4$, niemniej te trzy wektory: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne i tym samym cztery wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne. Badając ich liniową zależność przez pytanie o istnienie niezerowych rozwiązań równania $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ dostalibyśmy, że niezerowym rozwiązaniem jest $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_4 = \lambda$ i $\lambda_3 = 0$, czyli $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Jest jasne, że to nie pozwala wyrazić $\mathbf{v}_3$ przez pozostałe (bo $\lambda_3 = 0$).

W przypadku *ii*) rozwiązujemy równanie $\xi_1 \mathbf{f}_1 + \xi_2 \mathbf{f}_2 + \xi_3 \mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$, czyli układ

$$\begin{aligned} \xi_2 + i\xi_3 &= 0, \\ \xi_1 + i\xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 - i\xi_2 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dodając pierwsze pomnożone przez i do trzeciego dostajemy $\xi_1 = 0$. Uwzględniając to, z drugiego dodanego do trzeciego znajdujemy $2\xi_3 = 0$ czyli $\xi_3 = 0$ i wtedy (z pierwszego) $\xi_2 = 0$ też. Zatem wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ są liniowo niezależne nad obydwoma ciałami $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Zadanie 4

Zbadać liniową zależność wektorów.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Rozwiązujemy równanie $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$, czyli układ

$$\begin{aligned}2x_1 + 2ix_2 + x_3 &= 0, \\ix_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\-ix_1 + x_2 + 3x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Dodanie drugiego do trzeciego daje $x_3 = 0$. Wtedy pierwsze sprowadza się do $x_1 + ix_2 = 0$, a drugie do $ix_1 - x_2 = 0$, czyli do pierwszego pomnożonego przez i . Zatem szukanym rozwiązaniem jest $x_2 = ix_1$, $x_3 = 0$ i x_1 dowolne. Ponieważ albo x_1 albo x_2 jest zespolone (albo nawet oba) to wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{w}_3$ są liniowo zależne nad $\mathbb{C}$, ale nie nad $\mathbb{R}$.

Zadanie 5

Dowieść, że jeśli wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ oraz $\mathbf{e}_3$ są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) to takimiż są i wektory

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Rozwiązanie: Jak zwykle pytamy, czy z faktu, że $\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$ wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Wiemy teraz także, iż równanie $\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Piszemy więc:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 = \lambda_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \lambda_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \lambda_3(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{e}_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

Zatem na mocy założenia musimy mieć $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Drugie z pierwszym daje $\lambda_3 = 0$, wtedy trzecie daje $\lambda_1 = 0$ i na koniec z drugiego wynika wtedy że i $\lambda_2 = 0$.

Zadanie 6

Dowieść, że następujące zbiory wektorów-funkcji (tj. wektorów z przestrzeni $V = \text{Map}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$) są liniowo niezależne

- a) $\sin x, \quad \cos x,$
- b) $1, \quad \sin x, \quad \cos x,$
- c) $\sin x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \sin nx$
- d) $1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \quad \dots, \quad \cos nx$
- e) $1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx.$

Rozwiązanie: W przypadku a) jest jasne, że $\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ może dla wszystkich $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ zachodzić tylko dla $\lambda = \xi = 0$: jeśli $x = k\pi$ i $x = l\pi + \frac{1}{2}\pi$ należą do (a, b) to jest to trywialne, jeśli nie, to można zróżniczkować i ma się $\lambda \cos x - \xi \sin x = 0$ oraz

$\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ i znów jedynym rozwiązaniem obu dla wszystkich x -ów jest $\lambda = \xi = 0$. To samo w przypadku *b*): $\eta + \lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ dla wszystkich $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}^1$ też wymaga $\eta = \lambda = \xi = 0$ (aby to zobaczyć, można znów zróżniczkować i dostaniemy ten sam problem, co w punkcie a). W przypadku *c*) możemy posłużyć się indukcją. Zakładamy, że wektory te są liniowo niezależne dla jakiegoś n (dla $n = 1$ jest to oczywiste) i sprawdzamy, czy z tego wynika to samo dla $n + 1$, to znaczy, że

$$f(x) \equiv \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin 2x + \dots + \lambda_n \sin nx + \lambda_{n+1} \sin(n+1)x \equiv 0 ,$$

(symbol $\equiv$ przypomina, że ma to być 0 dla wszystkich x) tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Skoro ma to zachodzić dla wszystkich x to znaczy że i

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \equiv -\lambda_1 \sin x - 2^2 \lambda_2 \sin 2x + \dots - n^2 \lambda_n \sin nx - (n+1)^2 \lambda_{n+1} \sin(n+1)x \equiv 0 .$$

Mnożymy $f(x)$ przez $(n+1)^2$ i dodajemy do tego tu wyżej, co da

$$[(n+1)^2 - 1] \lambda_1 \sin x + [(n+1)^2 - 4] \lambda_2 \sin 2x + \dots + [(n+1)^2 - n^2] \lambda_n \sin nx \equiv 0 ,$$

To zaś na mocy indukcyjnego założenia o liniowej niezależności wektorów $\sin x, \dots, \sin nx$ oznacza, że $[(n+1)^2 - 1] \lambda_1 = [(n+1)^2 - 4] \lambda_2 = \dots = [(n+1)^2 - n^2] \lambda_n = 0$. Stąd zeru muszą być wszystkie λ_i o $i = 1, \dots, n$ z wyjątkiem ewentualnie k -tej, o takim k , że $(n+1)^2 - k^2 = 0$. Ale to się nie może zdarzyć, bo w indukcji rozpatrujemy tylko $n+1 > k$. Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ i z tożsamościowego znikania $f(x)$ wynika, iż także $\lambda_{n+1} = 0$. W przypadku *d*) także posługujemy się indukcją. Zakładamy, że teza (liniowa niezależność) jest prawdziwa dla n mamy pokazać, że

$$g(x) \equiv \eta + \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \dots + \lambda_n \cos nx + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x \equiv 0 ,$$

pociąga za sobą $\eta = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Mnożymy $g(x)$ przez $(n+1)^2$ i odejmujemy od tego dwakroć zróżniczkowane $g(x) = 0$. Jak wyżej wynika stąd, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ i zostaje nam w $g(x) = 0$ tylko $\eta + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x = 0$, co znów wymaga by $\eta = \lambda_{n+1} = 0$. Wreszcie w przypadku *e*) także zakładamy, że $\eta + \lambda_1 \cos x + \xi_1 \sin x + \lambda_n \cos nx + \xi_n \sin nx = 0$ tylko dla $\eta = \lambda_1 = \xi_1 = \dots = \lambda_n = \xi_n = 0$ i robimy dla $n+1$ sztuczkę z drugą pochodną, co zostawia nam $\eta + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x + \xi_{n+1} \sin(n+1)x = 0$. To też wymaga, by $\eta = \lambda_{n+1} = \xi_{n+1} = 0$ (choćby na mocy tego, że teza jest prawdziwa dla $n = 1$, a czymże się różni x od $(n+1)x$? - tylko dziedziną...)

Zadanie 7

Dowieść, że wektory

$$\mathbf{f}_1 = \sin x, \quad \mathbf{f}_2 = \sin^3 x, \quad \mathbf{f}_3 = \sin 3x ,$$

z przestrzeni wektorowej $V = \text{Map}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ są liniowo zależne.

Rozwiązanie: To proste

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x (1 - 2 \sin^2 x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x . \end{aligned}$$

Czyli $\mathbf{f}_3 = 3\mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$, co dowodzi, że $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ są liniowo zależne.

Zadanie 8

Dowieść, że wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$.

Uwaga: jeśli w wektorach, tj. w tych kwadratowych nawiasikach, mają być tylko liczby rzeczywiste - bo tak sobie *definiujemy* tę przestrzeń - to musi to być przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{R}$; gdybyśmy bowiem dopuścili mnożenie wektorów przez liczby zespolone, to w nawiasikach wystąpiłyby z konieczności także liczby zespolone wbrew naszemu określeniu tej przestrzeni. W drugą zaś stronę rzecz jest możliwa: możemy sobie arbitralnie określić przestrzeń wektorową w taki sposób, że w nawiasikach mogą wystąpić także liczby zespolone, ale dopuszczać tylko kombinacje liniowe o współczynnikach rzeczywistych. W takim przypadku stosują się uwagi o bazie i wymiarze takiej przestrzeni umieszczone na końcu tego zadania.

Rozwiązanie: Trzeba pokazać, że dowolny wektor $\mathbf{w}$ można przedstawić jako kombinację liniową tych trzech, tj. w postaci $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{w}$. Niech $\mathbf{w} = [a, b, c]$. Trzeba pokazać, że układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= a, & 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b, & 4x_1 + 2x_3 &= -a + b + c \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= c, & 2x_1 + 4x_2 &= a - b + c \end{aligned}$$

ma rozwiązanie. Mnożąc pierwsze równanie przez -2 i dodając je do trzeciego

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c \\ 4x_1 + 2x_3 &= -a + b + c \\ 2x_1 - 8x_3 &= -a - 3b + 3c \end{aligned}$$

Teraz trzecie razy -2 i dodać do drugiego. Otrzymujemy $18x_3 = a + 7b - 5c$. Czyli mamy x_3 . W podobny sposób można znaleźć $18x_1 = -5a + b + 7c$ oraz $18x_2 = 7a - 5b + c$ (symetria równań!). Łatwo sprawdzić, że to dobry wynik. Skoro jest (jednoznaczne) rozwiązanie dla dowolnego wektora $\mathbf{w}$ to $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tworzą bazę.

Uwaga: Wyjaśnijmy sobie na najprostszy przykładzie jeszcze jedną sprawę: dwa wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

rozpinają całą przestrzeń wektorową V nad ciałem $\mathbb{R}$ składającą się z wektorów postaci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{ o } \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

bo dowolny taki wektor można przedstawić jako $\mathbf{w} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$, tj. jako kombinację liniową $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ z rzeczywistymi współczynnikami. Przestrzeń ta jest zatem dwuwymiarowa, bo jej baza składa się z dwu wektorów. Te same dwa wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ nie rozpinają jednak całej przestrzeni wektorowej W , też nad ciałem $\mathbb{R}$, składającej się z wektorów postaci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \text{o} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

bo np. wektora

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},$$

nie można dostać z kombinacji linowej $x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ o *rzeczywistych* współczynnikach x_1 i x_2 . Do tego trzeba wziąć większą bazę, np.:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}.$$

Czyli taka przestrzeń wektorowa (nad ciałem $\mathbb{R}$) jest czterowymiarowa. Oczywiście, jeśli przestrzeń wektorowa jest nad ciałem $\mathbb{C}$ to te cztery powyższe wektory są parami do siebie proporcjonalne ($\mathbf{e}_2 = i \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_4 = i \mathbf{e}_3$), czyli liniowo zależne. Wtedy baza ma dwa wektory i ta przestrzeń wektorowa (nad ciałem $\mathbb{C}$) jest tylko dwuwymiarowa.

Zadanie 9

Znaleźć wymiar i jakąś bazę podprzestrzeni wektorowej $E \subset \mathbb{R}^4$ rozpinanej przez wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Rozwiązanie: Ponieważ $\mathbb{R}^4$ ma wymiar 4, zatem przynajmniej jeden z tych wektorów musi być liniowo zależny od pozostałych. Odrzucmy ostatni (bo ma brzydkie liczby). Aby zobaczyć, czy pierwsze cztery są liniowo zależne spróbujmy (trochę na “chybił -trafił”) zapisać czwarty jako kombinację liniową trzech pierwszych, tj. jako $\mathbf{v}_4 = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3$. To daje układ równań

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Weźmy trzy pierwsze na razie. Odjąć od trzeciego pierwsze. To da $x_2 = 4x_3$. Wstawiamy to do dwu pierwszych i mamy układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 15x_3 &= -1, \\ x_1 + 11x_3 &= 1. \end{aligned}$$

To łatwo rozwiązać (drugie razy dwa i odjąć od pierwszego). Stąd mamy jako rozwiązanie układu trzech pierwszych równań

$$x_1 = -\frac{26}{7}, \quad x_2 = \frac{12}{7}, \quad x_3 = \frac{3}{7}.$$

Teraz możemy sprawdzić ostatnie

$$-\frac{26}{7} + 2 \cdot \frac{12}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = -1.$$

(Cztery równania na trzy zmienne - trzeba mieć szczęście żeby tak się udało!!) To dowodzi, że cztery pierwsze wektory są liniowo zależne bo

$$-\frac{26}{7} \mathbf{v}_1 + \frac{12}{7} \mathbf{v}_2 + \frac{3}{7} \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = 0.$$

Zarazem z jednoznaczności tego rozwiązania wynika, że jak byśmy wzięli którekolwiek dwa wektory z $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ to się nie uda, tzn. $\mathbf{v}_4$ nie jest kombinacją liniową tylko dwu z nich. Zatem wymiar podprzestrzeni E jest równy conajmniej 3. Skoro jednak się okazało, że z czterech wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ tylko trzy są liniowo niezależne, to trzeba wrócić i zapytać, czy nie jest w takim razie możliwe dołączenie $\mathbf{v}_5$, tzn. trzeba sprawdzić czy układ wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$, nie jest przypadkiem liniowo niezależny. Jeśli jest, to $\mathbf{v}_5$ się powinien dać zapisać jako $x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_3 + x_3 \mathbf{v}_4$. Sprawdźmy to:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 3, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 &= 7, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 &= -2. \end{aligned}$$

Najpierw rozwiązujemy pierwsze trzy: od pierwszego trzecie da $4x_3 = -5$, czyli $x_3 = -\frac{5}{4}$. To do drugiego i trzeciego:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= \frac{7}{4}, \\ 2x_1 - x_4 &= \frac{23}{4}. \end{aligned}$$

Dodanie stronami da $x_1 = \frac{10}{4}$ i wtedy z pierwszego wyżej $x_4 = \frac{7}{2} - \frac{10}{4} = -\frac{3}{4}$. Łatwo sprawdzić, że to jest dobre rozwiązanie trzech pierwszych równań. Sprawdzamy teraz ostatnie, czwarte: $x_1 + 3x_3 + x_4 = \frac{10}{4} - 3 \cdot \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{8}{4} = -2$. Czyli to czwarte też jest wtedy spełnione! Zatem ostatecznie $\mathbf{v}_5$ jest kombinacją liniową $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$, i $\mathbf{v}_4$ czyli jest od nich liniowo zależny. Ponieważ już wiemy, że $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ też są liniowo niezależne, więc bazę podprzestrzeni E mogą tworzyć wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$.

Zadanie 10

Jak w zadaniu 9 tylko z wektorami

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Rozwiązanie: Jak i poprzednio (nawet nad ciałem $\mathbb{R}$, bo wszystkie liczby w kolumnienkach są czysto rzeczywiste) pięć wektorów nie może być liniowo niezależnych. Teraz jednak postąpimy bardziej regulaminowo i zbadamy warunek

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4 + \lambda_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}.$$

Mamy zatem układ równań:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 &= 0 \\ -\lambda_1 &+ \lambda_3 + 4\lambda_4 + 3\lambda_5 = 0 \end{aligned}$$

Drugie od trzeciego daje $\lambda_4 + \lambda_5 = 0$; pomijając trzecie piszemy więc pozostałe równania (eliminując z nich λ_5):

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_1 &+ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{aligned}$$

Teraz ostatnie minus przedostatnie da $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Po wykorzystaniu tego pierwsze i trzecie stają się tożsame z drugim. Zatem zostaje do spełnienia tylko $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$; mamy więc jedno równanie na trzy niewiadome! Widać, że rozwiązanie można napisać w postaci

$$\lambda_1 = \xi, \quad \lambda_2 = -\xi, \quad \lambda_3 = \xi - \eta, \quad \lambda_4 = \eta, \quad \lambda_5 = -\eta.$$

ξ i η są tu zupełnie dowolnymi liczbami. Mamy zatem dla dowolnych wartości ξ i η związek

$$\xi \mathbf{v}_1 - \xi \mathbf{v}_2 + (\xi - \eta) \mathbf{v}_3 + \eta \mathbf{v}_4 - \eta \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}.$$

Możemy tu np. położyć $\xi = 0$ i $\eta = 1$ albo $\xi = 1$ i $\eta = 0$, co da związki

$$\mathbf{v}_5 = -\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \quad \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,$$

pokazujące, że np. $\mathbf{v}_1$ oraz $\mathbf{v}_5$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowych $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$. Te trzy wektory mogą więc stanowić bazę całej podprzestrzeni rozpiętej przez $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$.

Zadanie 11

Znaleźć sumę prostą i przecięcie dwu podprzestrzeni w $\mathbb{R}^3$ rozpinanych przez dwa zbiory wektorów:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rozwiązanie: Najpierw znajdziemy ich sumę prostą. Jeśli 3 wektory V (lub W) są liniowo niezależne, to rozpinają całą przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^3$ i $V = \mathbb{R}^3$ ($W = \mathbb{R}^3$) i wtedy w oczywisty sposób $V \oplus W = \mathbb{R}^3$. Sprawdźmy więc liniową niezależność wektorów z V . Układ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ma jak łatwo sprawdzić tylko rozwiązanie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, zatem rzeczywiście $V = \mathbb{R}^3$ i $V \oplus W = \mathbb{R}^3$. Jeśli zaś chodzi o W to gołym okiem widać, że $\mathbf{w}_3 = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, więc podprzestrzeń W jest tylko dwuwymiarowa i jest rozpinana np. przez $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$. Ponieważ $V = \mathbb{R}^3$ to przecięcie V z W , tj. podprzestrzeń utworzona przez wektory takie, że należą one jednocześnie do V i do W jest samą podprzestrzenią W (bo $W \subset V = \mathbb{R}^3$).

Zadanie 12

Znaleźć wymiar i bazę podprzestrzeni $E \subset \mathbb{R}^4$ rozpiętej przez wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć także ogólną postać wektora z E .

Rozwiązanie: Znów zobaczmy, czy się da przedstawić $\mathbf{w}_4$ w postaci $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3$. Aby się dało musi być spełniony układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Rozwiążmy trzy pierwsze, a potem sprawdzimy ostatnie. Drugie minus pierwsze daje $x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_1$. To do trzeciego i mamy razem z pierwszym układ (kolejny!)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1, \\ \frac{5}{2}x_1 + 3x_2 &= 2.\end{aligned}$$

Stąd już łatwo i mamy jako rozwiązanie trzech pierwszych

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0.$$

(Łatwo sprawdzić, że to rozwiązuje trzy pierwsze równania). Teraz sprawdzamy czwarte:

$$2 \cdot (4) - 1 \cdot (1) + 0 \cdot (3) = 7.$$

Hurra! Znow się udało! Czyli $\mathbf{w}_4$ jest liniowo zależny od $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$: $\mathbf{w}_4 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$. Co więcej znow rozwiązanie jest jednoznaczne, więc wszystkie trzy, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$, są już liniowo niezależne. Zatem wymiar $\dim E = 3$, a jej bazą mogą być te trzy wektory.

Oczywiście dowolny wektor należący do E ma postać

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Na użytek zadania 13 wygodnie będzie przedstawić ten wektor tak, że trzy jego pierwsze składowe będą dowolne, a czwarta będzie się wyrażała przez trzy pierwsze. W tym celu zastępujemy w drugim i trzecim wierszu $x_1 + x_2$ przez a , tak by znikło z nich x_1

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a - x_2 + 2x_3 \\ 3a + x_3 \\ 4a - 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

W następnym kroku zastępujemy $3a + x_3$ przez c a w drugim i czwartym wierszu zastępujemy x_3 przez $c - 3a$. W ten sposób

$$\begin{bmatrix} a \\ -4a + 2c - x_2 \\ c \\ -5a + 3c - 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Wreszcie, w drugim wierszu zastępujemy $-4a + 2c - x_2$ przez b , a w czwartym zamiast x_2 dajemy $-4a + 2c - b$. W ten sposób postać wektora z E jest taka

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 7a + 3b - 3c \end{bmatrix}.$$

Zadanie 13

Znaleźć wymiar i bazę podprzestrzeni $F \subset \mathbb{R}^4$ rozpiętej przez wszystkie wektory postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} 2y - 2z - t &= 0 \\ x - 4y + 4z + 2t &= 0 \end{aligned}.$$

Rozwiązanie: dwa razy pierwszy warunek plus drugi da $x = 0$. Z pierwszego zaś mamy, że $t = 2y - 2z$. Wektory rozpinające E są więc postaci

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y - 2z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \equiv y \mathbf{e}_1 + z \mathbf{e}_2.$$

Wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ są ewidentnie liniowo niezależne. Zatem $\dim F = 2$ i jej bazą mogą być $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$.

Zadanie 14

Znaleźć wymiar i bazę sumy oraz przecięcia podprzestrzeni E z zadania 12 i podprzestrzeni F z zadania 13.

Rozwiązanie: Conajmniej jeden z pięciu wektorów

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

rozpinających $E \oplus F$ musi być liniowo zależny od pozostałych. Wyrzucimy pierwszy bo najbardziej skomplikowany. Zobaczmy następnie, czy $\mathbf{w}_2$ się da zapisać jako kombinacja liniowa $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$. Gołym okiem widać, że się nie da. Co więcej, łatwo sprawdzić, że równanie $x\mathbf{w}_3 + y\mathbf{w}_4 + z\mathbf{w}_5 = 0$ ma tylko rozwiązanie $x = y = z = 0$. Zatem $E \oplus F = \mathbb{R}^4$ bo jest rozpinana przez cztery wektory $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$, które można przyjąć za jej bazę.

Teraz przecięcie E i F . Tworzą je wektory należące i do E i do F . Oznacza to, że wektory te muszą się dać jednocześnie przedstawić w dwu postaciach

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 7a + 3(b - c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y - 2z \end{bmatrix}.$$

Widać, że aby tak było musi być $a = 0$, $b = y$, $c = z$ i do tego jeszcze musi zachodzić równość $7a + 3(b - c) = 2(y - z)$. Ale skoro $a = 0$, $b = y$, $c = z$ to może tak być tylko dla

$b = c$. Zatem ogólną postacią wektora należącego do przecięcia podprzestrzeni E i F jest

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem przecięcie E i F jest podprzestrzenią jednowymiarową rozpinaną przez jakikolwiek wektor powyższej postaci (np. z $b = 1$).

Zadanie 15

Pokazać, że podprzestrzeń liniowa $E \subset \mathbb{R}^4$ złożona z wektorów postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} 3z - 4t &= 0 \\ x - y + z + t &= 0 \end{aligned},$$

jest rozpinana przez dwa wektory.

Rozwiązanie: Warunki są dwa na cztery składowe. Weźmy x i z jako niezależne. Wtedy $t = \frac{3}{4}z$ oraz (po wstawieniu tego do drugiego warunku) $x - y + \frac{7}{4}z = 0$, czyli $y = x + \frac{7}{4}z$. Zatem każdy wektor z E musi mieć postać

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 16

Pokazać, że podprzestrzeń E rozpięta przez wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ postaci

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 1-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zawiera wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix},$$

oraz, że wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ rozpinają tę samą podprzestrzeń E .

Rozwiązanie: Najpierw trzeba pokazać, że równania $x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 + x_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1$

oraz $y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3 + y_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_2$ mają rozwiązania. Pierwsze daje układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ ix_2 - ix_3 &= i, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 3, \\ ix_1 + (1-i)x_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Z drugiego $x_2 - x_3 = 1$, czyli $x_2 = 1 + x_3$. To do pozostałych trzech, co da układ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 2, \\ ix_1 + (1-i)x_3 + x_4 &= i. \end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $x_1 = 1 - x_4$. To do pierwszego i trzeciego

$$\begin{aligned} 2(x_3 + x_4) &= 0, \\ (1-i)(x_3 + x_4) &= i. \end{aligned}$$

Czyli da się przedstawić $\mathbf{w}_1$, z tym, że nie w sposób jednoznaczny. To oznacza, że same wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne (czyli $\dim E < 4$). Istotnie, widać, że $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem by dowieść, że $\mathbf{w}_2 \in E$ wystarczy pokazać, że $\mathbf{w}_2 = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3$. Widać, że $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ po prostu. Ogólniej, można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4), \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \xi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4), \end{aligned}$$

dla dowolnych λ i ξ ponieważ $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = 0$. Stąd dla $\lambda = -1$ uzyskujemy związek

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3.$$

Następnie kładąc $\lambda = 1, \xi = 2$ ($\lambda = 1, \xi = 1$) i odejmując od drugiego pierwsze (od pierwszego drugie) dostajemy dwa układy równań

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4, & \mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4, \\ \mathbf{w}_2 &= 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4, & \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4. \end{aligned}$$

Z pierwszego układu, odejmując pierwsze od drugiego otrzymujemy

$$\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}_1,$$

gdzie w drugim kroku wykorzystany został otrzymany już wyżej związek $\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3$. Z drugiego układu zaś, odejmując od pierwszego drugie, dostajemy

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3.$$

Tak więc możemy wyrazić $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ przez $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3,\end{aligned}$$

(co łatwo sprawdzić). Zatem każdy wektor postaci $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 \in E$ można napisać jako

$$\alpha(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3) + \gamma\mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{w}_1 + (\beta - \alpha)\mathbf{w}_2 + (\alpha - \beta + \gamma)\mathbf{v}_3.$$

Zatem wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{v}_3$ także rozpinają E .

Zadanie 17

W pewnej bazie w $\mathbb{R}^3$ wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ mają współrzędne (składowe)

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pokazać, że $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ są także bazą tej przestrzeni i podać w tej nowej bazie współrzędne wektora $\mathbf{w}$, który w pierwotnej bazie ma współrzędne $(6, 9, 14)$.

Uwaga: Użyliśmy wyżej symbolu $:=$ aby podkreślić, że w zasadzie nie należy utożsamiać wektora z jego składowymi: wektor pozostaje sobą niezależnie od naszego wyboru bazy; składowe zaś od tego wyboru jak najbardziej zależą! W tych notatkach składowe wektorów będziemy zawsze pisać w nawiasach okrągłych aby podkreślić, że nie należy ich mylić z wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^n$, które zawsze pedantycznie piszemy w nawiasach prostokątnych. Np. jeden i ten sam wektor $\mathbf{w}$ z $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ma w kanonicznej bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

składowe $(1, 2, 3)$, bo $\mathbf{w} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2 + 3 \cdot \mathbf{e}_3$, a w bazie $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

składowe $(0, 2, 1)$ bo, jak łatwo zobaczyć, $\mathbf{w} = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 2 \cdot \mathbf{v}_2 + 1 \cdot \mathbf{v}_3$.

Rozwiązanie: Niech wyjściową bazą będą wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Zatem

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Odejmijmy pierwsze od drugiego:

$$\mathbf{e}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 .$$

To do dwu pozostałych:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) .\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 , \\ \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 &= 3\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 .\end{aligned}$$

Od drugiego pierwsze oraz od dwa razy pierwszego drugie. Razem więc mamy

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 .\end{aligned}$$

Udało się jednoznacznie wyrazić trzy (z założenia) liniowo niezależne wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, co oznacza, że te drugie też są liniowo niezależne, czyli też mogą być bazą przestrzeni. Możemy teaz przerobić wektor $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= 6\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2 + 14\mathbf{e}_3 \\ &= 6(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + 9(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 14(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 ,\end{aligned}$$

czyli współrzędne $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ to $(1, 2, 3)$. Zapiszmy to za pomocą macierzy. Niech

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Mnożenia “paluchowe” podrazumywiajątsia. Stojąca tu macierz jest tzw. *macierzą zmiany bazy* lub *macierzą przejścia*; dokładniej, jest to macierz przejścia z bazy $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ do bazy $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$. Macierz taką będziemy oznaczać $R_{v \leftarrow e}$, aby podkreślić, że pozwala one ze składowych wektora w bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ otrzymać jego składowe w bazie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

Stosując konwencję sumacyjną wujka A.E. można powyższy wzór z macierzą zapisać jako $\mathbf{e}_k = \mathbf{v}_j (R_{v \leftarrow e})^j_k$. Konwencja polega na niepisaniu w prawej stronie sumy po wartościach wskaźnika j od 1 do 3. Jawnie wzór ten mówi, że np. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 (R_{v \leftarrow e})^1_1 + \mathbf{v}_2 (R_{v \leftarrow e})^2_1 + \mathbf{v}_3 (R_{v \leftarrow e})^3_1$, gdzie $(R_{v \leftarrow e})^1_1 = 1$, $(R_{v \leftarrow e})^2_1 = 1$, $(R_{v \leftarrow e})^3_1 = -1$, etc.

Jeśli teraz napiszemy wektor $\mathbf{w}$ w postaci $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i w_{(e)}^i$ (indeksik e u $w_{(e)}^i$) ma przypominać że $w_{(e)}^i = (6, 9, 14)$ to są współrzędne w bazie $\mathbf{e}_i$ to będziemy mieć:

$$\mathbf{w} = \mathbf{e}_i w_{(e)}^i = \mathbf{v}_k (R_{v \leftarrow e})^k_i w_{(e)}^i \equiv \mathbf{v}_k w_{(v)}^i .$$

gdzie $(R_{v \leftarrow e})^k_i$ jest macierzą zmiany bazy, a $w_{(v)}^i = (R_{v \leftarrow e})^k_i w_{(e)}^i$ jawnie wygląda tak:

$$\begin{pmatrix} w_{(v)}^1 \\ w_{(v)}^2 \\ w_{(v)}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Zadanie 18

Jak w zadaniu 17 tylko teraz

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a $\mathbf{w}$ w pierwotnej bazie ma współrzędne $(6, 2, -7)$.

Rozwiązanie: Znów piszemy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_2 &= 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Trzecie dodać do pierwszego, a potem dwa razy trzecie do drugiego

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 &= 5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

Teraz pierwsze razy 3, drugie razy 2 i odjąć, oraz pierwsze razy 5, a drugie razy 3 i odjąć:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= -5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Do tego jeszcze

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{e}_3 \\ &= (-3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_3 + (-5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \\ &= -8\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Razem więc

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= -8\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= -5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Czyli macierz $R_{v \leftarrow e}$ zmiany bazy to

$$R_{v \leftarrow e} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a współrzędne $w_{(v)}^i$ wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_i$ $i = 1, 2, 3$ to

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście mając wyjściowe wzory wyrażające wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ w postaci kombinacji liniowych bazowych wektorów $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, mamy od razu “za darmo” macierz przejścia $R_{e \leftarrow v}$:

$$R_{e \leftarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierze $R_{e \leftarrow v}$ i $R_{v \leftarrow e}$ muszą być ze sobą oczywiście jakoś związane. Związek ten jest oczywisty: skoro macierz $R_{v \leftarrow e}$ robi ze składowych $w_{(e)}^i$ w bazie $\mathbf{e}_i$ dowolnego wektora $\mathbf{w}$ jego składowe $w_{(v)}^i$ w bazie $\mathbf{e}_j$, a macierz $R_{e \leftarrow v}$ zamienia na powrót składowe $w_{(v)}^i$ w składowe $w_{(e)}^i$, to powinniśmy mieć

$$w_{(e)}^i = [R_{e \leftarrow v}]^i_j w_{(v)}^j = [R_{e \leftarrow v}]^i_j [R_{v \leftarrow e}]^j_k w_{(e)}^k.$$

tj.¹ $[R_{e \leftarrow v}]^i_j [R_{v \leftarrow e}]^j_k = \delta^i_k$. Macierzowo:

$$R_{e \leftarrow v} \cdot R_{v \leftarrow e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(zachęcam do sprawdzenia, że istotnie iloczyn daje macierz jednostkową!). Oczywiście mamy także

$$R_{v \leftarrow e} \cdot R_{e \leftarrow v} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tak więc $R_{v \leftarrow e}^{-1} = R_{e \leftarrow v}$, a $R_{e \leftarrow v}^{-1} = R_{v \leftarrow e}$.

Zauważmy w związku z powyższym, że znaleźliśmy sposób odwracania macierzy kwadratowych.²

¹Symbol (tzw. delta Kroneckera) $\delta^i_k = 1$ gdy $i = k$ i $\delta^i_k = 0$ gdy $i \neq k$.

²Tzw. nieosobliwych macierzy kwadratowych. Nie każda macierz kwadratowa daje się odwrócić (macierze niekwadratowe oczywiście nie mają odwrotnych). Ale macierze zmiany bazy z samej istoty swojej są zawsze odwracalne, czyli należą do gatunku nieosobliwych.

Zadanie 19

Znaleźć macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Zaczniemy od drugiej macierzy (wymiaru 3×3) wykorzystując to, co ustaliliśmy wyżej: interpretujemy sobie tę macierz jako macierz zmiany bazy $R_{e \leftarrow v}$, co pozwala napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_3 &= -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Układ ten traktujemy jak układ równań na $\mathbf{e}_i$ i rozwiązujemy względem $\mathbf{e}_i$, co tu akurat jest proste:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{e}_2 &= -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= 7\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Stąd odczytujemy, że

$$R_{v \leftarrow e} = R_{e \leftarrow v}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Sprawdzamy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tak jak być powinno.

W przypadku trzeciej macierzy postępujemy analogicznie:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \\ \mathbf{v}_4 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4. \end{aligned}$$

Biorąc sumę i różnicę pierwszego i trzeciego równania oraz sumę i różnicę drugiego i czwartego otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 &= 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4, \\ \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 &= 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 &= 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_4.\end{aligned}$$

Robiąc to samo raz jeszcze znajdujemy, że

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{4}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4), \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{4}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4), \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{4}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4), \\ \mathbf{e}_4 &= \frac{1}{4}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4),\end{aligned}$$

Mamy więc (mnożenie macierzy przez liczbę to oczywiście mnożenie przez tę liczbę *każdego* elementu owej macierzy):

$$R_{e \leftarrow v} \cdot R_{v \leftarrow e} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(z dokładnością do czynnika $1/4$ macierz odwrotna jest tu równa macierzy wyjściowej).

Wreszcie, w przypadku pierwszej macierzy 2×2 można by robić tak, jak wyżej, ale prościej (i na przyszłość bardziej przydatnie) jest zapamiętać regułkę:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Zakładamy tu, że $ad - bc \neq 0$; jeśli $ad - bc = 0$, to macierz jest osobliwa ($ad - bc$ jest to jej *wyznacznik* - będzie o nich dalej).

Zadanie 20

Sprawdzić, że wielomiany

$$\mathbf{w}_1 = x + 1, \quad \mathbf{w}_2 = x - 1, \quad \mathbf{w}_3 = x^2 + x,$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia nie większego niż dwa i znaleźć współrzędne w tej bazie wielomianu $\mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1$.

Rozwiązanie: Trzeba sprawdzić, że $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ są liniowo niezależne, czyli, że równość

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \lambda_3 \mathbf{w}_3 = \mathbf{0},$$

dla wszystkich wartości x zachodzi tylko gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. To widać: równość

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x-1) + \lambda_3(x^2+x) = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_3x^2 = 0 ,$$

wymaga by $\lambda_3 = 0$, oraz $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. A to rzeczywiście tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Czyli są liniowo niezależne, a zatem tworzą bazę. Chcemy teraz napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1 &= \mathbf{w}_1v^1 + \mathbf{w}_2v^2 + \mathbf{w}_3v^3 \\ &= (x+1)v^1 + (x-1)v^2 + (x^2+x)v^3 . \end{aligned}$$

Czyli $v^3 = 2$ oraz $v^1 + v^2 + v^3 = 3$ i $v^1 - v^2 = 1$. Stąd $v^1 = 1$, $v^2 = 0$. Istotnie

$$1 \cdot (x+1) + 2 \cdot (x^2+x) = 2x^2 + 3x + 1 .$$

Zadanie 21

W bazie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, mają składowe (współrzędne) $(1, 2, 1)$, $(2, 3, 3)$ oraz $(3, 8, 2)$, zaś wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ mają w tejże samej bazie składowe $(3, 5, 8)$, $(5, 14, 13)$ i $(1, 9, 2)$. Sprawdzić, że trzy wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lub trzy wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ także tworzą dwie inne bazy tej samej przestrzeni i znaleźć macierz przejścia z jednej z nich do drugiej.

Rozwiązanie: mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 , \end{aligned}$$

Drugie od $2 \times$ pierwszego: $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, czyli $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. To do pierwszego i trzeciego:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 , \\ \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 + 2(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) , \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 , \\ 4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2 , \end{aligned}$$

Teraz pierwsze $\times 3$ od drugiego i mamy $\mathbf{e}_2 = -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 3(-5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) , \\ \mathbf{e}_3 &= -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 . \end{aligned}$$

Reasumując:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 18\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{e}_2 &= -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{e}_3 &= -7\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 . \end{aligned}$$

W podobny sposób można wyrazić $\mathbf{e}_i$ także przez $\mathbf{w}_j$, ale już nie będziemy tu tego robić (w zasadzie trzeba by, aby dowieść, że $\mathbf{w}_j$ też są bazą). Mamy teraz (w konwencji sumacyjnej):

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_l (R_{v \leftarrow e})^l_j, \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{e}_j (R_{e \leftarrow w})^j_i,$$

gdzie $R_{v \leftarrow e}$ jest macierzą przejścia z bazy $\mathbf{e}_j$ do bazy $\mathbf{v}_l$, którą odczytujemy ze wzorów wyrażających wektory $\mathbf{e}_j$ przez wektory $\mathbf{v}_l$, a macierz $R_{e \leftarrow w}$ jest macierzą przejścia z bazy $\mathbf{w}_i$ do bazy $\mathbf{e}_j$, odwrotną do macierzy $R_{w \leftarrow e}$ przejścia z bazy $\mathbf{e}_j$ do bazy $\mathbf{w}_i$ (której tu nie wyliczyliśmy). Łącząc te wzory otrzymujemy

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_l (R_{v \leftarrow e})^l_j (R_{e \leftarrow w})^j_i.$$

Zatem jeśli $\mathbf{V} = \mathbf{w}_i V_{(w)}^i$, to $\mathbf{V} = \mathbf{v}_l V_{(v)}^l$, gdzie $V_{(v)}^l = (R_{v \leftarrow e})^l_j (R_{e \leftarrow w})^j_i V_{(w)}^i$, przy czym

$$R_{v \leftarrow e} \cdot R_{e \leftarrow w} = \begin{pmatrix} 18 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 14 & 9 \\ 8 & 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta jest oczywiście macierzą zmiany bazy $R_{v \leftarrow w}$.

Zadanie 22

Znaleźć współrzędne (składowe) wektora

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

w bazie

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie znaleźć macierze przejścia z bazy $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ do bazy “kanonicznej”

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i z powrotem. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v}$ w bazie kanonicznej.

Rozwiązanie: Trzeba rozwiązać układ $\mathbf{v} = x \mathbf{f}_1 + y \mathbf{f}_2 + z \mathbf{f}_3 + t \mathbf{f}_4$:

$$\begin{aligned} x + t &= 5, \\ -x + y &= 1, \\ -y + z &= 1, \\ -z + t &= 1. \end{aligned}$$

To się łatwo rozwiązuje bo z trzech ostatnich $t = 1 + z = 1 + 1 + y = 2 + 1 + x = 3 + x$. Czyli $2x + 3 = 5$ i $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$. Współrzędnymi $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ są liczby $(1, 2, 3, 4)$.

Teraz zmiana bazy. Mamy oczywisty związek $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j(R_{e \leftarrow f})^j_i$, czyli jawnie

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aby mieć to samo w drugą stronę trzeba albo odwrócić stojącą tu macierz (czego jeszcze nie umiemy), albo po prostu rozwiązać cztery równania (na szczęście są one proste). Pierwsze z nich, $\mathbf{e}_1 = x_1 \mathbf{f}_1 + y_1 \mathbf{f}_2 + z_1 \mathbf{f}_3 + t_1 \mathbf{f}_4$, daje układ

$$\begin{aligned} x_1 + t_1 &= 1, \\ -x_1 + y_1 &= 0, \\ -y_1 + z_1 &= 0, \\ -z_1 + t_1 &= 0, \end{aligned}$$

którego jednoznacznym rozwiązaniem są $x_1 = y_1 = z_1 = t_1 = \frac{1}{2}$ (widać gołym okiem, że to jest ok.). Drugie, $\mathbf{e}_2 = x_2 \mathbf{f}_1 + y_2 \mathbf{f}_2 + z_2 \mathbf{f}_3 + t_2 \mathbf{f}_4$, daje układ

$$\begin{aligned} x_2 + t_2 &= 0, \\ -x_2 + y_2 &= 1, \\ -y_2 + z_2 &= 0, \\ -z_2 + t_2 &= 0, \end{aligned}$$

o rozwiązaniu $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = z_2 = t_2 = \frac{1}{2}$ (też widać, że to ok.). Trzecie $\mathbf{e}_3 = x_3 \mathbf{f}_1 + y_3 \mathbf{f}_2 + z_3 \mathbf{f}_3 + t_3 \mathbf{f}_4$, prowadzi do

$$\begin{aligned} x_3 + t_3 &= 0, \\ -x_3 + y_3 &= 0, \\ -y_3 + z_3 &= 1, \\ -z_3 + t_3 &= 0, \end{aligned}$$

i ma rozwiązanie $x_3 = y_3 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = t_3 = \frac{1}{2}$. Wreszcie, czwarte $\mathbf{e}_4 = x_4 \mathbf{f}_1 + y_4 \mathbf{f}_2 + z_4 \mathbf{f}_3 + t_4 \mathbf{f}_4$, czyli

$$\begin{aligned} x_4 + t_4 &= 0, \\ -x_4 + y_4 &= 0, \\ -y_4 + z_4 &= 0, \\ -z_4 + t_4 &= 1, \end{aligned}$$

daje $x_4 = y_4 = z_4 - \frac{1}{2}$, $t_4 = \frac{1}{2}$. Możemy więc napisać związek $\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_k(R_{f \leftarrow e})^k_j$ jawnie:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy, że to jest istotnie macierz odwrotna

$$R_{f \leftarrow e} \cdot R_{e \leftarrow f} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Czyli jest ok. Teraz współrzędne $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_i$. Mamy $\mathbf{v} = \mathbf{f}_i v_{(f)}^i = \mathbf{e}_j (R_{e \leftarrow f})^j_i v_{(f)}^i$ czyli $v_{(e)}^j = (R_{e \leftarrow f})^j_i v_{(f)}^i$. Jawnie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

co powinno było być od początku oczywiste.

Przypomnienie.

Odwzorowanie F z p. wektorowej V w inną (lub tę samą) p. wektorową W , $F : V \rightarrow W$ jest *liniowe* jeśli

$$F(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_1 F(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 F(\mathbf{v}_2).$$

Zadanie działania takiego odwzorowania na (wszystkie) wektory bazy $\mathbf{e}_i$ p. V wyznacza jednoznacznie jego działanie na dowolny wektor $\mathbf{v}$ z tej przestrzeni.

Zadanie 23

Wzór

$$F \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{bmatrix},$$

zadaje odwzorowanie liniowe przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ w nią samą: $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie kanonicznej (zero-jedynkowej) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, oraz w bazie tworzonej przez trzy wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Sprawdzić działa nie otrzymanych macierzy na wektorze $\mathbf{w}$, który w bazie kanonicznej ma składowe $(1, 2, 3)$.

Rozwiązanie: Ponieważ F odwzorowuje $\mathbb{R}^3$ w tę samą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ naturalne (ale nie obowiązkowe!) jest przyjęcie że jego macierz jest dana “z obu stron” w tej samej bazie $\mathbf{e}_i$. Aby ten wybór był jasny będziemy tę macierz oznaczać $F_{(e)(e)}$. Aby znaleźć tę macierz $F_{(e)(e)}$ odwzorowania liniowego F w bazie kanonicznej obliczamy F na wektorach tejże bazy:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ F(\mathbf{e}_2) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ F(\mathbf{e}_3) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Macierz ma postać $F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j F^j(\mathbf{e}_i) \equiv \mathbf{e}_j [F_{(e)(e)}]^j_i$. Jawnie

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jeśli teraz chcemy znaleźć wartość F na wektorze o składowych $(1, 2, 3)$ to działamy na te składowe macierzą $F_{(e)(e)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix},$$

tj. $F(\mathbf{w}) = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3$. W zapisie wskaźnikowym: $\mathbf{e}_i F^i(\mathbf{w}) = \mathbf{e}_i [F_{(e)(e)}]^i_j w^j_{(e)}$.

Mamy też od razu macierz przejścia $R_{e \leftarrow v}$:

$$R_{e \leftarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

a odwrotna do niej macierz $R_{v \leftarrow e}$ również nietrudno znaleźć:

$$R_{v \leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Działając na składowe wektorów w bazie $\mathbf{v}_i$ macierz $F_{(v)(v)}$ powinna dawać składowe obrazów tych wektorów w bazie $\mathbf{v}_i$. Zgodnie z logiką musi więc ona być dana iloczynem

macierzy $R_{v \leftarrow e} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{e \leftarrow v}$:

$$\begin{aligned} F_{(v)(v)} &= R_{v \leftarrow e} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{e \leftarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= R_{v \leftarrow e} \cdot F_{(e)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

“Po drodze” powstała macierz $F_{(e)(v)}$, którą skądinąd łatwo można dostać bezpośrednio działając odwzorowaniem F według przepisu na wektory $\mathbf{v}_i$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1) &\equiv F \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ F(\mathbf{v}_2) &\equiv F \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3, \\ F(\mathbf{v}_3) &\equiv F \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 11\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Bezpośrednie znalezienie w ten sposób macierzy $F_{(v)(v)}$ wymaga dalszego rozłożenia wektorów po prawej stronie na wektory bazy $\mathbf{v}_i$. Zamiast tego łatwiej patrząc na już otrzymaną macierz $F_{(v)(v)}$ sprawdzić, że jest dobrze:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} &= 0\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} &= -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} &= -5\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 = -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadanie 24

Mamy przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 3 . Definiujemy odwzorowanie F z tej przestrzeni w przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 2 wzorem

$$F[W(x)] = W'(x) + x^2 W(0) + 12x \int_0^1 dt W(t).$$

Sprawdzić, czy odwzorowanie F jest liniowe. Jeśli tak, to znaleźć jego macierz w bazach kanonicznych $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dla przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 i $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dla

przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 , gdzie $\mathbf{e}_n \equiv x^n$.

Rozwiązanie: F jest liniowe bo jeśli mamy wielomian $W(x) = \alpha_1 W^{(1)}(x) + \alpha_2 W^{(2)}(x)$ to

$$\begin{aligned} F[W(x)] &= \frac{d}{dx}[\alpha_1 W^{(1)}(x) + \alpha_2 W^{(2)}(x)] + x^2[\alpha_1 W^{(1)}(0) + \alpha_2 W^{(2)}(0)] \\ &\quad + 12x \int_0^1 dt [\alpha_1 W^{(1)}(t) + \alpha_2 W^{(2)}(t)] \\ &= \alpha_1 \frac{d}{dx} W^{(1)}(x) + \alpha_1 x^2 W^{(1)}(0) + \alpha_1 12x \int_0^1 dt \alpha_1 W^{(1)}(t) \\ &\quad + \alpha_2 \frac{d}{dx} W^{(2)}(x) + \alpha_2 x^2 W^{(2)}(0) + \alpha_2 12x \int_0^1 dt \alpha_2 W^{(2)}(t) \\ &= \alpha_1 F[W^{(1)}(x)] + \alpha_2 F[W^{(2)}(x)] . \end{aligned}$$

Teraz możemy znaleźć macierz odwzorowania F w bazach kanonicznych. Dowolny wielomian stopnia ≤ 3 jest postaci:

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_0 W_{(e)}^0 + \mathbf{e}_1 W_{(e)}^1 + \mathbf{e}_2 W_{(e)}^2 + \mathbf{e}_3 W_{(e)}^3 \equiv W_{(e)}^0 + W_{(e)}^1 x + W_{(e)}^2 x^2 + W_{(e)}^3 x^3 .$$

gdzie $W_{(e)}^i \in R^1$ są składowymi wielomianu $\mathbf{W}$ w bazie $\mathbf{e}_i$. Co F robi z wektorów bazowych?

$$\begin{aligned} F[\mathbf{e}_0] \equiv F[1] &= x^2 + 12x = 12\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 , \\ F[\mathbf{e}_1] \equiv F[x] &= 1 + 6x = \mathbf{e}_0 + 6\mathbf{e}_1 , \\ F[\mathbf{e}_2] \equiv F[x^2] &= 6x = 6\mathbf{e}_1 , \\ F[\mathbf{e}_3] \equiv F[x^3] &= 3x^2 + 3x = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 . \end{aligned}$$

Z liniowości F mamy więc (w konwencji sumacyjnej: powtarzające się wskaźniki są wysumowane):

$$F[\mathbf{W}] = F[\mathbf{e}_i] W_{(e)}^i = \mathbf{e}_k [F_{(e)(e)}]_i^k W_{(e)}^i ,$$

gdzie $\mathbf{e}_k [F_{(e)(e)}]_i^k = F[\mathbf{e}_i]$. Korzystając ze znalezionej wyżej działania F na wektory bazy $\mathbf{e}_i$ łatwo znajdujemy macierz $[F_{(e)(e)}]_i^k$ (k numeruje wiersze, a i kolumny) odwzorowania F :

$$[F_{(e)(e)}]_i^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Sprawdźmy jak to działa. Niech $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$. Działanie F na W możemy łatwo znaleźć bezpośrednio ze wzoru:

$$F[W] = 6x^2 - 6x + x^2 \cdot 7 + 12x \int_0^1 dt (2t^3 - 3t^2 + 7) = 72x + 13x^2 = 72\mathbf{e}_1 + 13\mathbf{e}_2 .$$

Współrzednymi wielomianu-wektora $\mathbf{W}$ w bazie $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ są

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Działając na te współrzedne macierzą $[F_{(e)(e)}]_i^k$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 13 \end{pmatrix},$$

czyli istotnie współrzedne $X_{(e)}^k$ wielomianu $X = F[W]$ w bazie $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Zadanie 25

Znaleźć jądro odwzorowania F z poprzedniego Zadania.

Rozwiązanie: Jądro jest to w tym przypadku podprzestrzeń liniowa przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 tworzona przez takie wielomiany W , że $F[W(x)] = 0$ (zero oczywiście rozumiane jako wielomian zerowy). Niech $W = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Zobaczmy, jakie muszą być współczynniki a_3, a_2, a_1, a_0 , żeby W należał do jądra F . Zażądajmy by

$$F[W] = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 + a_0x^2 + 12x \left(\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0 \right) = 0.$$

Wymaga to, by $a_1 = 0$, $3a_3 + a_0 = 0$ oraz $3a_3 + 6a_2 + 6a_1 + 12a_0 = 0$, czyli by cztery współczynniki a_i spełniały 3 równania. Weźmy a_0 jako niezależną wielkość. Wtedy $a_3 = -\frac{1}{3}a_0$ i $a_2 = -\frac{11}{6}a_0$. Zatem jądro odwzorowania F jest w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 podprzestrzenią jednowymiarową rozpiętą przez wektor o składowych

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{11}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

w bazie $\mathbf{e}_n = x^n$, takiej jak w poprzednim Zadaniu. Możemy teraz skorzystać ze znalezionej tam macierzy $[F_{(e)(e)}]_i^j$ odwzorowania F by sprawdzić, że istotnie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\frac{11}{6}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dla dowolnego λ .

Zadanie 26

Niech wektory $\mathbf{f}_0 = 1 + x$, $\mathbf{f}_1 = x + x^2$, $\mathbf{f}_2 = x^2 + x^3$, $\mathbf{f}_3 = x^3$ będą inną bazą przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia ≤ 3 (istotnie, można sprawdzić, że są one bazą). Znaleźć tej bazie macierz odwzorowania F z Zadania 24.

Uwaga: w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 trzymamy starą, “kanoniczną” bazę $\mathbf{e}_n = x^n$, tj. chcemy by nowa macierz odwzorowania F działając na składowe wielomianu stopnia ≤ 3 w bazie $\mathbf{f}_k$ dawała składowe odpowiedniego wielomianu stopnia ≤ 2 w bazie $\mathbf{e}_n$.

Rozwiązanie: Będziemy potrzebować macierzy przejścia $R_{e \leftarrow f}$ z bazy $\mathbf{f}_k$ do bazy $\mathbf{e}_n$ odwrotnej do macierzy $R_{f \leftarrow e}$ przejścia z bazy $\mathbf{e}_n$ do bazy $\mathbf{f}_k$. Tę pierwszą, $R_{e \leftarrow f}$, znajdziemy łatwo bo mamy

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_0 &= \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Stąd

$$(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli, w zapisie na wskaźniczkach, $\mathbf{f}_k = \mathbf{e}_j [R_{e \leftarrow f}]^j_k$. Jeśli mamy teraz dany wektor (wielomian) $\mathbf{V}$ w postaci $\mathbf{V} = \mathbf{f}_j V_{(f)}^j$ (gdzie $V_{(f)}^j$ są składowymi $\mathbf{V}$ w bazie $\mathbf{f}_j$), to

$$\mathbf{V} = \mathbf{f}_k V_{(f)}^k = \mathbf{e}_j [R_{e \leftarrow f}]^j_k V_{(f)}^k \equiv \mathbf{e}_j V_{(e)}^j,$$

gdzie $V_{(e)}^j = [R_{e \leftarrow f}]^j_k V_{(f)}^k$. Niech teraz $\mathbf{X} = F[\mathbf{V}]$. Macierz odwzorowania F zapisana w bazach kanonicznych $\mathbf{e}_n$ zarówno w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 jak i wielomianów stopnia ≤ 2 działa tak, że jeśli $\mathbf{X} = \mathbf{e}_i X_{(e)}^i$, to

$$\mathbf{e}_i X_{(e)}^i = F[\mathbf{V}] = F[\mathbf{e}_k] V_{(e)}^k = \mathbf{e}_i [F_{(e)(e)}]^i_k V_{(e)}^k.$$

Wyrażając tu $V_{(e)}^k$ przez $V_{(f)}^j$ za pomocą macierzy $[R_{e \leftarrow f}]^k_j$ dostajemy

$$\mathbf{e}_i X_{(e)}^i = \mathbf{e}_i [F_{(e)(e)}]^i_k [R_{e \leftarrow f}]^k_j V_{(f)}^j.$$

Tak więc współrzędne w bazie $\mathbf{e}_i$ wielomianu $\mathbf{X}$ (otrzymywanego jako obraz wielomianu $\mathbf{V}$ przy odwzorowaniu liniowym F) ze współrzędnych $\mathbf{V}$ w bazie $\mathbf{f}_j$ daje nam macierz

$$[F_{(e)(f)}]^i_j = [F_{(e)(e)}]^i_k [R_{e \leftarrow f}]^k_j.$$

Morał: Tak jak współrzędne (składowe) wektora $\mathbf{V}$ piszemy jako $V_{(e)}^i$ lub $V_{(f)}^i$, aby pamiętać, w jakiej bazie są to współrzędne, tak też i macierz odwzorowania liniowego powinniśmy opatrywać symbolami mówiącymi w jakich bazach jest ona dana. Tak więc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv F_{(e)(e)} ,$$

i

$$[F_{(e)(e)}]^i{}_k [R_{e \leftarrow f}]^k{}_j = [F_{(e)(f)}]^i{}_j .$$

Jawnie macierzowo

$$F_{(e)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} .$$

Sprawdźmy to na wielomianie $W = 2x^3 - 3x^2 + 7$. Zapiśmy go najpierw w bazie $\mathbf{f}_i$. W tym celu wyrażamy najpierw wektory $\mathbf{e}_i$ przez $\mathbf{f}_j$. Idąc “od dołu” mamy: $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$, etc. Łatwo więc znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 , \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 , \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_3 . \end{aligned}$$

Znaleźliśmy zatem macierz $R_{f \leftarrow e}$

$$R_{f \leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

odwrotną do $R_{e \leftarrow f}$. Istotnie,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Możemy teraz rozłożyć wektor $\mathbf{W}$ w bazie $\mathbf{f}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= 2\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_0 = 2\mathbf{f}_3 - 3(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) + 7(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \\ &= 7\mathbf{f}_0 - 7\mathbf{f}_1 + 4\mathbf{f}_2 - 2\mathbf{f}_3 . \end{aligned}$$

W bazie $\mathbf{f}_i$ wielomian W ma więc składowe

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Jeśli na te składowe podziałamy macierzą $F_{(e)(f)}$ to dostaniemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 13 \end{pmatrix},$$

czyli to samo, co poprzednio (bo to co wychodzi to mają być składowe $F[\mathbf{W}]$ w tej samej bazie, co poprzednio, czyli w bazie $\mathbf{e}_i$).

Zadanie 27

Zapisać macierz odwzorowania F z poprzednich dwu zadań w bazie $\mathbf{e}_n = x^n$, $n = 0, 1, 2, 3$ dla wielomianów stopnia ≤ 3 i w bazie $\mathbf{g}_j$, $j = 0, 1, 2$ danej wzorami

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \mathbf{e}_0 + 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{g}_1 &= 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{g}_2 &= 2\mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

(tj. w bazie tworzonej przez wielomiany $\mathbf{g}_0 = 1 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_1 = 3x + 4x^2$ i $\mathbf{g}_2 = 2x^2$) dla wielomianów stopnia ≤ 2 .

Rozwiązanie: Znów musimy znaleźć macierz przejścia z bazy $\mathbf{e}_n$ do bazy $\mathbf{g}_j$. Z trzeciego związku mamy $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{g}_2$. Z drugiego wtedy $3\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2$. W końcu

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{g}_0 - \frac{2}{3}(\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2) - \frac{3}{2}\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_0 - \frac{2}{3}\mathbf{g}_1 - \frac{1}{6}\mathbf{g}_2.$$

Ostatecznie więc mamy

$$(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

czyli $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i [R_{e \leftarrow g}]^i_j$ oraz

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

czyli $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_j[R_{g \leftarrow e}]^j_k$. Musi oczywiście być $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_j[R_{g \leftarrow e}]^j_k = \mathbf{e}_i[R_{e \leftarrow g}]^i_j[R_{g \leftarrow e}]^j_k$, czyli $[R_{e \leftarrow g}]^i_j[R_{g \leftarrow e}]^j_k = \delta^i_k$. Można to jawnie sprawdzić:

$$R_{e \leftarrow g} \cdot R_{g \leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Podobnie powinno być $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i[R_{e \leftarrow g}]^i_j = \mathbf{g}_k[R_{g \leftarrow e}]^k_i[R_{e \leftarrow g}]^i_j$, tj. $[R_{g \leftarrow e}]^k_i[R_{e \leftarrow g}]^i_j = \delta^k_j$:

$$R_{g \leftarrow e} \cdot R_{e \leftarrow g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz zapisywać sobie związek $\mathbf{X} = F[\mathbf{V}]$ w dowolnych bazach:

$$\mathbf{e}_i X_{(e)}^i = \mathbf{e}_i [F_{(e)(e)}]^i_j V_{(e)}^j, \quad \text{czyli} \quad X_{(e)}^i = [F_{(e)(e)}]^i_j V_{(e)}^j,$$

lub, wyrażając $\mathbf{e}_i$ przez $\mathbf{g}_j$,

$$\mathbf{g}_j [R_{g \leftarrow e}]^j_i [F_{(e)(e)}]^i_j V_{(e)}^j \equiv \mathbf{g}_j [F_{(g)(e)}]^j_j V_{(e)}^j \quad \text{czyli} \quad X_{(g)}^i = [F_{(g)(e)}]^i_j V_{(e)}^j,$$

gdzie $[F_{(g)(e)}]^i_j = [R_{g \leftarrow e}]^i_k [F_{(e)(e)}]^k_j$. Jawnie $(F_{(e)(e)})$ jest podana w poprzednim zadaniu:

$$F_{(g)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Można też mieć macierz odwzorowania F w bazie $\mathbf{f}_k$ dla wielomianów stopnia ≤ 3 i bazie $\mathbf{g}_j$ dla wielomianów stopnia ≤ 2 . W tym celu trzeba $V_{(e)}^j$ zapisać jako $V_{(e)}^j = [R_{e \leftarrow f}]^j_k V_{(f)}^k$, co da $[F_{(g)(f)}]^j_k = [F_{(g)(e)}]^j_l [R_{e \leftarrow f}]^l_k$, czyli jawnie (biorąc macierz $[R_{e \leftarrow f}]^l_k$ z poprzedniego zadania)

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{3} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tę samą macierz $F_{(g)(f)}$ można także otrzymać z macierzy $F_{(e)(f)}$ znalezionej w poprzednim zadaniu: $[F_{(g)(f)}]^j_k = [R_{g \leftarrow e}]^j_l [F_{(e)(f)}]^l_k$ czyli

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{3} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy to wszystko na naszym wielomianie $W = 2x^3 - 3x^2 + 7$, który w bazie $\mathbf{e}_j$ miał składowe $(7, 0, -3, 2)$. Działając na te składowe macierzą $F_{(g)(e)}$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -\frac{83}{2} \end{pmatrix},$$

to jest składowe $F[\mathbf{W}]$ w bazie $\mathbf{g}_j$. Zatem

$$F[\mathbf{W}] = 0 \cdot \mathbf{g}_0 + 24 \cdot \mathbf{g}_1 - \frac{83}{2} \cdot \mathbf{g}_2 = 24 \cdot (3x + 4x^2) - \frac{83}{2} \cdot (2x^2) = 72x + 13x^2,$$

tak, jak być powinno ($F[\mathbf{W}]$ jest wektorem i nie może zależeć od wyboru baz, które są czymś pomocniczym jedynie). Podobnie, działając macierzą $F_{(g)(f)}$ na znalezione w poprzednim zadaniu składowe $(7, -7, 4, -2)$ naszego wielomianu W w bazie $\mathbf{f}_j$ otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{2} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -\frac{83}{2} \end{pmatrix},$$

czyli te same składowe $F[\mathbf{W}]$ w bazie $\mathbf{g}_j$.

Zadanie 28

Pewne odwzorowanie liniowe G z R^3 w R^3 jest takie, że

$$G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ tego odwzorowania w bazie kanonicznej

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć także wynik działania

$$G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

Rozwiązanie: Dla porządku trzeba najpierw sprawdzić, czy wektory

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

na których zadane jest działanie G są liniowo niezależne. Jeśli są, to rozpinają całą przestrzeń R^3 i mogą być jej bazą. W takim przypadku zadanie działania odwzorowania G na tych trzech wektorach wyznacza już działanie G na każdy wektor z przestrzeni będącej dziedziną G , bo każdy wektor z tej dziedziny można zapisać jako kombinację liniową trzech wektorów, na których działanie G jest zadane. Gdyby się okazało (ale się nie okaże), że trzy wektory $\mathbf{f}_i$, na których działanie G jest zadane są liniowo zależne, to trzeba by sprawdzić, czy takie zdefiniowanie G jest niesprzeczne, tzn. czy spełniona jest liniowość; nie dałoby się jednak wtedy znaleźć całej macierzy odwzorowania G w żadnej bazie. (Niemniej, nawet jeśli trzy wektory $\mathbf{f}_i$ nie rozpinają by całej dziedziny G , nie przekreślałoby to z góry możliwości znalezienia wartości G na podanym w zadaniu wektorze, mogłoby się bowiem okazać, że akurat ten wektor jest liniową kombinacją tych, na których G jest zadane. Dopiero, gdyby ten wektor nie był liniowo zależny od tych, na których działanie G jest zadane, druga część zadania nie mogłaby być rozwiązana). Równanie $\lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \lambda_3 \mathbf{f}_3 = 0$ daje układ równań

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0.\end{aligned}$$

Z trzeciego $\lambda_2 = \lambda_1$ do pierwszego i drugiego, co da układ dwu równań $2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$ oraz $3\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, czyli $5\lambda_1 = 0$ etc. Widać, że jedynym rozwiązaniem jest $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, czyli wektory $\mathbf{f}_i$ są liniowo niezależne. To samo możemy sprawdzić gdy chodzi o wektory

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Równanie $\xi_1 \mathbf{g}_1 + \xi_2 \mathbf{g}_2 + \xi_3 \mathbf{g}_3 = 0$ daje układ równań

$$\begin{aligned}3\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3 &= 0,\end{aligned}$$

też ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, czyli - jak się tego kiedyś dowiemy - odwzorowanie G jest *niesobliwe* bo przeprowadza R^3 w całą R^3 (ma więc trywialne jądro do którego należy tylko wektor zerowy). Zatem w bazach: $\mathbf{f}_i$ dla wektorów odwzorowywanych i $\mathbf{g}_j$ dla wektorów będących wynikiem odwzorowania macierz G ma postać trywialną

$$G_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że jeśli $G[\mathbf{V}] = \mathbf{X}$ i $\mathbf{V} = \mathbf{f}_i V_{(f)}^i$, a $\mathbf{X} = \mathbf{g}_j X_{(g)}^j$, to macierz $G_{(g)(f)}$ daje $X_{(g)}^i$ z $V_{(f)}^i$: $X_{(g)}^j = [G_{(g)(f)}]^j_i V_{(f)}^i$.

Jeśli teraz $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_k [R_{e \leftarrow f}]^k_i$ to $V_{(e)}^k = [R_{e \leftarrow f}]^k_i V_{(f)}^i$ i odwrotnie, $V_{(f)}^i = [R_{f \leftarrow e}]^i_k V_{(e)}^k$. W podobny sposób jeśli $\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_k [R_{e \leftarrow g}]^k_i$ to $X_{(e)}^k = [R_{e \leftarrow g}]^k_i X_{(g)}^i$ i odwrotnie, $X_{(g)}^i = [R_{g \leftarrow e}]^i_k X_{(e)}^k$. Jeśli więc znajdziemy macierze $[R_{e \leftarrow g}]$ i $[R_{f \leftarrow e}]$ to będziemy mogli napisać

$$\begin{aligned} X_{(e)}^k &= [R_{e \leftarrow g}]^k_i X_{(g)}^i = [R_{e \leftarrow g}]^k_i [G_{(g)(f)}]^i_j V_{(f)}^j \\ &= [R_{e \leftarrow g}]^k_i [G_{(g)(f)}]^i_j [R_{f \leftarrow e}]^j_l V_{(e)}^l \equiv [G_{(e)(e)}]^k_l V_{(e)}^l . \end{aligned}$$

Zatem $[G_{(e)(e)}]^k_l = [R_{e \leftarrow g}]^k_i [G_{(g)(f)}]^i_j [R_{f \leftarrow e}]^j_l$. Aby więc znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w bazie kanonicznej trzeba znaleźć macierze $[R_{e \leftarrow g}]$ oraz $[R_{f \leftarrow e}]$. Pierwsza jest banalna, bo mamy dane wektorki $\mathbf{g}_i = F[\mathbf{f}_i]$: np. $\mathbf{g}_1 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, etc. Stąd

$$[R_{e \leftarrow g}] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} .$$

Podobnie banalnie jest dana macierz $[R_{e \leftarrow f}]$:

$$[R_{e \leftarrow f}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ale my potrzebujemy $[R_{f \leftarrow e}]$. Musimy więc rozwiązać układ równań wektorowych

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{f}_3 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 . \end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$. Do drugiego dodać trzecie: $3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$. Dalej już łatwo:

$$\begin{aligned} 3\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3 &= 3\mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_1 , & \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1 , \\ 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 , & 6\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 &= 2\mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3 . \end{aligned}$$

Stąd: $5\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ oraz $5\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$ i teraz $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}(5\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - 2\mathbf{f}_3 - 3\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)$. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{5}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_3) , \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{5}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3) , \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{5}(3\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) , \end{aligned}$$

czyli macierz $R_{f \leftarrow e}$ ma postać

$$[R_{f \leftarrow e}] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aby sprawdzić, czy się nie pomyliliśmy w rachunkach i przeciwłożyć mnożenie macierzy sprawdzamy

$$[R_{e \leftarrow f}] \cdot [R_{f \leftarrow e}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W drugą stronę też można sprawdzić:

$$[R_{f \leftarrow e}] \cdot [R_{e \leftarrow f}] = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No to świetnie. Zatem możemy już znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_i$: $[G_{(e)(e)}]_l^k = [R_{e \leftarrow g}]_i^k [G_{(g)(f)}]_j^i [R_{f \leftarrow e}]_l^j = [R_{e \leftarrow g}]_i^k [R_{f \leftarrow e}]_l^i$ ponieważ $[G_{(g)(f)}]_j^i = \delta_j^i$. Czyli macierzowo

$$G_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli mamy już $[G_{(e)(e)}]$ w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, to możemy łatwo znaleźć działanie G na wektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

W bazie kanonicznej ma on oczywiste składowe $(2, 0, -1)$ a zatem współrzędne (składowe) wektora $G(\mathbf{w})$ w bazie kanonicznej są dane przez

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Wspomniana wyżej nieosobliwość odwzorowania G odbija się w tym, że wyznacznik

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

który jest różny od zera. W konsekwencji (jak się tego dowiemy) $\text{Ker}(G) = \{\mathbf{0}\}$ (jądro odwzorowania jest trywialne).

Innym sposobem znalezienia $G(\mathbf{w})$ jest rozłożenie $\mathbf{w}$ w bazie wektorów $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3$, na których działanie G zostało zadane, tzn. znalezienie współczynników y_i , $i = 1, 2, 3$ we wzorze

$$y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Łatwy rachunek daje $y_1 = -\frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{4}{5}$, $y_3 = -\frac{7}{5}$. Zatem korzystając z liniowości odwzorowania G możemy napisać:

$$\begin{aligned} G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) &= -\frac{1}{5}G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{4}{5}G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) - \frac{7}{5}G\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{7}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tak jak poprzednio.

Zadanie 29

Dane są dwie macierze

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{ i } \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć iloczyny $F \cdot G$ i $G \cdot F$.

Rozwiązanie: Macierz F jest macierzą odwzorowania $F: R^3 \rightarrow R^1$, macierz zaś G - macierzą odwzorowania $G: R^1 \rightarrow R^3$; obie one są dane w jakichś bazach. Aby mnożenia miały sens trzeba przyjąć, że odpowiednie bazy są zgodne. W notacji wprowadzonej w poprzednich zadaniach powinno być tak

$$\begin{aligned} F \cdot G &\equiv F_{(g')(f)} \cdot G_{(f)(g)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14), \\ G \cdot F &\equiv G_{(f')(g)} \cdot G_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Macierz $F \cdot G$ jest macierzą odwzorowania z R^1 w R^1 i wtedy bazami $\mathbf{g}_i$, gdzie $i = 1$ i $\mathbf{g}'_i$ z $i = 1$ mogą np. być bazy kanoniczne R^1 [1] (ale nie muszą), a baza $\mathbf{f}_i$ z $i = 1, 2, 3$ przestrzeni R^3 w której dana jest macierz $G_{(f)(g)}$ musi być (żeby mnożenie macierzy miało sens) tą samą bazą w przestrzeni R^3 , w której jest dana macierz F . Z kolei macierz $G \cdot F$ jest macierzą odwzorowania z R^3 w R^3 i żeby mnożenie miało sens nie musimy zakładać, że bazy $\mathbf{f}_i$ z $i = 1, 2, 3$ i $\mathbf{f}'_i$ z $i = 1, 2, 3$ są tą samą bazą, ale musimy założyć, że baza w przestrzeni R^1 w której dane są macierze F i G jest ta sama.

Uwaga: Odwzorowanie liniowe takie jak F z przestrzeni wektorowej (np. R^3) w przestrzeń wektorową, którą można utożsamić z ciałem (np. R^1 , jak tutaj lub C^1) nazywa się *kowektorem* lub *jednoformą* (oczywiście, skoro istnieją jednoformy, to należy domniemywać, że są też i dwu- i więcej-formy; istotnie, są, i to prowadzi do teorii form różniczkowych i innych cudów matematyki z nimi związanych).

Zadanie 30

Jeśli jest to możliwe, znaleźć iloczyny $A \cdot B$ i $B \cdot A$ macierzy:

$$\begin{aligned} i) \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ ii) \quad & A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, & B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Rozwiązanie: *i)* Ponieważ obie macierze są kwadratowe oba mnożenia są wykonalne

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tu akurat $A \cdot B = B \cdot A$, choć naogół tak nie jest.

Odp. *ii)* Można tylko obliczyć $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 31

Funkcję $\exp(A)$, której argumentem jest macierz A definiujemy przez rozwinięcie w szereg Taylora:

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{4!} A^4 + \dots$$

(I , jest tu macierzą mającą na diagonalu jedyńki, i zera wszędzie poza diagonalą; kiedyś się dowiemy, że szereg ten jest zawsze zbieżny). Obliczyć eksponensy od macierzy tA , tB i tC (gdzie $t \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Obliczmy najpierw $A \cdot A \cdot A = A \cdot A^2 = A^3$:

$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nietrudno spostrzec, że $A^4 = 0$. Zatem w tym przypadku

$$\exp(tA) = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobnie obliczmy $B \cdot B = B^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

czyli $B^2 = 2^2I$. Wnioskujemy stąd, że $B^3 = 2^2B$, $B^4 = 2^4I$, etc. Ogólnie $B^{2n} = 2^{2n}I$, $B^{2n+1} = B^{2n} \cdot B = 2^{2n}B = 2^{2n+1} \frac{1}{2}B$. Możemy więc napisać

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (tB)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (tB)^{2n+1} \\ &= I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2}B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = I \operatorname{ch}(2t) + \frac{1}{2}B \operatorname{sh}(2t). \end{aligned}$$

Obliczmy znowu $C \cdot C \cdot C = C \cdot C^2 = C^3$:

$$\begin{aligned} C^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ponownie, jak w przypadku macierzy A mamy $C^4 = 0$ więc

$$\exp(tC) = I + tC + \frac{t^2}{2!}C^2 + \frac{t^3}{3!}C^3 = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Przypomnienie.

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej (dla macierzy niekwadratowych wyznacznika nie można określić!)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

nazywamy liczbę (z ciała $\mathbb{K}$, z którego są elementy a_{ij} macierzy A) daną wzorem

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}.$$

Jest to suma $n!$ składników, z których każdy jest iloczynem n czynników będących pewnymi elementami macierzy A . $\operatorname{sgn}(\pi)$ jest znakiem permutacji π czyli $(-1)^k$, gdzie k jest równe liczbie pierestanowok potrzebnych do ustawienia ciągu liczb $\pi(1), \pi(2), \pi(3), \dots, \pi(n)$ w porządku $1, 2, 3, \dots, n$.

Ważne by zauważyć, iż w każdym składniku $a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$ sumy definiującej wyznacznik występuje dokładnie po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza macierzy A (tzn. w każdym iloczynie będącym składnikiem sumy każda kolumna ma dokładnie jednego “reprezentanta” i każdy wiersz ma dokładnie jednego “reprezentanta”). Z powyższej definicji natychmiast otrzymujemy wzory

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

jako mające należne liczby składników ($n!$) i spełniające regułę “reprezentantów”.

Wygodnie jest też traktować wyznacznik jak funkcję kolumn $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \dots, n$ macierzy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \dots \ \mathbf{C}_n),$$

a z kolei kolumny $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \dots, n$ traktować jak wektory z $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$ (ogólniej z $\mathbb{K}^n$)

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Właściwości wyznacznika

- $\det A = \det A^T$, gdzie macierz transponowaną A^T tworzy się z A przez odbicie elementów A symetrycznie względem diagonalii wyznaczonej przez elementy a_{kk} :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Z tego wynika również, że wyznacznik można traktować jak funkcję wierszy $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ macierzy A , które to wiersze też można uważać za wektory z $\mathbb{R}^n$ lub $\mathbb{C}^n$

- jeśli choć jeden wiersz lub choć jednak kolumna macierzy A składa się z samych zer to $\det A = 0$
- zamiana miejscami dwu kolumn lub dwu wierszy macierzy A zmienia znak wyznacznika (wyznacznik jest całkowicie antysymetryczną funkcją kolumn i wierszy macierzy A)

$$\det(\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{C}_k \dots \mathbf{C}_l \dots \mathbf{C}_n) = -\det(\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{C}_l \dots \mathbf{C}_k \dots \mathbf{C}_n),$$

dla dowolnych $1 \leq k, l \leq n$

- jeśli wszystkie elementy jednej z kolumn A lub wszystkie elementy jednego z wierszy A pomnożymy przez λ to wyznacznik też ulegnie pomnożeniu przez λ

$$\det(\mathbf{C}_1 \dots \lambda \mathbf{C}_k \dots \mathbf{C}_n) = \lambda \det(\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{C}_k \dots \mathbf{C}_n),$$

- wyznacznik jest liniową funkcją każdej z kolumn (każdego z wierszy):

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}_1 \dots \lambda_1 \mathbf{C}_k^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{C}_k^{(2)} \dots \mathbf{C}_n) &= \lambda_1 \det(\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{C}_k^{(1)} \dots \mathbf{C}_n) \\ &\quad + \lambda_2 \det(\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{C}_k^{(2)} \dots \mathbf{C}_n) \end{aligned}$$

- wyznacznik nie zmienia się jeśli jedną z jego kolumn (lub wiersz) zastąpimy sumą tejże kolumny (wiersza) i dowolnej innej kolumny (wiersza) pomnożonej przez dowolną liczbę

$$\det(\mathbf{C}_1 \dots \tilde{\mathbf{C}}_k \dots \mathbf{C}_n) = \det(\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{C}_k \dots \mathbf{C}_n),$$

gdzie $\tilde{\mathbf{C}}_k = \mathbf{C}_k + \sum_{j \neq k} \lambda_j \mathbf{C}_j$.

Wynika stąd, wyznacznik znika (tj. równa się zero) zawsze gdy wektory $\mathbf{C}_i$, $i = 1, n$ tworzące kolumny (lub wiersze) macierzy A są *liniowo zależne*.

Przykłady

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} ,$$

co wynika z tego, że w składnikach sumy występuje tylko po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza macierzy A . Stąd wyznacznik macierzy jednostkowej jest równy zawsze 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 ,$$

bo trzeba zamienić miejscami kolumny drugą i czwartą.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

bo odejmując od czwartej kolumny dwa razy trzecią dostajemy zerową czwartą kolumnę.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24 , \end{aligned}$$

gdzie w pierwszym kroku od kolumn drugiej, trzeciej i czwartej odjęliśmy pierwszą, potem wyprowadziliśmy czynnik 2 przed wyznacznik, potem od kolumn trzeciej i czwartej odjęliśmy kolumnę drugą, potem wyprowadziliśmy czynnik 3 przed etc.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 .$$

Najpierw od kolumn drugiej, trzeciej i czwartej odjęliśmy pierwszą, a potem zauważyliśmy, że wynik wynika już z tego, iż w składnikach sumy dającej wyznacznik występuje tylko po jednym elemencie z każdej kolumny i po jednym elemencie z każdego wiersza. Wniosek: wyznacznik macierzy “gorno-” lub “dolno-trójkątnej”

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

jest równy iloczynowi jej elementów diagonalnych, bo przez dozwolone operacje na kolumnach lub wierszach (tj. operacje nie zmieniające wartości wyznacznika) można ją zawsze sprowadzić do macierzy diagonalnej.

Przykład: Obliczmy wyznacznik macierzy 3×3

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 \cdot 0 + 7 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 6 - 8 \cdot 1 \cdot 3 - 5 \cdot 7 \cdot 0 = 0.$$

Zerowanie się wyznacznika zawsze sygnalizuje liniową zależność jego kolumn. I istotnie: w powyższej macierzy $\mathbf{C}_3 = -\mathbf{C}_1 + 2\mathbf{C}_2$.

Przypomnienie

Minorem stopnia r macierzy A o wymiarach $n \times m$ (ważne: minory można określać także dla macierzy niekwadratowych o $m \neq n$) nazywamy wyznacznik podmacierzy $r \times r$ utworzonej z macierzy A przez skreślenie $n - r$ jej wierszy i $m - r$ jej kolumn.

Dopełnieniem algebraicznym A_{jk} elementu a_{jk} macierzy kwadratowej A o wymiarach $n \times n$ (uwaga: tu znów mowa o macierzach kwadratowych!) nazywamy liczbę

$$A_{jk} \equiv (-1)^{j+k} M_{jk},$$

gdzie M_{jk} jest minorem macierzy A utworzonym przez skreślenie jej j -tego wiersza i k -tej kolumny. Np. w przypadku macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dopełnieniem algebraicznym elementu a_{13} jest

$$A_{13} = (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 117.$$

Rozwinięcie Laplace’a wyznacznika macierzy A wymiaru $n \times n$ względem j -tego wiersza

$$\det A = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + a_{j3}A_{j3} + \dots + a_{jn}A_{jn} ,$$

i względem k -tej kolumny

$$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k} + \dots + a_{nk}A_{nk} .$$

Wiersz j lub kolumna k mogą być wybrane dowolnie.

Przykład

Zastosujmy Laplace’a do macierzy górnotrójkątnej (wiemy co powinno wyjść). Rozwijamy jej wyznacznik względem ostatniego wiersza

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}M_{nn} = a_{nn}(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix} .$$

Ponieważ w ostatnim wierszu tylko element a_{nn} jest niezerowy, suma (rozwinięcie wyznacznika względem ostatniego wiersza) $a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + a_{n3}A_{n3} + \dots + a_{nn}A_{nn}$ składa się tylko z ostatniego wyrazu. Następnie rozwijamy ponownie pozostały wyznacznik, względem ostatniego, $(n-1)$ -ego, wiersza itd. Widać, że w rezultacie dostaje się znany wynik, że wyznacznik macierzy górno-trójkątnej jest iloczynem jej elementów diagonalnych. Można było uzyskać to samo rozwijając wyznacznik względem pierwszej kolumny (tylko żeby to przyzwoicie zapisywać, trzeba by było w każdym kolejnym kroku przenumeroować elementy macierzy...)

Zadanie (uświęcony tradycją wyznacznik Vandermonda)

Obliczyć wyznacznik

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Rozwiązanie: Sprawdźmy najpierw dla $n = 2$ i $n = 3$:

$$n = 2 : \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 .$$

$$n = 3 : \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) .$$

Stawiamy więc hipotezę, że

$$V_n = \prod_{k>l} (x_k - x_l).$$

Dowód przeprowadzamy posługując się indukcją matematyczną. Zakładamy, że teza jest prawdziwa dla V_{n-1} . Na V_n dokonujemy następujących operacji (nie zmieniających wyznacznika): $\mathbf{C}_n \rightarrow \mathbf{C}_n - x_n \mathbf{C}_{n-1}$, $\mathbf{C}_{n-1} \rightarrow \mathbf{C}_{n-1} - x_n \mathbf{C}_{n-2}, \dots \mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 - x_n \mathbf{C}_1$. Daje to

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & x_1^2(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-3}(x_1 - x_n) & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & x_2^2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-3}(x_2 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ 1 & x_3 - x_n & x_3(x_3 - x_n) & x_3^2(x_3 - x_n) & \dots & x_3^{n-3}(x_3 - x_n) & x_3^{n-2}(x_3 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Teraz dokonujemy rozwinięcia Laplace'a V_n względem ostatniego wiersza, który ma tylko jeden element niezerowy:

$$V_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & x_1^2(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & x_2^2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ x_3 - x_n & x_3(x_3 - x_n) & x_3^2(x_3 - x_n) & \dots & x_3^{n-2}(x_3 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & x_{n-1}^2(x_{n-1} - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix}.$$

Wyciągamy następnie z wiersza pierwszego wspólny czynnik $(x_1 - x_n)$, z drugiego czynnik $(x_2 - x_n)$, $\dots$ i z ostatniego wiersza czynnik $(x_{n-1} - x_n)$ i znajdujemy, że

$$\begin{aligned} V_n &= (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} (x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n) \cdot V_{n-1} \\ &= (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) \cdot V_{n-1}. \end{aligned}$$

To zaś kończy dowód bo na mocy założenia indukcyjnego V_{n-1} jest już dany przez odpowiedni iloczyn.

Zadanie

Udowodnić, że $\det C = \det A \cdot \det B$ jeśli

$$C = \begin{pmatrix} A_{p \times p} & [0]_{p \times l} \\ [0]_{l \times p} & B_{l \times l} \end{pmatrix}.$$

A i B są tu macierzami wymiarów odpowiednio $p \times p$ i $l \times l$, a $[0]_{p \times l}$ i $[0]_{l \times p}$ są macierzami zerowymi wymiarów $p \times l$ i $l \times p$.

Rozwiązanie: Można posłużyć się indukcją matematyczną względem l . Dla $l = 1$, tzn. gdy macierz B składa się tylko z jednego elementu, wzór jest prawdziwy na mocy rozwinięcia Laplace'a (zastosowanego do ostatniej kolumny bądź ostatniego wiersza). Zakładamy więc, że wzór jest prawdziwy dla macierzy B wymiaru $(l-1) \times (l-1)$ i badamy przypadek

macierzy B wymiaru $l \times l$. Rozwijamy wyznacznik całej macierzy C względem ostatniego wiersza, w którym niezerowe są elementy $c_{p+1 \ p+l} \equiv b_{1l}$, $c_{p+2 \ p+l} \equiv b_{2l}$, $\dots$ $c_{p+l \ p+l} \equiv b_{ll}$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{p \times p} & [0]_{p \times l} \\ [0]_{l \times p} & B_{l \times l} \end{vmatrix} &= c_{p+1 \ l+l} (-1)^{p+1+p+l} M_{p+1 \ p+l}^C + c_{p+2 \ l+l} (-1)^{p+2+p+l} M_{p+2 \ p+l}^C + \dots \\ &\quad + c_{p+l \ l+l} (-1)^{p+l+p+l} M_{p+l \ p+l}^C \\ &= b_{1l} (-1)^{p+1+p+l} M_{p+1 \ p+l}^C + b_{2l} (-1)^{p+2+p+l} M_{p+2 \ p+l}^C + \dots \\ &\quad + b_{ll} (-1)^{p+l+p+l} M_{p+l \ p+l}^C . \end{aligned}$$

Każdy z minorów $M_{p+k \ p+l}^C$ ($k = 1, \dots, l$) macierzy C jest teraz wyznacznikiem podmacierzy o wymiarach $(p+l-1) \times (p+l-1)$, do którego stosuje się założenie indukcyjne. Na mocy tego założenia odpowiednie minory $M_{p+k \ p+l}^C$ ($k = 1, \dots, l$) macierzy C są równe odpowiednim minorom macierzy B razy wyznacznik macierzy A :

$$M_{p+k \ p+l}^C = \det A \cdot M_{kl}^B, \quad k = 1, \dots, l .$$

Zatem

$$\begin{aligned} \det C &= \det A (-1)^{p+p} \cdot (b_{1l} (-1)^{l+1} M_{1l}^B + b_{2l} (-1)^{l+2} M_{2l}^B + \dots + b_{ll} (-1)^{l+l} M_{ll}^B) \\ &= \det A \cdot \det B , \end{aligned}$$

bo wyrażenie w nawiasie jest niczym innym jak rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy B względem jej ostatniego wiersza.

Przypomnienie

Uogólnieniem rozwinięcia Laplace'a są wzory

$$a_{l1} A_{j1} + a_{l2} A_{j2} + a_{l3} A_{j3} + \dots + a_{ln} A_{jn} = \delta_{lj} \cdot \det A ,$$

$$a_{1k} A_{1l} + a_{2k} A_{2l} + a_{3k} A_{3l} + \dots + a_{nk} A_{nl} = \delta_{kl} \cdot \det A ,$$

w których $\delta_{lj} = 1$, gdy $l = j$ i $\delta_{lj} = 0$, gdy $l \neq j$.

Wzory te pozwalają napisać wzór na macierz odwrotną do danej. Mianowicie: jeśli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} ,$$

(ważne: w A^{-1} na miejscu kj stoi A_{jk} , nie zaś A_{kj} !). Istotnie: gdy mnożymy A i A^{-1} to element c_{jk} macierzy $C = A \cdot A^{-1}$ jest równy

$$c_{jk} = \frac{1}{\det A} (a_{j1}A_{k1} + a_{j2}A_{k2} + \dots + a_{jn}A_{kn}),$$

a to właśnie na mocy pierwszego ze wzorów będących uogólnionymi rozwinięciami Laplace'a da $c_{jk} = \delta_{jk}$. Nietrudno zobaczyć, że drugi z tych wzorów zapewnia, iż $(A^{-1} \cdot A)_{jk} = \delta_{jk}$.

Mamy stad natychmiast wzór dla macierzy 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Zadanie Korzystając z powyższej metody³ odwrócić macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy dopełnienia algebraiczne wszystkich elementów macierzy:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Wyznacznik macierzy A jest np. dany przez $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) = -1$. Stąd A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że istotnie jest to macierz odwrotna. Oczywiście, jeśli $\det A = 0$, to macierz odwrotna A^{-1} nie istnieje.

³Inna, naogół znacznie szybsza metoda odwracania macierzy była opisana w zadaniu 19.

Układem Cramera nazywa się liniowy układ n równań na n niewiadomych

47

tylko x_k to wzory Cramera pozwalają wyznaczyć od razu tę niewiadomą bez wyznaczania pozostałych (sprowadza się to do obliczenia dwu wyznaczników tylko).

Ze wzorów Cramera można ponadto wysnuć dwa wnioski: po pierwsze, jeśli $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, a $\det A = 0$, to układ nie ma rozwiązania i po drugie, jeśli $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (jednorodny układ równań), to nietrywialne rozwiązanie $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ istnieje tylko wtedy, gdy $\det A = 0$ (ten wniosek jest w fizyce niezwykle często wykorzystywany; tu będzie nam potrzebny m.in. przy rozwiązywaniu tzw. zagadnienia własnego operatora liniowego).

Zadanie. Z układu równań:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + \quad \quad x_3 &= 3. \end{aligned}$$

wyznaczyć x_1 .

Rozwiązanie: Macierz tego układu ma postać

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jej wyznacznik obliczamy dokonując najpierw operacji: $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1 - 2\mathbf{R}_4$, $\mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_4$, $\mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4$, co daje

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i teraz} \quad \det A = 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

Zgodnie ze podanymi wzorami mamy więc

$$x_1 = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \left\{ -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right\}.$$

Stąd $x_1 = (1/9)[-3 \cdot 3 - 1 \cdot (-18)] = 1$. W podobny sposób można znaleźć (jeśli by były potrzebne) $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ i $x_4 = 3$. (Ponieważ rozwiązanie takiego układu równań jest, gdy $\det A \neq 0$, jednoznaczne więc zgadnięcie lub ściągnięcie od kolegi/koleżanki x_2 , x_3 i x_4 i sprawdzenie, że wraz z x_1 spełniają one układ załatwia sprawę sprawdzenia poprawności wyliczonego własnoręcznie x_1).

Przypomnienie

Rząd $r(A)$ macierzy A wymiaru $m \times n$ (niekoniecznie kwadratowej), która ma n kolumn $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_n$: tworzących n wektorów o długości m (i elementach z ciała $\mathbb{K} = \mathbb{R}^1$ lub $\mathbb{C}^1$) jest to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów-kolumn $\mathbf{C}_i$. Rząd macierzy jest więc to wymiar podprzestrzeni liniowej $\mathbb{K}^n$ rozpinanej przez kolumny $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_n$ macierzy A .

Przykład. Rząd macierzy A (nad ciałem $\mathbb{C}^1$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & i & 2+i \end{pmatrix},$$

jest równy 2 bo $\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$.

Właściwości rzędu macierzy. Rząd macierzy A i rząd macierzy transponowanej A^T są sobie równe:

$$r(A) = r(A^T).$$

(Inaczej: rząd “kolumnowy” macierzy i jej rząd “wierszowy” są takie same). Wynika stąd natychmiast, że

$$r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n).$$

Rząd macierzy nie zmieni się jeśli

- którąś z kolumn (lub wierszy) pomnożymy przez jakąś liczbę $\lambda \neq 0$ (z ciała $\mathbb{K}$)
- przestawimy kolumny (wiersze)
- do jednej z kolumn (wiersza) dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn (wierszy)

Zadanie. Znaleźć rząd macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Dokonajmy operacji: $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 - (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2)$, $\mathbf{C}_4 \rightarrow \mathbf{C}_4 - 2(\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2)$. Daje to

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i natychmiast widać, że $r(A) = 2$.

Zadanie. Znaleźć rząd macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Dokonajmy operacji: $\mathbf{C}_4 \rightarrow \mathbf{C}_4 - \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$. Daje to

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A dalej można po prostu rozwiązywać problem liniowej (nie)zależności kolumn: $\lambda_1 \mathbf{C}_1 + \lambda_2 \mathbf{C}_2 + \lambda_3 \mathbf{C}_3 + \lambda_4 \mathbf{C}_4 = \mathbf{0}$, czyli

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wyrażając z ostatnich trzech równań λ_2 , λ_3 i λ_4 przez λ_1 i wstawiając do pierwszego znajdujemy sofort, że $\lambda_1 = 0$, a stąd, z pozostałych równań $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Stąd kolumny $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ są liniowo niezależne, a co za tym idzie rząd wyjściowej macierzy jest równy 4.

Przypomnienie: Rząd $r(A)$ macierzy A jest równy najwyższemu ze stopni n_k *niezerowych* minorów M_k^A jakie można utworzyć z A skreślając w niej pewną liczbę kolumn i wierszy (tak by otrzymać podmacierz wymiaru $n_k \times n_k$). Ze stwierdzenia tego wynika natychmiast to, że “rząd kolumnowy” macierzy jest taki sam, jak jej “rząd wierszowy”. Stwierdzenie to daje nam też metodę badania rzędu macierzy.

Zadanie: Określić rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Niewątpliwie $r(A) \leq 4$. Zanim zaczniemy obliczać wyznaczniki lepiej wykonać parę operacji. Np.: $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_4 \rightarrow \mathbf{C}_4 - 4\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_5 \rightarrow \mathbf{C}_5 - 4\mathbf{C}_2$. Dadzą one

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz zaryzykować i utworzyć minor M^A stopnia 4 skreślając pierwszą kolumnę:

$$M^A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

To już łatwo obliczyć: $M^A = -1 \cdot (-2) - 1 \cdot (1) = 1 \neq 0$. Znaleźliśmy więc w macierzy otrzymanej z A niezerowy minor stopnia 4, a to oznacza, że macierz ta, a zatem i sama macierz A jest rzędu 4 (gdyby wybrany minor okazał się zerowy, to wciąż nie moglibyśmy wykluczyć, że $r(A) = 4$; trzeba by wtedy sprawdzić kolejny z wszystkich pięciu minorów czwartego stopnia, jakie można wybrać w A).

Przypomnienie

Ogólny układ m równań liniowych z n niewiadomymi postaci

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ .. & & .. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lub, równoważnie,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

lub, jeszcze inaczej, ale wciąż równoważnie,

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ma rozwiązanie, czyli jest *niesprzeczny* gdy rząd *macierzy rozszerzonej* A^R układu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

jest nie większy (mniejszy być nie może) niż rząd macierzy A układu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

Jest to oczywiste jeśli zapisać ostatnią z podanych postaci układu równań jako równość

$$x_1 \mathbf{C}_1 + x_2 \mathbf{C}_2 + \dots + x_n \mathbf{C}_n = \mathbf{C}_B,$$

która oznacza, że wektor-kolumna $\mathbf{C}_B$ musi się dać przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów-kolumn $\mathbf{C}_i$, $i = 1, \dots, n$ macierzy A . Oznacza to bowiem, że kolumna $\mathbf{C}_B$ musi być liniowo zależna od kolumn $\mathbf{C}_i$, czyli jej dostawienie do macierzy A w celu stworzenia macierzy rozszerzonej A^R nie może podwyższyć rzędu macierzy.

Ogólna postać rozwiązania. Jeśli $r(A^R) = r(A) = r$, gdzie z konieczności $r \leq \min(n, m)$, tj. jeśli układ jest niesprzeczny, to w macierzy A musi się dać wybrać niezerowy minor stopnia r , tj. musi w niej istnieć podmacierz wymiaru $r \times r$ o niezerowym wyznaczniku (trzeba ją znaleźć). Załóżmy, że podmacierz ta składa się z r pierwszych kolumn i r pierwszych wierszy macierzy A (zawsze można tak przenumerać równania i niewiadome x_i , żeby tak było). Możemy wtedy odrzucić równania, których współczynniki a_{jk} nie wchodzi do znalezionej podmacierzy $r \times r$ o niezerowym wyznaczniku (czyli przy powyższym założeniu, $m - r$ ostatnich równań), a zmienne, x_l , których współczynniki a_{kl} nie wchodzi do owej podmacierzy (czyli tu zmienne $x_{r+1}, \dots, x_n$) należy uznać za dowolne (żeby to podkreślić nadajemy im nowe nazwy $x_{r+1} = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_{n-r}$) i przenieść na drugą stronę równań. Następnie rozwiązujemy układ zredukowany

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1r+1}\alpha_1 + \dots - a_{1n}\alpha_{n-r} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r & = & b_2 - a_{2r+1}\alpha_1 + \dots - a_{2n}\alpha_{n-r} \\ \dots\dots\dots & .. & \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r & = & b_r - a_{rr+1}\alpha_1 + \dots - a_{rn}\alpha_{n-r} \end{array},$$

Ten układ równań ma już rozwiązanie jednoznaczne (przy ustalonych wartościach $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$) bo odpowiadająca mu macierz problemu ma rząd równy r . Co więcej, zagwarantowane jest, że odrzucone równania są również spełnione.

Wynika z tego wszystkiego, że układ m równań na n niewiadomych ma tylko jedno (jednoznaczne) rozwiązanie tylko gdy $r(A) = n$ (bo wtedy po prawej stronie powyższego układu nie ma żadnych dowolnych α_i). Jeśli $r(A) = r < n$, to rozwiązanie jest niejednoznaczne bo zależy od $n - r$ dowolnych stałych $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$. Można to rozwiązanie wtedy zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(s)} \\ x_2^{(s)} \\ \vdots \\ x_r^{(s)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(1)} \\ \tilde{x}_2^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_r^{(1)} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{n-r} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(n-r)} \\ \tilde{x}_2^{(n-r)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_r^{(n-r)} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

w której pierwsza kolumna jest szczególnym rozwiązaniem wyjściowego układu *niejedno-*

rodnego

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(s)} \\ x_2^{(s)} \\ \vdots \\ x_r^{(s)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

a kolejne kolumny są $n - r$ liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania *jednorodnego*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(k)} \\ \tilde{x}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \tilde{x}_r^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n - r.$$

(w wektorze po lewej jedynka jest na $r + k$ -tym miejscu). Dlatego mówimy, że przestrzeń rozwiązań wyjściowego układu równań jest $n - r$ wymiarowa.

Przykład. Szukamy rozwiązań układu:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 + 7x_3 - 4x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Macierzą układu jest

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Oczywiście $r(A) \leq 3$. Aby wyznaczyć $r(A)$ dokonujemy operacji: $\mathbf{C}_4 \rightarrow \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1$, co sprowadza A do

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Widać teraz, że $\mathbf{C}_4 = -3\mathbf{C}_2$, a $\mathbf{C}_3 = 5\mathbf{C}_2$. Ponieważ kolumny $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ są liniowo niezależne więc $r(A) = 2$. Jest też oczywiste, że macierz rozszerzona układu

$$A^R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

ma ten sam rząd, bo jej ostatnia kolumna jest po prostu równa minus przedostatniej, tj $\mathbf{C}_B = -\mathbf{C}_4$. Z tego powodu przykład ten jest trywialny: gołym okiem widać, że $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -1$ jest rozwiązaniem; nie jest to jednak rozwiązanie jedyne. Zastosujmy ogólną teorię: niezerowym minorem stopnia 2 w A może być np. minor utworzony z dwu pierwszych wierszy kolumn $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$. Postępując teraz według podanego przepisu odrzucamy trzecie równanie, a wyrazy z x_3 i x_4 po nadaniu im nowych nazw: $x_3 \equiv \alpha$, $x_4 \equiv \beta$, przenosimy na prawą stronę:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= 1 - 2\alpha + \beta \\2x_1 - 3x_2 &= -1 + \alpha - \beta.\end{aligned}$$

Rozwiązujemy ten układ (np. metodą macierzy odwrotnej):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3+2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha + \beta \\ -1 + \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 7\alpha + 4\beta \\ 3 - 5\alpha + 3\beta \end{pmatrix}.$$

Czyli $x_1 = 4 - 7\alpha + 4\beta$, $x_2 = 3 - 5\alpha + 3\beta$. Sprawdzamy, że ostatnie (odrzucone) równanie też jest spełnione (musi być; jest więc to sprawdzenie, czy się nie pomyliliśmy w rachunkach):

$$4 - 7\alpha + 4\beta + 7\alpha - 4\beta = 4.$$

Ponieważ $x_3 = \alpha$, a $x_4 = \beta$ można ostatecznie rozwiązanie zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zapis ten czyni jawną standardową strukturę rozwiązania: jest ono sumą jakiegoś jednego szczególnego rozwiązania (pierwszy wektor po prawej stronie) pełnego niejednorodnego układu równań oraz najogólniejszego rozwiązania układu jednorodnego reprezentowanego po prawej stronie przez dowolną (z dowolnymi współczynnikami α i β) kombinację liniową wszystkich wektorów, na których macierz A daje zero:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wspomniane wyżej w uwadze w nawiasie widoczne na pierwszy rzut oka rozwiązanie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = -1$ jest szczególnym przypadkiem wypisanego wyżej najogólniejszego rozwiązania i odpowiada przyjęciu $\alpha = 0$ i $\beta = -1$.

Zadanie

Rozwiązać (jeśli to możliwe) układ:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 3.\end{aligned}$$

Rozwiązanie: Badamy najpierw rząd macierzy układu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po operacjach: $\mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_4 \rightarrow \mathbf{C}_4 + \mathbf{C}_1$ przyjmuje ona postać

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie w przedostatnim kroku zrobiono operację $\mathbf{C}_4 \rightarrow \mathbf{C}_4 - 2\mathbf{C}_3$, a w ostatnim $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2$. Ponieważ teraz kolumny pierwsza i trzecia są wzajemnie do siebie proporcjonalne (a czwarta jest zerowa), więc rząd macierzy układu jest równy 2. Następnie sprawdzamy rząd macierzy rozszerzonej

$$A^R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Po wykonaniu tych samych operacji, co poprzednio na macierzy A dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Widać, że minor stopnia 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 3 = 1 \neq 0,$$

z czego wniosek, że macierz rozszerzona ma rząd równy 3. Zatem układ równań jest sprzeczny, mimo iż zmiennych jest więcej (cztery) niż równań do spełnienia (trzy).

Zadanie

Znaleźć najogólniejsze rozwiązanie układu równań liniowych

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 7 \\ 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 4x + 5y - 13z &= 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Macierz A tego problemu i macierz rozszerzona A^R mają postacie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 5 & -13 \end{pmatrix}, \quad A^R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 5 & -13 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po dokonaniu operacji (tych samych na obu macierzach) $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 + 3\mathbf{C}_2$, a następnie $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1 - 3\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 - 2\mathbf{C}_3$ otrzymujemy z A i A^R odpowiednio macierze

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Widać że pierwsza kolumna obu macierzy jest proporcjonalna do drugiej, więc rząd macierzy A jest równy 2. Obliczając zaś wyznacznik podmacierzy tworzonej przez ostatnie trzy kolumny macierzy $\tilde{A}^R$ znajdujemy $-1 - 7 + 8 = 0$, skąd płynie wniosek, że rząd macierzy rozszerzonej też jest równy 2. Zatem układ jest niesprzeczny. Aby wypisać najogólniejsze jego rozwiązanie znajdziemy najpierw najogólniejsze rozwiązanie równania jednorodnego

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 13\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Z pierwszego $\lambda_2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_3$. To do drugiego i trzeciego:

$$\begin{aligned} 7\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 14\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Widać, że $\lambda_3 = -7\lambda_1$, $\lambda_2 = -19\lambda_1$ spełnia te równania dla dowolnego λ_1 .

Następnie szukamy jakiegoś szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego. Możemy w tym celu spróbować⁴ położyć $z = 0$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} 2x - y &= 7 \\ 3x + 2y &= 4 \\ 4x + 5y &= 1. \end{aligned}$$

skąd, dodając dwa razy pierwsze do drugiego znajdujemy $7x = 18$, a potem z pierwszego $y = 2x - 7 = -\frac{13}{7}$. Trzecie równanie jest wtedy też spełnione (co jest zagwarantowane tym, że układ jest niesprzeczny, ale dobrze to sprawdzić jawnie, bo można wtedy wykryć własne błędy rachunkowe). Najogólniejsze rozwiązanie wyjściowego układu jest sumą szczególnego rozwiązania układu niejednorodnego i ogólnego rozwiązania układu jednorodnego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 18 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -19 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

⁴Ryzykujemy trochę bo zakładamy tym samym, że kolumna $\mathbf{C}_3$ macierzy A jest liniowo zależna od $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ - mogłoby się akurat okazać, że akurat nie jest; chodzi tu jednak o pokazanie, jak można próbować rozwiązać układ nie pamiętając metody "regulaminowej",

Ten sam wynik uzyskuje się oczywiście metodą ogólną: Minor utworzony z elementów dwu pierwszych kolumn i dwu pierwszych wierszy macierzy wyjściowego układu jest niezerowy, więc skreślamy ostatnie równanie, a “wystające” poza minor wyrazy z niewiadomą z przenosimy na drugą stronę podstawiając $z = \alpha$. Rozwiązujemy więc układ zredukowany

$$\begin{aligned} 2x - y &= 7 - 3\alpha \\ 3x + 2y &= 4 + 5\alpha, \end{aligned}$$

skąd mamy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 - 3\alpha \\ 4 + 5\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 18 - \alpha \\ -13 + 19\alpha \end{pmatrix},$$

Łatwo sprawdzić, że skreślone trzecie równanie jest też spełnione (z $z = \alpha$):

$$4 \cdot \frac{1}{7}(18 - \alpha) + 5 \cdot \frac{1}{7}(-13 + 19\alpha) - 13\alpha = 1.$$

Widać że otrzymuje się tą drogą to samo rozwiązanie, co poprzednio (tamto odpowiada temu tu z $\alpha = -7\lambda_1$).

Zadanie

Zbadać istnienie rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

w zależności od wartości parametru a .

Rozwiązanie: Zobaczmy najpierw kiedy kolumny macierzy po lewej stronie są liniowo niezależne i ile ich jest liniowo niezależnych (czyli jaki jest rząd tej macierzy). W tym celu obliczamy wyznacznik tej macierzy:

$$\det A = 3a - a^3 - 2 = -(a - 1)(a^2 + a - 2) = -(a - 1)^2(a + 2).$$

Wyznacznik zeruje się więc, gdy $a = 1$ lub gdy $a = -2$. $a = 1$ jest pierwiastkiem podwójnym równania $\det A = 0$ i jak od razu widać, wszystkie trzy kolumny macierzy są takie same czyli rząd macierzy jest równy 1 (tj. pierwiastek podwójny obniża rząd macierzy o 2). Widać też, że układ jest wtedy sprzeczny. Gdy $a = -2$ rząd macierzy wynosi 2 (np. po wstawieniu $a = -2$ zobaczyć, że nie znika lewy górny minor stopnia 2). Rozwiązanie wtedy istnieje bo ostatnia kolumna macierzy jest wtedy po prostu równa minus wektorowi po prawej stronie (inaczej: dla $a = -2$ rząd macierzy rozszerzonej nie przewyższa rzędu macierzy wyjściowej). Dla $a \neq 1$ wyznacznik nie znika, czyli trzy kolumny są liniowo niezależne i układ ma zawsze rozwiązanie, które można znaleźć np.

ze wzorów Cramera.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2 + a - 2}{\det A} = (1 - a)^{-1}, \\x_2 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^2 + a - 2}{\det A} = (1 - a)^{-1}, \\x_3 &= \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-2a^2 - 2a + 4}{\det A} = 2(a - 1)^{-1}.\end{aligned}$$

Widać, że gdy $a = 1$ rozwiązanie staje się osobliwe, ale zero mianownika dla $a = -2$ skróciło się z zerem licznika.

Zadanie

Zbadać istnienie rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} 3a - 1 & 2a & 3a + 1 \\ 2a & 2a & 3a + 1 \\ a + 1 & a + 1 & 2a + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix},$$

w zależności od wartości parametru a .

Rozwiązanie: Zbadajmy najpierw rząd macierzy układu. Najpierw $\mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$:

$$\begin{pmatrix} 3a - 1 & 2a & 3a + 1 \\ -a + 1 & 0 & 0 \\ a + 1 & a + 1 & 2a + 2 \end{pmatrix},$$

a następnie $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_3$ daje

$$\begin{pmatrix} -2 & 2a & 3a + 1 \\ -a + 1 & 0 & 0 \\ -a - 1 & a + 1 & 2a + 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2a & 3a + 1 \\ -a + 1 & 0 & 0 \\ -2 & a + 1 & 2a + 2 \end{pmatrix},$$

gdzie w kolejnym kroku zrobiliśmy $\mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2$. Następnie $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2a & -a + 1 \\ -a + 1 & 0 & 0 \\ -2 & a + 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a - 1 & -a + 1 \\ -a + 1 & 0 & 0 \\ -2 & a + 1 & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie w kolejnym kroku zrobiliśmy $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3$. Wreszcie, po $\mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3$ macierz przybiera w miarę przejrzystą postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - a \\ 1 - a & 0 & 0 \\ -2 & a + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jej wyznacznik jest równy⁵ $\det A = (1-a)^2(1+a)$. Widać więc, że szczególnymi wartościami są $a = 1$ oraz $a = -1$. Jeśli $a \neq 1$ i $a \neq -1$ to rząd macierzy układu jest równy 3 i rozwiązanie zawsze istnieje. Jeśli $a = -1$ (jenokrotny pierwiastek równania $\det A = 0$) rząd macierzy jest równy 2, ale rząd macierzy rozszerzonej

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jest równy 3 i układ jest sprzeczny (rieszenije otsutstwujet). Wreszcie, gdy $a = 1$ rząd macierzy jest równy 1, a macierz rozszerzona ma postać

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

(trzy pierwsze kolumny są oczywiście macierzą układu dla $a = 1$ - widać, że jej rząd wynosi 1, co wynika także z tego, iż $a = 1$ jest podwójnym pierwiastkiem równania $\det A = 0$). Ponieważ jednak (co jest oczywiste) rząd macierzy rozszerzonej też jest równy 1, rozwiązanie istnieje, ale jest oczywiście niejednoznaczne - przestrzeń rozwiązań jest dwuwymiarowa: zgodnie z ogólną metodą możemy w tym przypadku napisać

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie

Traktując p jak parametr rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2p \\ 1 \\ p \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Najpierw znajdujemy rząd macierzy A układu. W tym celu robimy najpierw $\mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4$ i obliczamy wyznacznik powstałej macierzy:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

⁵Można było też obliczyć od razu wyznacznik wyjściowej macierzy układu; wynik by był oczywiście taki sam.

Ponieważ wyznacznik macierzy A znika, jej rząd jest mniejszy niż 4. Łatwo sprawdzić, że ma ona podmacierz 3×3 o niezerowym wyznaczniku w prawym górnym rogu:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 4 + 18 \neq 0 .$$

Zatem rząd A wynosi 3. Niezerowy wyznacznik wskazanej podmacierzy oznacza także, iż kolumny $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ macierzy A są liniowo niezależne. Kolumnę $\mathbf{C}_1$ można zaś przedstawić w postaci

$$\mathbf{C}_1 = a \mathbf{C}_2 + b \mathbf{C}_3 + c \mathbf{C}_4 ,$$

gdyż jest ona od $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ liniowo zależna.

Żądając teraz by rząd macierzy rozszerzonej nie był większy niż 3 moglibyśmy znaleźć wartość parametru p , dla której układ jest niesprzeczny. W tym celu trzeba by badać rząd macierzy zbudowanej z kolumn ($\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_B$) ale ponieważ $\mathbf{C}_1$ jest liniowo zależna od $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ to wystarczyłoby badać rząd macierzy składającej się z kolumn ($\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4, \mathbf{C}_B$); żądanie by jej rząd był mniejszy niż 4 sprowadza się do zażądania by jej wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 2p \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & p \end{vmatrix} ,$$

był równy zeru. Stąd otrzymalibyśmy wartość parametru p , dla której układ równań jest niesprzeczny. Wstawiając tę wartość p moglibyśmy następnie odrzucić czwarte równanie (jako że jego współczynniki nie wchodzi w tę podmacierz wymiaru 3×3 macierzy A , której niezerowy wyznacznik pokazał nam, że $r(A) = 3$) i przenieść $x_1 = \alpha$ na prawą stronę, tak jak to opisane jest w Przypomnieniu ogólnej metody. Zamiast jednak obliczać ten wyznacznik, po prostu zaczniemy rozwiązywać układ równań i wyjdzie nam “w praniu” dla jakiego p się to da zrobić. Ponieważ kolumna $\mathbf{C}_1$ jest liniowo zależna od kolumn $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ to jej dołączenie nie może pomóc w wyrażaniu $\mathbf{C}_B$ przez kolumny macierzy A . Dlatego możemy na razie położyć $x_1 = 0$ (albo nadać niewiadomej x_1 jakąkolwiek inną wartość $x_1^{(0)}$) i szukać rozwiązania układu

$$x_2 \mathbf{C}_2 + x_3 \mathbf{C}_3 + x_4 \mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_B ,$$

(lub układu $x_2 \mathbf{C}_2 + x_3 \mathbf{C}_3 + x_4 \mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_B - x_1^{(0)} \mathbf{C}_1$) czyli

$$\begin{aligned} 3x_2 - 2x_3 - 6x_4 &= -3 \\ 3x_3 - 2x_4 &= 2p \\ x_2 + 3x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= p . \end{aligned}$$

Rozwiążmy najpierw układ trzech ostatnich równań. Po prostych fiku-miku znajdujemy

$$x_2 = -\frac{1}{7}(2 - 3p), \quad x_3 = \frac{1}{7}(2 + 4p), \quad x_4 = \frac{1}{7}(3 - p).$$

Wstawiamy to teraz do pierwszego (na razie nie uwzględnionego) równania i mamy mieć

$$3\left(-\frac{2}{7} + \frac{3}{7}p\right) - 2\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{7}p\right) - 6\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{7}p\right) = -3,$$

co zachodzi tylko dla $p = 1$.

Dla $p = 1$ mamy zatem jedno szczególne rozwiązanie wyjściowego układu równań

$$\begin{pmatrix} x_1^{(s)} \\ x_2^{(s)} \\ x_3^{(s)} \\ x_4^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}.$$

Nie jest to jednak jeszcze najogólniejsze rozwiązanie bo niewiadomych było $n = 4$, a rząd macierzy A był równy 3. Musimy do powyższego rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego dodać z dowolnym współczynnikiem jedno (bo $n - r = 1$) rozwiązanie układu jednorodnego

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Musi takowe istnieć bo $\det A = 0$. Łatwo je znajdujemy

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4/7 \\ -3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}.$$

Najogólniejszym zatem rozwiązaniem wyjściowego układu równań (oczywiście tylko dla $p = 1$) jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4/7 \\ -3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix},$$

gdzie λ jest dowolną stałą.

Zadanie.

Rozwiązać układ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ 1 \end{pmatrix},$$

dla takich wartości parametrów a i b , dla których jest on niesprzeczny.

Rozwiązanie: Badamy najpierw rząd macierzy układu i macierzy rozszerzonej. Przy odrobinie czujności (sprowadzającej się do tego, by do pierwszych czterech kolumn nie dodawać nigdy ostatniej z różnym od zera współczynnikiem; do ostatniej zaś kolumny kombinacje liniowe pierwszych czterech dodawać można) można to robić symultanicznie:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -3 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \end{array} \right),$$

(pierwsze cztery kolumny tworzą oczywiście macierz A układu). Dokonujemy operacji: $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_4$, co daje

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -4 & 1 & b \\ 6 & 6 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right),$$

Teraz $\mathbf{R}_4 \rightarrow \mathbf{R}_4 + 2\mathbf{R}_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -4 & 1 & b \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 3 \end{array} \right),$$

i wreszcie $\mathbf{C}_4 \rightarrow \mathbf{C}_4 + \frac{1}{3}\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_5 \rightarrow \mathbf{C}_5 + \frac{1}{3}\mathbf{C}_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -4 & 1 & b \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 3 \end{array} \right).$$

Widać teraz, że kolumna $\mathbf{C}_1$ jest liniowo niezależna od pozostałych. Z kolei minor utworzony z trzech dolnych składowych $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ znika:

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 16 + 24 + 24 = 0,$$

co oznacza, że kolumny $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$ są liniowo zależne (w istocie: $-4\mathbf{C}_4 = \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3$). Rząd macierzy układu jest więc równy 3. Rząd macierzy rozszerzonej nie może zatem być większy. Po wykonanych już pracach przygotowawczych jest zupełnie jasne, że sprowadza się to do żądania by w ostatniej macierzy 4×5 kolumna $\mathbf{C}_5$ była liniowo zależna od $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$. Aby tak było musi zniknąć minor (utworzony z trzech dolnych składowych zainteresowanych kolumn)

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & a \\ 0 & -4 & b \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 48 + 24(a + b).$$

Zatem wyjściowy układ równań jest niesprzeczny gdy $a + b = -2$. Będziemy więc go rozwiązywać położywszy $b = -2 - a$. Ponieważ rząd macierzy rozpatrywanego układu równań z $n = 4$ niewiadomymi jest równy 3, przestrzeń rozwiązań jest jednowymiarowa i rozwiązanie będzie zależało od jednego dowolnego parametru. Nie jest to jednak parametr a ! Dla różnych wartości a mamy *różne* układy równań i dla każdego konkretnego a rozwiązanie odpowiadającego temu a układu będzie zależało od jednego parametru λ , który wprowadzimy niżej.

Odstąpimy tu od kanonicznej metody przedstawionej parę stron wcześniej na rzecz bardziej “fizycznego” podejścia (tj. takiego, jakiego by użył każdy zdrowy na umyśle fizyk). Znajdźmy najpierw rozwiązanie równania *jednorodnego*. Zaczynamy jeszcze raz od macierzy A układu. Łatwo zobaczyć, że np. minor stopnia 3 utworzony z pierwszych trzech składowych trzech pierwszych jej kolumn jest niezerowy:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

więc te trzy kolumny są liniowo niezależne i można wyrazić przez nie czwartą, tj. znaleźć lambdy w kombinacji $\xi_1 \mathbf{C}_1 + \xi_2 \mathbf{C}_2 + \xi_3 \mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_4$:

$$\begin{aligned} -2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 1 \\ \xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 &= 1 \\ \xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 &= 1 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= -5. \end{aligned}$$

Rozwiązując trzy pierwsze równania stosując zwykłą “eliminatkę” znajdujemy łatwo $\xi_1 = -2$, $\xi_2 = \xi_3 = -\frac{3}{2}$. Sprawdzamy, że czwarte równanie jest spełnione (musi być - to tylko element samokontroli). Stąd rozwiązanie równania jednorodnego ma postać

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(λ jest właśnie parametrem, o którym była mowa wyżej).

Szukamy teraz jakiegoś jednego, szczególnego rozwiązania wyjściowego równania *niejednorodnego* (z $b = -2 - a$). Ponieważ już wiemy, że kolumna $\mathbf{C}_4$ macierzy A układu jest liniowo zależna od trzech pozostałych, można ją usunąć, tj. szukać rozwiązania z $x_4 = 0$. Ponieważ już wiemy, że minor stopnia 3 z lewego górnego rogu macierzy A jest niezerowy (wynosi on -8 - patrz wyżej), można rozwiązać tylko trzy górne równania

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 - a \end{pmatrix},$$

Wykorzystując Kramersięta (tj. wzory Cramera) mamy

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -3 & 1 \\ -2-a & 1 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(9 - 2 - a + a - 6 - 3a - 1 + 3a) = 0 \\ x_2 &= -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -2-a & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6a + 1 - 2 - a - a + 3 - 4 - 2a) = -\frac{1}{8}(-2 + 2a) \\ x_3 &= -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & -2-a \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(-12 - 6a + a + 1 + 3 + 2a + 2 + a) = -\frac{1}{8}(-6 - 2a). \end{aligned}$$

Ostatecznie więc, gdy $b = -2 - a$ najogólniejszym rozwiązaniem wyjściowego układu równań jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - a \\ 3 + a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -10 & -7 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

będzie macierzą odwzorowania liniowego A z p.w. V w tę samą p.w. V (jest to $A_{(v)(v)}$ w naszej starej notacji, ale możemy tu pominąć te detale). Niech $V_0 = \ker A$, a $V_1 = \operatorname{im} A$ będą odpowiednio jądrem i obrazem tego odwzorowania. Zbadać czy wektor o składowych

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(w tej samej bazie p.w. V , w której dana jest macierz A) należy do $V_0 \oplus V_1$?

Rozwiązanie: Najpierw ustalmy rząd macierzy A . Każda próba obliczenia jakiegoś jej minora stopnia 3 kończy się wynikiem zero! Zatem zapewne jej rząd wynosi 2. Aby to potwierdzić dokonujemy standardowych operacji: $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1 + 2\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_2 \rightarrow \mathbf{C}_2 + 4\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_3 \rightarrow \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_4$, które przeprowadzają A w macierz

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12 & -28 & 4 & -7 \\ 9 & 21 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -4 & -7 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(w drugim kroku pierwszą, drugą i trzecią kolumnę podzieliliśmy odpowiednio przez 3, 7 i -1), z której już rząd A jest oczywisty. Łatwo też ustalić, że kolumny $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ macierzy A wyrażają się przez $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$: $\mathbf{C}_1 = -3\mathbf{C}_3 + 4\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_2 = -7\mathbf{C}_3 + 10\mathbf{C}_4$. W ogólności obrazem odwzorowania A ($\text{im}A$) są wszystkie kombinacje liniowe $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$, ale skoro $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ są liniowo zależne, to obrazem A w tym przypadku są wektory będące dowolnymi kombinacjami liniowymi $\mathbf{C}_3$ i $\mathbf{C}_4$:

$$\text{im}A = \{ \mathbf{w} : \mathbf{w} = \alpha \mathbf{C}_3 + \beta \mathbf{C}_4; \text{ gdzie } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1 \}.$$

Trzeba jeszcze znaleźć najogólniejszą postać wektora należącego do $\ker A$. To łatwo ustalić korzystając z tego (co już ustaliliśmy), że $\mathbf{C}_1 + 3\mathbf{C}_3 - 4\mathbf{C}_4 = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_2 + 7\mathbf{C}_3 - 10\mathbf{C}_4 = \mathbf{0}$. Wynika stąd, że wektory, na których A daje zero są postaci

$$\xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Zatem pytanie będące treścią zadania brzmi: czy można tak dobrać η , ξ , α i β , by spełnić równość

$$\xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

w której dwa pierwsze wektory rozpinają $\ker A$, a dwa drugie $\text{im}A$? Aby ustalić jaki jest wymiar $\ker A \oplus \text{im}A$ tworzymy z wektorów rozpinających tę sumę macierz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & -10 & -7 \\ -4 & -10 & 5 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & -7 & -7 \\ -4 & -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \equiv H'.$$

Strzałka oznacza tu dokonanie operacji polegającej na dodaniu pierwszej kolumny macierzy H do trzeciej. Rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza pozwala łatwo

zobaczyć, że wyznacznik macierzy H' znika. Zatem rząd macierzy H' a zatem i H jest mniejszy niż 4. Z kolei lewy górny minor stopnia 3 macierzy H' nie znika, a zatem macierz H jest rzędu 3 i taki też jest wymiar $\ker A \oplus \operatorname{im} A$. Może więc się zdarzyć, że wektor z samych jedynek do $\ker A \oplus \operatorname{im} A$ nie należy. Że tak jest w istocie pokazuje następujące rozumowanie: zróbmy $\mathbf{H}'_3 \rightarrow \frac{1}{3}(\mathbf{H}'_3 + \mathbf{H}'_2)$, $\mathbf{H}'_4 \rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{H}'_4 + \mathbf{H}'_2)$, (chodzi o kolumny macierzy H') co da

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ -4 & -10 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Z wektorów rozpinających $\ker A \oplus \operatorname{im} A$, którymi mogą być kolumny powyższej macierzy wystarczają tylko trzy pierwsze by stworzyć bazę. Jeśli zaś jakaś ich kombinacja $\xi_1 \tilde{\mathbf{H}}_1 + \xi_2 \tilde{\mathbf{H}}_2 + \xi_3 \tilde{\mathbf{H}}_3$ miała by dawać wektor mający same jedynki, to jest oczywiste, że $\xi_1 = 1$. Odejmując więc od tego wektora $\tilde{\mathbf{H}}_1$ musiały by być spełnione związki

$$\xi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(wypisaliśmy tu tylko trzy dolne składowe każdego z wektorów). Zatem $\xi_2 = -\frac{2}{7}$ i $\xi_3 = \frac{9}{7}$ żeby się zgodziły dwie pierwsze składowe, ale wtedy w trzeciej linii po lewej mamy $\frac{20}{7} + \frac{27}{7} \neq 5$, co dowodzi, że wektor z samych jedynek nie należy do $\ker A \oplus \operatorname{im} A$.

Zadanie

Znaleźć najogólniejsze rozwiązanie układu równań liniowych⁶

$$\begin{aligned} x_1 & & + x_5 & = a \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 & = b \\ -x_1 & & - x_5 & = -a \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 & = c. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Macierz tego problemu i macierz rozszerzona mają postacie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

⁶Przykład jest wzięty z “kultowego” podręcznika Jacka Komorowskiego *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk* bez pytania Autora o zgodę. Ufam, że wbrew dość powszechnemu mniemaniu o prawie do “własności intelektualnej” - bycie nieistniejącym! - potraktuje On to jak częściowe rozwiązanie “problemu długu”, który spłacany być powinien w większości następnym pokoleniom...

Widać, że w obu macierzach trzeci wiersz jest tym samym co pierwszy pomnożony przez -1 . Zatem rząd obu macierzy nie może być większy niż 3. W macierzy A zrobmy operacje: $\mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_4 \rightarrow \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1$, co daje

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a następnie $\mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Pokazuje to, że rząd macierzy A jest równy 3. Zatem macierz ta ma taki sam rząd jak macierz rozszerzona, bo ta (po wyzerowaniu trzeciego wiersza przez dodanie doń pierwszego) ma rząd nie większy niż trzy. Zatem układ ma rozwiązania. Zgodnie z ogólną metodą musimy teraz w macierzy A znaleźć niezerowy minor stopnia 3. Jest nim np. minor będący wyznacznikiem podmacierzy utworzonej z elementów kolumn: pierwszej, drugiej i piątej i wierszy pierwszego, drugiego i ostatniego. Trzecie równanie, którego współczynniki do tej podmacierzy nie wchodzą skreślamy. Wyrazy z x_4 i x_5 z równań pierwszego, drugiego i ostatniego “wystają” poza tę podmacierz, zatem zgodnie z ogólną metodą podstawiamy w nich $x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$, gdzie α i β są dowolnymi stałymi i przenosimy je na drugą stronę otrzymując w ten sposób zredukowany układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + x_5 &= a \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= b - 2\alpha + \beta \\ x_1 - x_2 + x_5 &= c + 2\alpha - \beta. \end{aligned}$$

Układ ten można łatwo rozwiązać, np. stosując Kramersięta: Wyznacznik macierzy układu jest równy $1 - 2 - 1 + 1 = -1$, więc

$$x_1 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b - 2\alpha + \beta & 1 & 1 \\ c + 2\alpha - \beta & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ b - 2\alpha + \beta & 1 & 2 \\ c + 2\alpha - \beta & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2a + b + c,$$

$$x_2 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b - 2\alpha + \beta & 1 \\ 1 & c + 2\alpha - \beta & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b - 2\alpha + \beta & 1 \\ 0 & c + 2\alpha - \beta & 1 \end{vmatrix} = a - c - 2\alpha + \beta,$$

$$x_5 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b - 2\alpha + \beta \\ 1 & -1 & c + 2\alpha - \beta \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 3 & 1 & b - 2\alpha + \beta \\ 0 & -1 & c + 2\alpha - \beta \end{vmatrix} = 3a - b - c.$$

Kompletne rozwiązanie można zapisać więc w postaci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + b + c \\ a - c \\ 0 \\ 0 \\ 3a - b - c \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ma ono oczywistą strukturę: pierwszy wektor po prawej stronie jest szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego, a dwa następne wektory po prawej są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego.

Przypomnienie

Forma kwadratowa jest to takie odwzorowanie przestrzeni wektorowej V w R^1 lub C^1 (tj. w ciało), że

$$Q(\lambda \mathbf{v}) = \lambda^2 Q(\mathbf{v}) .$$

Forma biliniowa (dwuliniowa) jest to takie odwzorowanie $V \times V$ w ciało, że

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= \lambda_1 B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \lambda_2 B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) , \\ B(\mathbf{v}, \eta_1 \mathbf{w}_1 + \eta_2 \mathbf{w}_2) &= \eta_1 B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta_2 B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) . \end{aligned}$$

Jeśli ciałem jest C^1 to zwykle - zwłaszcza z punktu widzenia fizyka - interesujące są formy półtoraliniowe, czyli takie, że

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) &= \lambda_1^* B(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \lambda_2^* B(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) , \\ B(\mathbf{v}, \eta_1 \mathbf{w}_1 + \eta_2 \mathbf{w}_2) &= \eta_1 B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \eta_2 B(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2) . \end{aligned}$$

W gruncie rzeczy formę kwadratową można uważać za pewną formę biliniową $B(\cdot, \cdot)$ której obydwoma argumentami jest ten sam wektor: $Q(\mathbf{v}) \equiv B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$.

W ustalonej bazie $\mathbf{e}_i$ przestrzeni V formie odpowiada macierz formy:

$$Q(\mathbf{v}) \equiv B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) v_{(e)}^i v_{(e)}^j \equiv Q_{ij}^{(e)} v_{(e)}^i v_{(e)}^j .$$

Jak zwykle opatrzyliśmy macierz $Q_{ij}^{(e)}$ superskryptem (e) , aby pamiętać, że jest to macierz formy Q w bazie $\mathbf{e}_i$. Przez odpowiednią zmianę bazy macierz formy Q można zawsze sprowadzić do postaci diagonalnej. Postać diagonalna macierzy formy Q nie jest jednoznaczna już choćby dlatego, że nic (dopóki w przestrzeni wektorowej V nie wprowadzi się iloczynu skalarnego) nie ustala “długości” wektorów bazy. Jednakże każda postać diagonalna danej formy Q (określonej na przestrzeni wektorowej nad ciałem R^1) ma tę samą liczbę dodatnich, ujemnych i zerowych elementów diagonalnych, tj. ma zawsze tę samą *signature* (twierdzenie Sylvestra).

Zadanie

Dana jest forma kwadratowa

$$Q = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz .$$

Stosując metodę Lagrange’a sprowadzić ją do postaci diagonalnej.

Rozwiązanie: Interpretując zmienne x , y i z jako składowe $v_{(e)}^i$ wektora $\mathbf{v}$ w pewnej bazie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, tj. pisząc $x \equiv v_{(e)}^1$, $y \equiv v_{(e)}^2$, $z \equiv v_{(e)}^3$, możemy znaleźć macierz formy Q :

$$Q(\mathbf{v}) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv Q_{ij}^{(e)} v_{(e)}^i v_{(e)}^j .$$

Zwróćmy tu uwagę na to, że elementy pozadiagonalne są połówkami odpowiednich wyrazów mieszanych w Q ! Metoda Lagrange’a (szumna nazwa!) sprowadza się do sukcesywnego “zwijania do pełnego kwadratu”:

$$\begin{aligned} Q &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz \\ &= (x + 2y + 3z)^2 - 2y^2 - 6z^2 - 7yz \\ &= (x + 2y + 3z)^2 - 2(y + \frac{7}{4}z)^2 + \frac{1}{8}z^2. \end{aligned}$$

Z postaci tej odczytujemy, że w odpowiedniej bazie $\mathbf{f}_i$, którą znajdziemy poniżej, macierz formy będzie postaci

$$Q_{ij}^{(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Przypomnijmy, że zmianę bazy reprezentujemy wzajemnie odwrotnymi macierzami $R_{f \leftarrow e}$ i $R_{e \leftarrow f}$ takimi, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{f}_j [R_{f \leftarrow e}]^j_i & v_{(f)}^i &= [R_{f \leftarrow e}]^i_j v_{(e)}^j, \\ \mathbf{f}_i &= \mathbf{e}_j [R_{e \leftarrow f}]^j_i & v_{(e)}^i &= [R_{e \leftarrow f}]^i_j v_{(f)}^j. \end{aligned}$$

W naszym przypadku, ponieważ wartość formy kwadratowej Q na wektorze $\mathbf{v}$ nie może zależeć od wyboru bazy, powinno być jasne, że jeśli znajdziemy taką bazę $\mathbf{f}_i$, w której składowe wektora $\mathbf{v}$ są postaci

$$\begin{aligned} v_{(f)}^1 &= v_{(e)}^1 + 2v_{(e)}^2 + 3v_{(e)}^3 \\ v_{(f)}^2 &= v_{(e)}^2 + \frac{7}{4}v_{(e)}^3 \\ v_{(f)}^3 &= v_{(e)}^3, \end{aligned}$$

to będziemy mieć $Q = [v_{(f)}^1]^2 - 2[v_{(f)}^2]^2 + \frac{1}{8}[v_{(f)}^3]^2$, tj. w bazie $\mathbf{f}_i$ macierz formy będzie diagonalna. Z powyższego wzoru mamy natychmiast macierz R

$$R_{f \leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz odwrotną też łatwo znaleźć wyrażając $v_{(e)}^i$ przez $v_{(f)}^i$: $v_{(e)}^3 = v_{(f)}^3$, $v_{(e)}^2 = v_{(f)}^2 - \frac{7}{4}v_{(f)}^3$, $v_{(e)}^1 = v_{(f)}^1 - 2(v_{(f)}^2 - \frac{7}{4}v_{(f)}^3) - 3v_{(f)}^3$, co daje

$$R_{e \leftarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mamy teraz

$$Q(\mathbf{v}) = Q_{ij}^{(e)} v_{(e)}^i v_{(e)}^j = Q_{ij}^{(e)} [R_{e \leftarrow f}]^i_k [R_{e \leftarrow f}]^j_l v_{(f)}^k v_{(f)}^l \equiv Q_{kl}^{(f)} v_{(f)}^k v_{(f)}^l ,$$

czyli $Q_{kl}^{(f)} = Q_{ij}^{(e)} [R_{e \leftarrow f}]^i_k [R_{e \leftarrow f}]^j_l$. Sens tego wzoru jest jasny: macierze $R_{e \leftarrow f}$ przerabiają składowe wektora $\mathbf{v}$ dane w bazie $\mathbf{f}_i$ na jego składowe w bazie $\mathbf{e}_i$, a na te z kolei działa już macierz $Q^{(e)}$. Macierzowo powyższy wzór wygląda tak:

$$Q^{(f)} = R_{e \leftarrow f}^T \cdot Q^{(e)} \cdot R_{e \leftarrow f}.$$

(symbol T oznacza transpozycję macierzy). Łatwo sprawdzić, że istotnie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -7/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Oczywiście można przejść np. do bazy $\mathbf{g}_i$ której wektory są proporcjonalne do wektorów bazy $\mathbf{f}_i$: $\mathbf{g}_i = \kappa_i \mathbf{f}_i$ (niema tu sumowania po i). Wtedy oczywiście $v_{(g)}^i = (1/\kappa_i) v_{(f)}^i$ i macierz formy kwadratowej Q w bazie $\mathbf{g}_i$ ma postać

$$Q^{(g)} = \begin{pmatrix} \kappa_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\kappa_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}\kappa_3^2 \end{pmatrix}.$$

Widać że liczby na diagonalu się zmieniają ale nie ich znaki.

Niezmienność sygnatury formy względem przeskalowania wektorów bazy jest dość oczywista. Aby zobaczyć, że i bardziej skomplikowane transformacje sygnatury nie zmieniają zdagonalizujemy jeszcze raz naszą formę Q metodą Lagrange'a, ale zaczynając "od innego końca":

$$\begin{aligned} Q &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 5yz + 6xz = 3(z + x + \frac{5}{6}y)^2 - 2x^2 - \frac{1}{12}y^2 - xy \\ &= 3(z + x + \frac{5}{6}y)^2 - 2(x + \frac{1}{4}y)^2 + \frac{1}{24}y^2 \end{aligned}.$$

Widać, że jak poprzednio sygnatura jest $(+, -, +)$ (kolejność plusów i minusów jest oczywiście bez znaczenia - liczy się tylko liczba plusów i minusów!). Tak jak poprzednio możemy z powyższej postaci formy odczytać zmianę bazy przestrzeni wektorowej i macierz przejścia prowadzące do diagonalnej postaci formy:

$$\begin{aligned} v_{(h)}^1 &= v_{(e)}^1 + \frac{5}{6}v_{(e)}^2 + v_{(e)}^3 \\ v_{(h)}^2 &= v_{(e)}^1 + \frac{1}{4}v_{(e)}^2 \\ v_{(h)}^3 &= v_{(e)}^2 \end{aligned} \quad R_{h \leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{6} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(zmiana bazy z $\mathbf{e}_i$ na $\mathbf{h}_i$). Zatem

$$\begin{aligned} Q^{(h)} &= R_{e \leftarrow h}^T \cdot Q^{(e)} \cdot R_{e \leftarrow h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{7}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5/2 \\ 3 & 5/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{7}{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{7}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jak widać liczby na diagonalu się zmieniły, ale sygnatura - nie.

Zadanie

Sprowadzić do formy diagonalnej formę kwadratową

$$Q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Rozwiązanie: Akurat tu od razu nie da się zastosować metody Lagrange'a bo - jak mówią komentatorzy meczów siatkarskich - "niema z czego uderzyć". Trzeba więc najpierw "ruszyć z posad bryłę" formy kwadratowej (a nie jak kiedyś chcieli niektórzy bryłę świata). Podstawmy zatem $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Forma przyjmie wtedy postać

$$Q = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

i teraz już można przejść do zmiennych $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$, czyli $y_1 = z_1 - z_3$, $y_2 = z_2$, $y_3 = z_3$. Ostatecznie więc zamiana zmiennych diagonalizująca formę kwadratową ma postać

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 &= z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 &= z_3, \end{aligned}$$

i w nowych zmiennych z_i forma ma postać

$$Q = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Postępujemy dalej jak w poprzednim zadaniu. Powyższa transformacja daje nam macierz R^{-1} zmiany bazy

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta rzeczywiście diagonalizuje macierz formy Q :

$$(R^T)^{-1} \cdot Q \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli uznać, że $x_1 \equiv v_{(e)}^1$, $x_2 \equiv v_{(e)}^2$, $x_3 \equiv v_{(e)}^3$, są składowymi wektora $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_i$, to $z_1 \equiv v_{(f)}^1$, $z_2 \equiv v_{(f)}^2$, $z_3 \equiv v_{(f)}^3$, są składowymi tego samego wektora w bazie wektorów $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_k(R^{-1})^k_i$:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz odwrotną, R , też można znaleźć: wystarczy wyrazić zmienne z_i przez x_i . Wtedy $\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_k R^k_i$, czyli

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Przypomnienie

Forma kwadratowa $Q(x_1, \dots, x_n)$ jest *dodatnio (ujemnie) określona*, jeśli jej wartość na dowolnym wektorze $(x_1, \dots, x_n)$ jest dodatnia (ujemna). Ważnym narzędziem jest “kryterium minorowe”:

Jeśli dodatnie są wszystkie jej minory $M_{11}, M_{22} \dots M_{nn}$ (minor M_{kk} jest wyznacznikiem macierzy $k \times k$ wyjętej z lewego górnego rogu macierzy formy Q), to forma Q jest dodatnio określona.

(Alternatywnie zamiast żądać dodatniości kolejnych minorów wyjmowanych z lewego górnego rogu, można żądać dodatniości kolejnych minorów wyjmowanych z prawego dolnego rogu). Forma jest ujemnie określona, gdy *dodatnio* określona jest forma $-Q$, której macierz ma wszystkie elementy ze zmienionym znakiem; inaczej, Q jest ujemnie określona gdy $(-1)^k M_{kk} > 0$.

W przypadku formy kwadratowej

$$Q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2dxy = (x, y) \begin{pmatrix} a & d \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dwu zmiennych regule tę można natychmiast sprawdzić: warunki $M_{11} = a > 0$, $M_{22} = ab - d^2 > 0$ zapewniają, że forma ta

$$Q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2dxy = a\left(x + \frac{d}{a}y\right)^2 + \frac{ab - d^2}{a}y^2$$

ma sygnaturę $(+, +)$, co jest równoważne jej dodatniej określoności.

Zadanie

Dla jakich wartości parametru λ forma

$$Q(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 4xy - 2xz - 2yz = (x, y, z) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

jest dodatnio określona?

Rozwiązanie: Kryterium “minorowe” daje warunki

$$M_{11} = 5 > 0, \quad M_{22} = 1 > 0, \quad M_{33} = \lambda - 2 > 0,$$

czyli forma jest dodatnio określona gdy $\lambda > 2$. To samo można zobaczyć stosując metodę Lagrange’s:

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= 5\left(x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z\right)^2 - 5\left(\frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z\right)^2 + y^2 + \lambda z^2 - 2yz \\ &= 5\left(x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z\right)^2 + \frac{1}{5}y^2 - \frac{6}{5}yz + \left(\lambda - \frac{1}{5}\right)z^2 \\ &= 5\left(x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{5}z\right)^2 + \frac{1}{5}(y - 3z)^2 + (\lambda - 2)z^2, \end{aligned}$$

co pokazuje, że gdy $\lambda > 2$, forma ma sygnaturę $(+.+.+)$, czyli jest dodatnio określona.⁷

Zadanie

Dla jakich wartości parametru λ forma

$$Q = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2\lambda xy + 10xz + 6yz = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 5 \\ \lambda & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

jest dodatnio określona?

Rozwiązanie: Kryterium “minorowe” daje warunki

$$M_{11} = 1 > 0, \quad M_{22} = 4 - \lambda^2 > 0, \quad M_{33} = -105 + 30\lambda - \lambda^2 > 0,$$

Z ostatniego z nich, rozwiązując równanie kwadratowe $M_{33}(\lambda) = 0$ mamy pierwiastki $\lambda_1 = 15 - 2\sqrt{30}$ oraz $\lambda_2 = 15 + 2\sqrt{30}$; pomiędzy λ_1 , a λ_2 minor $M_{33} > 0$. Ponieważ jednak $\lambda_1 > 3$, warunek $M_{33} > 0$ jest sprzeczny z warunkiem $M_{22} > 0$, który jest spełniony tylko gdy $|\lambda| < 2$. Zatem forma ta nigdy nie jest dodatnio określona.

To samo można zobaczyć stosując diagonalizację Lagrange’a

$$\begin{aligned} Q &= (z + 5x + 3y)^2 - 24x^2 - 5y^2 - (30 - 2\lambda)xy \\ &= (z + 5x + 3y)^2 - 5\left[y - \left(3 - \frac{1}{5}\lambda\right)\right]^2 + \frac{1}{5}(15 - \lambda)^2x^2 - 24x^2. \end{aligned}$$

Stąd już widać, że sygnatura formy jest mieszana, niezależnie od wartości λ .

⁷Uważnie patrząc można dostrzec, że współczynniki pojawiające się w metodzie Lagrange’a stosowanej sukcesywnie do x , y i z) przed kolejnymi pełnymi kwadratami mają coś wspólnego z minorami M_{11} , M_{22} , ... Na tym w istocie rzeczy polega dowód tw. Sylvestra.

Zadanie

Zbadać sygnaturę formy kwadratowej

$$Q = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz,$$

w zależności od wartości parametru λ .

Rozwiązanie: Aby ustalić dla jakich wartości λ forma jest dodatnio określona, można posłużyć się metodą wyznacznikową, tj. zażądać by dodatnie były minory

$$|2| > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} > 0.$$

Dostaje się stąd warunki $\lambda^2 < 2$ i $\lambda^2 < \frac{5}{3}$, z których drugi jest oczywiście silniejszy. Metodą tą można jeszcze ustalić dla jakich wartości λ forma jest ujemnie określona, ale nie można ustalić jej sygnatury, gdy nie jest ona określonego znaku. W tym celu trzeba ją zdiagonalizować, np. metodą Lagrange'a:

$$\begin{aligned} Q &= 2 \left(x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}z \right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) y^2 - \lambda yz + \frac{5}{2}z^2 \\ &= 2 \left(x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}z \right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right) \left[y - \frac{\lambda}{2 - \lambda^2} z \right]^2 + \left[\frac{5}{2} - \frac{\lambda^2}{4 - 2\lambda^2} \right] z^2. \end{aligned}$$

Jeśli tylko $\lambda^2 \neq 2$, mamy stąd dodatni znak pierwszego wyrazu, dodatni (dla $\lambda^2 < 2$) bądź ujemny (dla $\lambda^2 > 2$) drugiego i znak współczynnika trzeciego wyraz wyznaczony przez

$$\frac{5}{2} - \frac{\lambda^2}{4 - 2\lambda^2} \equiv \frac{5 - 3\lambda^2}{2 - \lambda^2}.$$

Zatem dla $\lambda^2 < \frac{5}{3}$ forma ma sygnaturę $(+, +, +)$, dla $\lambda^2 = \frac{5}{3}$ sygnaturę $(+, 0, +)$, dla $\frac{5}{3} < \lambda^2 < 2$ sygnaturę $(+, -, +)$ i dla $2 < \lambda^2$ znów (kolejność plusów i minusów nie gra tu roli!) sygnaturę $(+, -, +)$ (bo wprowadzie ujemny robi się współczynnik drugiego wyrazu, ale z kolei dodatni staje się współczynnik trzeciego). Przez ciągłość (cokolwiek by to pojęcie tu miało znaczyć!) wynika, że dla $\lambda^2 = 2$ sygnatura formy powinna być $(+, -, +)$. Można to ustalić wracając do przekształceń: Dla $\lambda = \pm\sqrt{2}$ mamy

$$\begin{aligned} Q &= 2 \left(x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}z \right)^2 \mp 2yz + \frac{5}{2}z^2 \\ &= 2 \left(x + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}z \right)^2 + \frac{5}{2} \left(z \mp \frac{1}{5}\sqrt{2}y \right)^2 - \frac{1}{5}y^2. \end{aligned}$$

zgodnie z oczekiwaniami.

Nakomplikowaliśmy sobie, podczas gdy stosując metodę Lagrange'a w innej kolejności otrzymalibyśmy:

$$\begin{aligned} Q = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2\lambda xy + 2xz &= 3 \left(z + \frac{1}{3}x \right)^2 + \frac{5}{3}x^2 + 2\lambda xy + y^2 \\ &= 3 \left(z + \frac{1}{3}x \right)^2 + (y + \lambda x)^2 + \left(\frac{5}{3} - \lambda^2 \right) x^2, \end{aligned}$$

co od razu (tak jak metoda minorowa) pokazuje, że forma jest dodatnio określona, gdy $\lambda^3 < \frac{5}{3}$. Morał z tego jest taki, że przed zastosowaniem metody Lagrange'a dobrze jest czujnie popatrzeć, jak ją zastosować...

Przypomnienie

Wektorem własnym (po ang. *eigenvector*) odwzorowania liniowego $F : V \rightarrow V$, gdzie $\dim V = n$, nazywa się taki wektor $\mathbf{w} \in V$, że

$$F(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{w} .$$

Liczba λ (należąca do ciała K , nad którym rozpięta jest przestrzeń wektorowa V) nazywa się wartością własną (po ang. *eigenvalue*) wektora $\mathbf{w}$ (przy odwzorowaniu F). Jeśli $[F_{(e)(e)}]_j^i$ jest macierzą odwzorowania F w bazie⁸ $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3 \dots$, a $w_{(e)}^i$ są składowymi $\mathbf{w}$ w tej samej bazie to mamy wtedy

$$[F_{(e)(e)}]_j^i w_{(e)}^j = \lambda w_{(e)}^i .$$

czyli, zapisując to samo inaczej,

$$([F_{(e)(e)}]_j^i - \lambda \delta_j^i) w_{(e)}^j = 0 ,$$

(zero po prawej stronie należy rozumieć jako wektor o zerowych składowych, czyli wektor zerowy). Powyższy wzór jest po prostu linowym, jednorodnym układem n równań na n współczynników $w_{(e)}^j$. Taki układ równań ma niezerowe rozwiązania $w_{(e)}^j$ tylko wtedy, gdy zeruje się wyznacznik jego macierzy, tj. gdy

$$W_F(\lambda) \equiv \det (F_{(e)(e)} - \lambda I) = 0 .$$

Wyrażenie po lewej stronie nazywa się *wielomianem charakterystycznym* macierzy (odwzorowania) F . Niezerowe wektory własne (może być ich więcej niż jeden; maksymalnie n), tj. rozwiązania na ich współczynniki $w_{(e)}^j$ w bazie $\mathbf{e}_j$ istnieją tylko dla tych wartości λ , dla których wielomian charakterystyczny zeruje się. Wartości własne λ odwzorowania liniowego F są więc pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $W_F(\lambda)$ macierzy tego odwzorowania. Wynika stąd⁹ że pierwiastki wielomianu charakterystycznego nie zależą od wyboru bazy, od której zależy postać macierzy F , a są tylko zależne od samego odwzorowania. Wektory własne macierzy odpowiadające *różnym* wartościom własnym są liniowo niezależne.

Jeśli przestrzeń wektorowa V jest nad ciałem liczb rzeczywistych to możliwe są trzy różne sytuacje:

⁸Ponieważ F odwzorowuje V w V będziemy zawsze tu przyjmować, iż obraz $F(\mathbf{v})$ wektora $\mathbf{v} \in V$ jest rozpisany w tej samej bazie co sam wektor $\mathbf{v}$. W zasadzie nic nie zabrania by obraz $F(\mathbf{v})$ był rozpisywany w bazie innej niż $\mathbf{e}_i$, lecz prowadziłoby to do niepotrzebnych komplikacji rachunkowych.

⁹Dowód sprowadza się do zauważenia, że $\det (F_{(e)(e)} - \lambda I) = \det [R \cdot (F_{(f)(f)} - \lambda I) \cdot R^{-1}] = \det(R) \cdot \det (F_{(f)(f)} - \lambda I) \cdot \det(R^{-1}) = \det (F_{(f)(f)} - \lambda I)$, bo $\det(R^{-1}) = [\det(R)]^{-1}$.