1 Własności $\mathbb{R}^N$

1.1 Odległości i normy w $\mathbb{R}^N$

Będziemy się teraz zajmować funkcjami od n zmiennych, tzn. określonymi na $\mathbb{R}^N \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (iloczyn kartezjański N egzemplarzy $\mathbb{R}$).

Punkt x należący do $\mathbb{R}^N$ będziemy oznaczać jako

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^N).$$

Przykł. Wysokość terenu n.p.m. jako funkcja długości i szerokości geograficznej.

Przykł. Temperatura w atmosferze (czy innym ośrodku) jako funkcja dł. i szer. geogr. oraz wysokości.

Początkiem do badania $\mathbb{R}^n$ i funkcji na niej jest zdefiniowanie *odległości*. Przypomnijmy sobie, jak definiowaliśmy odległość w $\mathbb{R}^2$. Jest ona wyznaczana z tw. Pitagorasa: **RYS.**: Dla dwóch punktów $a = (a^1, a^2)$ i $b = (b^1, b^2)$ odległość $D(a, b)$ pomiędzy nimi jest

$$D(a, b) = \sqrt{(a^1 - b^1)^2 + (a^2 - b^2)^2}.$$

Analogicznie postępujemy w przestrzeniach o większej liczbie wymiarów: Jeśli $x, y \in \mathbb{R}^N$, to odległość $d(x, y)$ między nimi definiujemy jako

Def.

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x^k - y^k)^2} \tag{1}$$

Inne oznaczenie $d(x, y)$ w $\mathbb{R}^N$ to $||x - y||$, tzn.

Def.

Jeśli mamy punkt $r = (r^1, r^2, \ldots, r^N) \in \mathbb{R}^N$, to na $||r|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x^k - y^k)^2}$ możemy patrzeć jako na odległość punktu r od zera:

$$||r|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (r^k)^2} = d(r, 0). \tag{2}$$

Tak zdefiniowana norma ma ważne własności, które teraz wypiszemy.

Własności normy.

1. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^N$ mamy: $||x|| \geqslant 0$, przy czym $||x|| = 0$ tylko dla wektora zerowego $x = \mathbf{0}$;
2. $|| - r|| = ||r||$ i ogólniej, $||\alpha r|| = |\alpha| \cdot ||r||$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||; \tag{3}$$
   ta nierówność nazywana jest *nierównością trójkąta.*

Dow. p.3): Nierówność trójkąta wynika z *nierówności Schwarza*: Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^N$ zachodzi

$$|\sum_{k=1}^{N} x^k \cdot y^k| \leqslant ||x|| \cdot ||y||. \tag{4}$$

Dow. Rozpatrzmy następującą funkcję zmiennej rzeczywistej λ:

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{N}(x^k - \lambda y^k)^2 = \sum_{k=1}^{N}(x^k)^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{N} x^k y^k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{N}(y^k)^2$$

$f(\lambda)$ jest trójmianem kwadratowym w λ. Ponadto $f(\lambda) \leqslant 0$, ponieważ $f(\lambda)$ jest pełnym kwadratem. Skoro trójmian $f(\lambda)$ jest nieujemny, to jego wyróżnik Δ musi być niedodatni. Policzmy ten wyróżnik:

$$\Delta = 4(\sum_{k=1}^{N} x^k y^k)^2 - 4\sum_{k=1}^{N}(x^k)^2 \sum_{k=1}^{N}(y^k)^2 \leqslant 0, \tag{5}$$

co możemy przepisać jako

$$(\sum_{k=1}^{N} x^k y^k)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N}(x^k)^2 \sum_{k=1}^{N}(y^k)^2$$

Po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego z obu stron nierówności i skorzystaniu z definicji normy (2) otrzymujemy nierówność (4).

CBDO

Dow. nierówności trójkąta (3). Policzmy:

$$||x - y||^2 = \sum_{k=1}^{N}(x^k + y^k)^2 = \sum_{k=1}^{N}(x^k)^2 + 2\sum_{k=1}^{N} x^k y^k + \sum_{k=1}^{N}(y^k)^2$$
$$\leqslant ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

z czego trzeba jeszcze wyciągnąć pierwiastek, aby otrzymać (3).

CBDO

Uwaga: Czy w nierówności Schwarza może wystąpić równość? TAK – jeśli x jest proporcjonalne do y (tzn. $x = \gamma y$ dla pewnego $\gamma \in \mathbb{R}$; wtedy $\Delta = 0$, a to znaczy (p. równ (5)) że w nier. Schwarza ma miejsce równość.

Podsumujmy **własności odległości**, definiowanej przez (1):

Dla dowolnych punktów $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ zachodzi:

1. $d(x, y) \geqslant 0$, przy czym $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (jest to tzw. *nierówność trójkąta*). **RYS.**

Okazuje się, że odległość euklidesowa nie jest jedyną funkcją od dwu argumentów, spełniającą powyższe warunki. Na przestrzeni $\mathbb{R}^N$ można wprowadzić wiele innych funkcji, zależnych od dwu argumentów, które spełniają powyższe warunki i które w związku z tym można też nazwać odległościami. Prowadzi to do pojęcia *przestrzeni metrycznej*:

Def. *Przestrzenią metryczną* nazywamy zbiór punktów z funkcją dwóch zmiennych $d(\cdot, \cdot)$ (zwaną *metryką* lub *odległością*, których odległość spełnia powyższe własności 1., 2. i 3.

Przykł. Wprowadźmy na $\mathbb{R}^N$ następującą metrykę:

$$d_\diamond(x, y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \tag{6}$$

Łatwo sprawdzić, że $d_\diamond(x,y)$ spełnia powyższe własności 1., 2. i 3.; pierwsze dwie są oczywiste, a trzecia wynika z nierówności dla wartości bezwzględnej: $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$.

Przykł. Jeszcze jedna, niejednokrotnie użyteczna, metryka na $\mathbb{R}^N$:

$$d_\Box(x,y) = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i - y_i|; \tag{7}$$

pierwsze dwie własności metryki są oczywiste, a trzecia wynika z następującego rachunku: Dla dowolnych punktów x, y, z mamy

$$\begin{aligned} d_\Box(x,y) = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i - y_i| &= \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i - z_i| + \max_{1\leqslant i\leqslant N} |z_i - y_i| = d(x,z) + d(z,y); \end{aligned}$$

przedostatnia nierówność wynika z nierówności $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ dla wartości bezwzględnej, a ostatnia – z nierówności dla maksimum. (? Bardziej szczegółowy rachunek?)

1.2 Ciągi punktów z $\mathbb{R}^N$

Oznaczmy przez $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots)$ ciąg punktów z $\mathbb{R}^N$: $a_n \in \mathbb{R}^N$, tzn. $a_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^N)$.

Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ punktów z $\mathbb{R}^N$ jest zbieżny do $g \in \mathbb{R}^N$, jeśli

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n>M}{\forall} : d(a_n, g) < \epsilon. \tag{8}$$

Uwaga. Warunek (8) oznacza, że ciąg (o wartościach rzeczywistych!): $d(a_n, g)$ dąży do zera dla n dążącego do ∞:

$$d(a_n, g) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Jeśli warunek (8) jest spełniony, to piszemy też:

$$a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g.$$

Podobnie jak w przypadku ciągów o wartościach rzeczywistych, mamy twierdzenie o jednoznaczności granicy.

Tw. Jeśli $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ i $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g'$, to $g = g'$.

Dow. Mamy:

$$0 \leqslant d(g, g') \leqslant d(g, a_n) + d(g', a_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

co znaczy, że $d(g, g') = 0$, a więc $g = g'$.

CBDO

Badanie zbieżności ciągów o wartościach w $\mathbb{R}^N$ jest równoważne badaniu zbieżności ciągów w $\mathbb{R}$. Mówi o tym następujące

Stw. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem punktów przestrzeni $\mathbb{R}^N$; niech $g \in \mathbb{R}^N$. Wtedy

$$(a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g) \iff (\text{dla wszystkich } k = 1, 2, \dots, N : a_n^k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g^k). \tag{9}$$

Dow. $\Longleftarrow$

$$d(a_n, g) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (a_n^k - g^k)^2},$$

i ponieważ każde z wyrażeń pod pierwiastkiem dąży do zera: $|a_n^k - g^k| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, to ich suma też dąży do zera, a to znaczy, że $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g$.

$\Longrightarrow$

Mamy: $||r|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N}(r^k)^2}$. Wybierzmy którąś $k-$tą składową i mamy z nierówności trójkąta:

$$||r|| \geqslant \sqrt{(r^k)^2} = |r^k|,$$

co daje:

$$d(a_n, g) \geqslant |a_n^k - g^k| \geqslant 0,$$

i z tw. o 3 ciągach w przypadku ciągów o wartościach rzeczywistych, jeżeli $d(a_n, g) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, to także $|a_n^k - g^k| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, a to znaczy, że $a_n^k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g^k$ dla $k = 1, 2, \ldots, N$.

CBDO

Def. Niech $X \subset \mathbb{R}^N$. Mówimy, że X jest *ograniczony*, jeśli istnieje taka liczba M, że

$$\underset{x\in X}{\forall} : ||x|| \leqslant M$$

(tzn. odległości wszystkich punktów zbioru X od zera są nie większe od liczby M).

Niech $s \in \mathbb{R}^N$ i $R \in \mathbb{R}_+$.

Def. *Kulą (otwartą)* $K(s, R)$ o środku w s i promieniu R nazywamy zbiór tych punktów $\mathbb{R}^N$, że ich odległość od s jest mniejsza od R: **RYS.**

$$K(s, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ d(x, s) < R\}. \tag{10}$$

Uwaga. Własność ograniczoności zbioru można równoważnie tak wypowiedzieć: Zbiór Z jest ograniczony, jeśli zawiera się w pewnej kuli (o pewnym środku i pewnym promieniu).

Ciekawostka. Jak wygląda kula w metryce euklidesowej, dla $N = 2$ to każdy (chyba) wie. Jak wyglądają kule w metrykach: $d_\diamond$ i $d_\Box$? – Gdy się je narysuje to będzie wiadomo skąd są takie oznaczenia tych metryk.

Tw. (Bolzano – Weierstrassa).Każdy ograniczony ciąg punktów $\mathbb{R}^N$ posiada podciąg zbieżny.

Dow. Niech $a_n = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^N)$.

Jeśli ciąg $\{a_n\}$ – ograniczony, to wszystkie ciągi $\{a^k{}_n\}$ (k – numer składowej, tzn. $k = 1, 2, \ldots, N$; n – numer elementu ciągu, tzn. $n = 1, 2, 3, \ldots$) są ograniczone. Wynika to z nierówności pokazywanej wyżej: $||r|| \geqslant r^k$ dla dowolnego $r \in \mathbb{R}^N$.

Po zastosowaniu tw. Bolzano-Weierstrassa do ciągu $\{a^1{}_n\}$ otrzymamy podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$ taki, że ciąg pierwszych współrzędnych jest zbieżny. Stosujemy teraz tw. Bolzano-Weierstrassa do ciągu $\{a_{n_k}^2\}$ i otrzymujemy podciąg ciągu $\{a_{n_k}\}$, którego pierwsza i druga składowa są zbieżne. Itd., operację powtarzamy N razy, aż otrzymamy zbieżność we wszystkich składowych.

CBDO

Następująca definicja jest bezpośrednim analogonem definicji ciągu Cauchy'ego o wartościach rzeczywistych na ciągi o wartościach wektorowych (tzn. z $\mathbb{R}^N$).

Def. Niech $\{a_n\}$ – ciąg punktów z $\mathbb{R}^N$. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *ciągiem Cauchy'ego*, jeśli

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{m,n>M}{\forall} : d(a_m, a_n) < \epsilon. \tag{11}$$

Tw. W przestrzeni $\mathbb{R}^N$ ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego.

Dow. $\Longrightarrow$: Załóżmy, że $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g$. Z definicji ciągu zbieżnego (powtórzonej tu 2 razy):

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{m,n>M}{\forall} : d(a_m, g) < \frac{\epsilon}{2} \ \wedge \ d(a_n, g) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Z nierówności trójkąta mamy:

$$d(a_n, a_m) \leqslant d(a_n, g) + d(a_m, g) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

czyli otrzymujemy (11), a więc $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

$\Longleftarrow$: Załóżmy teraz, że $\{a_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Wtedy

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{m,n>M}{\forall} : d(a_m, a_n) < \epsilon;$$

a że

$$d(a_m, a_n) \geqslant |a_m^k - a_n^k| \quad \text{dla} \ \ k = 1, 2, \dots N$$

to każdy z ciągów $\{a^k{}_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. A jak wiemy, jeżeli ciąg rzeczywisty jest ciągiem Cauchy'ego, to jest zbieżny. Zatem każdy z ciągów $\{a^k{}_n\}$ jest zbieżny; a to znaczy, że też i ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny.

CBDO

1.3 Zbiory otwarte i domknięte

W przypadku analizy na $\mathbb{R}^1$, mieliśmy szereg twierdzeń, w założeniach których było, iż jakiś zbiór jest otwarty bądź domknięty. Dla podzbiorów $\mathbb{R}^1$ mieliśmy sytuację, gdzie zbiorem domkniętym był odcinek z końcami (bądź skończona liczba takich odcinków), zaś otwartym – odcinek bez końców (bądź skończona liczba takich odcinków). Dla zbiorów w $\mathbb{R}^N$ również definiujemy pojęcia otwartości i domkniętości, ale nie da się ich bezpośrednio przenieść z $\mathbb{R}^1$ – trzeba je odpowiednio zmodyfikować.

1.3.1 Zbiory domknięte

Def. Niech $A \subset \mathbb{R}^N$. Zbiór A nazywamy *domkniętym*, jeśli dla dowolnego zbieżnego ciągu elementów z A jego granica też należy do A;

tzn.: A – domknięty $\Longleftrightarrow$

$$\underset{\{x_n\}}{\forall} (x_n \in A, \ \ x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g) \Longrightarrow (g \in A).$$

Przykł. zbiorów domkniętych.

1. $\mathbb{R}^N$.
2. Zbiór jednoelementowy.
3. Zbiór skończony.
4. W szczególności – zbiór pusty.
5. Niech $\{a_n\}$ – ciąg o wyrazach z $\mathbb{R}^N$, $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g \in \mathbb{R}^n$. Wtedy zbiór $\{a_1, a_2, \dots\} \cup g$ jest zbiorem domkniętym.

Przykł. Odcinek $]0,1]$ nie jest domknięty, bo wszystkie elementy ciągu $\frac{1}{n}$ należą do $]0,1]$, a granica 0 *nie należy* do $]0,1]$.

Def. Niech $A \subset \mathbb{R}^N$. *Domknięciem* zbioru A (ozn. $\overline{A}$) nazywamy zbiór:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{Istnieje ciąg } \{x_n\} \text{ o wyrazach z } A \text{ t. że } x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x\}. \tag{12}$$

Przykł. Domykanie z lewej strony odcinka $]0,1]$.

Stwierdzenia.

1. $A \subset \overline{A}$.

2. Jeśli A – domknięty to $A = \overline{A}$.

3. $\overline{A}$ jest zbiorem domkniętym oraz $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

4. Jeśli ciąg $\{x_n\}$ dąży do granicy g: $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ i każdy jego wyraz x_n jest granicą ciągu elementów zbioru A, to g też jest granicą ciągu elementów ze zbioru A.

   Dow. Punkt x_n jest granicą ciągu elementów ze zbioru A; nazwijmy ten ciąg $\{y_m\}$. Mamy

   $$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{m>M}{\forall} : d(y_m, x_n) < \epsilon,$$

   a więc

   $$\underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{a\in A}{\exists} \ d(a, x_n) < \epsilon$$

   Weźmy teraz $\epsilon = \frac{1}{n}$ i odpowiednio do tego $a_n \in A$ tak, by zachodziło $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$. Zachodzi:

   $$0 \leqslant d(a_n, g) \leqslant d(a_n, x_n) + d(x_n, g) < \frac{1}{n} + d(x_n, g);$$

   prawa strona dąży do zera gdy $n \to \infty$ ($\frac{1}{n}$ wiadomo, zaś $d(x_n, g) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ z założenia). Zatem również $d(a_n, g) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, a to znaczy, że $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g$.

   CBDO

Mamy następującą charakteryzację domknięcia.

Stw.

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \underset{\epsilon>0}{\forall} \ K(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$$

(tzn. do domknięcia należą te punkty x, że przecięcie kuli o środku w x i dowolnie małym promieniu ze zbiorem A jest niepuste). (**RYS.**)

Dow. Oznaczmy prawą stronę równości przez B. Jeżeli $x \in B$, to biorąc $\epsilon = \frac{1}{n}$ znajdziemy $x_n \in K(x, \frac{1}{n}) \cap A$. To znaczy, że $x_n \in A$ oraz że $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, czyli $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Pokazaliśmy w ten sposób, że $B \subset \overline{A}$.

Z drugiej strony, jeśli $x \in \overline{A}$, to w dowolnie małej kuli $K(x,\epsilon)$ o środku w x zawarte są prawie wszystkie elementy ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach z A i granicy x. Spełniony jest więc warunek, że przecięcie tej kuli z A jest zbiorem niepustym, czyli że $x \in B$. Tak więc $x \in \overline{A} \Longrightarrow x \in B$, czyli $\overline{A} \subset B$.

Oba te warunki znaczą, że $\overline{A} = B$.

CBDO

1.3.2 Zbiory otwarte

Def. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ oraz $x \in \mathcal{O}$. Mówimy, że x jest *punktem wewnętrznym* zbioru $\mathcal{O}$ (lub, że $\mathcal{O}$ jest *otoczeniem* punktu x) jeśli istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $K(x,\epsilon) \subset \mathcal{O}$.

Def. Zbiór A nazywamy *zbiorem otwartym*, jeśli każdy element tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

Przykł. zbiorów otwartych:

1. $\mathbb{R}^N, \emptyset$ są zbiorami otwartymi.

2. $K(x,r)$ $(r > 0)$ jest zbiorem otwartym.

   Dow. Chcemy pokazać, że (**RYS.**)

   $$\underset{y\in K(x,r)}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\exists}\ K(y,\epsilon) \subset K(x,r).$$

   Bierzemy $\epsilon = r - d(x,y) > 0$. Dla dowolnego $z \in K(y,\epsilon)$ mamy:

   $$d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x) < \epsilon + d(y,x) = r$$

   co znaczy, że $z \in K(x,r)$.

CBDO

Stw. Jeśli x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$ i x jest granicą ciągu $\{x_n\}$: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, to prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}$ należą do O.

I na odwrót:

Stw. Niech $x \in \mathbb{R}^N$ i $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$. Przypuśćmy, że dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ elementów $\mathbb{R}^N$ zachodzi:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = x) \Longrightarrow (\text{ prawie wszystkie wyrazy } x_n \in \mathcal{O}).$$

Wtedy x jest punktem wewnętrznym zbioru $\mathcal{O}$.

Dow. (nie wprost).

Załóżmy, że x nie jest punktem wewnętrznym zbioru $\mathcal{O}$, tzn.

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ K(x,\epsilon) \not\subset \mathcal{O}.$$

Bierzemy $\epsilon = \frac{1}{n}$. Mamy: $K(x,\frac{1}{n}) \not\subset \mathcal{O}$. Zatem istnieje taki ciąg $\{x_n\}$, że $x_n \in K(x,\frac{1}{n})$ oraz $x_n \notin \mathcal{O}$. Skoro x_n należy do kuli $K(x,\frac{1}{n})$, to odległość między x a x_n jest mniejsza niż promień kuli:.

$$0 < d(x,x_n) < \frac{1}{n},$$

a to znaczy, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x: $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem (znaleźliśmy bowiem ciąg $\{x_n\}$ dążący do x, którego wyrazy nie należą do $\mathcal{O}$), więc nieprawdziwe jest zaprzeczenie tezy, czyli prawdziwa jest teza mówiąca, iż x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$.

CBDO

Uwaga. Otwartość i domkniętość *nie są* pojęciami przeciwstawnymi! Np. zbiór $\mathbb{R}^N$ jest zarówno otwarty jak i domknięty.

Uwaga. Otwartość/domkniętość zbioru zależy też od tego, podzbiorem jakiego zbioru on jest. Np. jeśli rozpatrujemy $A =]0,1[$ jako podzbiór $\mathbb{R}$, to kulami otwartymi w $\mathbb{R}$ są odcinki (otwarte) i A jest otwarty. Jeśli natomiast rozpatrujemy A jako podzbiór $\mathbb{R}^2$, to kulami otwartymi w $\mathbb{R}^2$ są koła (bez brzegu) i A nie jest już otwarty, bo żadne koło o niezerowym promieniu nie mieści się w A.

Tw. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ i $A = \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}$. Wtedy ma miejsce równoważność

$$(\mathcal{O} \text{ jest otwarty }) \Longleftrightarrow (A \text{ jest domknięty}). \tag{13}$$

Dow. $\Longrightarrow$ Weźmy zbieżny $\{x_n\}$ o wyrazach należących do A: $x_n \in A$, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Chcemy pokazać, że $x \in A$.

Przypuśćmy, że przeciwnie: $x \notin A$. Wobec tego $x \in \mathcal{O}$ (bo A i $\mathcal{O}$ są rozłączne, a ich suma to całe $\mathbb{R}^N$). Z założenia $\mathcal{O}$ jest zbiorem otwartym, więc x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$ i (p. poprzednie Stw.) prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}$ należą do $\mathcal{O}$, więc nie należą do A. Otrzymaliśmy sprzeczność.

$\Longleftarrow$ Niech $x \in \mathcal{O}$. Skoro tak to $x \notin A = \overline{A}$, a więc istnieje kula $K(x,\epsilon)$ taka, że $K(x,\epsilon) \cap A = \emptyset$, a to znaczy, że $K(x,\epsilon) \subset \mathcal{O}$, więc x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$, czyli $\mathcal{O}$ jest otwarty.

CBDO

Wniosek. Niech $x \in \mathbb{R}^N$, $A \subset \mathbb{R}^N$ i $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N \setminus A$. Wtedy zachodzi jeden i tylko jeden z wykluczających się warunków:

1. x jest punktem wewnętrznym zbioru $\mathcal{O}$.
2. $x \in \overline{A}$.

Dow. Trzeba pokazać, że nieprawdą jest równoważność obydwu powyższych warunków, tzn: Nieprawda, że 1. $\Longleftrightarrow$ 2.

Pokażemy najsampierw że z zaprzeczenia 1. wynika 2.

Zaprzeczenie zdania: "x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$" to jest to samo, co zaprzeczenie zdania: "$\underset{\epsilon>0}{\exists} : K(x,\epsilon) \subset \mathcal{O}$", czyli: "$\underset{\epsilon>0}{\forall} : K(x,\epsilon) \not\subset \mathcal{O}$". To zaś jest równoważne zdaniu: "$\underset{\epsilon>0}{\forall} : K(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$", a to znaczy, że x jest punktem domknięcia zbioru A, tzn. $x \in \overline{A}$

To teraz że z zaprzeczenia 2. wynika 1.

Skoro x *nie* należy do domknięcia A, to $x \in \mathcal{O}$ oraz że $\underset{\epsilon>0}{\exists} : K(x,\epsilon) \cap A = \emptyset$, a to znaczy, że $K(x,\epsilon) \subset \mathcal{O}$, tzn. x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$.

CBDO

Tw.

1. $\mathbb{R}^N$ i $\emptyset$ są zbiorami otwartymi.
2. Jeśli $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}$ – *dowolny* zbiór wskaźników) jest rodziną zbiorów otwartych, to $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha$ też jest zbiorem otwartym.
3. Jeżeli $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ są otwarte, to $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ jest otwarty.

Dow.

1. Było

2. Niech $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha$. Istnieje więc $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ takie, że $x \in \mathcal{O}_{\alpha_0}$. Ponieważ $\mathcal{O}_{\alpha_0}$ – otwarty, więc istnieje kula o niezerowym promieniu, zawarta w $\mathcal{O}_{\alpha_0}$:

$$\underset{\epsilon>0}{\exists} : K(x,\epsilon) \subset \mathcal{O}_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha,$$

czyli $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha$ jest zbiorem otwartym.

3. Niech $x \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, tzn. $x \in \mathcal{O}_1$ i $x \in \mathcal{O}_2$. Tak więc

$$\underset{\epsilon_1>0}{\exists} : K(x,\epsilon_1) \subset \mathcal{O}_1 \quad \text{i} \quad \exists_{\epsilon_2>0} : K(x,\epsilon_2) \subset \mathcal{O}_2.$$

Bierzemy $\epsilon = \min(\epsilon_1,\epsilon_2) > 0$ i wtedy mamy

$$K(x,\epsilon) \subset K(x,\epsilon_1) \subset \mathcal{O}_1 \quad \text{i} \quad K(x,\epsilon) \subset K(x,\epsilon_2) \subset \mathcal{O}_2,$$

zatem $K(x,\epsilon) \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, czyli $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ jest zbiorem otwartym. *Uwaga.* Przez indukcję dowodzi się, że powyższa własność zachodzi dla dowolnej *skończonej* ilości zbiorów: Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, jeśli $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots \mathcal{O}_n$ są otwarte, to również $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \dots \cap \mathcal{O}_n$ jest otwarty. Własność ta *nie jest* prawdziwa dla rodzin nieskończonych: Weźmy np. rodzinę zbiorów otwartych $A_n =]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$; mamy: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$, co nie jest zbiorem otwartym.

CBDO

Uwaga – stw. Każdy zbiór otwarty $\mathcal{O}$ jest sumą pewnej rodziny zbiorów otwartych.

Dow. Niech $x \in \mathcal{O}$; wobec tego $x \in \mathcal{O}_x$, gdzie $\mathcal{O}_x$ jest pewną kulą o środku w punkcie x, taką,że $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$. Mamy następujące zawierania:

$$\mathcal{O} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_x \subset \mathcal{O},$$

skąd wynika, że $\bigcup\limits_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_x = \mathcal{O}$.

CBDO

1.3.3 Niektóre dalsze własności zbiorów domkniętych.

Dopełnienie zbioru, przypomnienie własności dopełnienia.

Zbiory domknięte mają własności, powiązane z powyższymi własnościami zbiorów otwartych:

1. $\mathbb{R}^N, \emptyset$ są zbiorami domkniętymi.

2. Jeśli A_1, A_2 – zbiory domknięte, to $A_1 \cup A_2$ też jest zbiorem domkniętym. Z indukcji, zachodzi to też dla dowolnej *skończonej* sumy mnogościowej: Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n$ są zbiorami domkniętymi, to $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ też jest zbiorem domkniętym dla dowolnego n.

3. Natomiast przecięcie *dowolnej rodziny* (skończonej czy nieskończonej) zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym: Jeśli $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$ jest rodziną zbiorów domkniętych, to również $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ też jest zbiorem domkniętym.

Dow.

1. $\mathbb{R}^N$ jest domknięty, bo $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^N = \emptyset$ jest otwarty.
   $\emptyset$ jest domknięty, bo $\mathbb{R}^N \setminus \emptyset = \mathbb{R}^N$ jest otwarty.

2. Jeśli A_1, A_2 – domknięte, to A_1', A_2' – otwarte; zatem (było) $A_1' \cap A_2'$ – otwarty, a że $A_1' \cap A_2' = (A_1 \cup A_2)'$, więc $(A_1 \cup A_2)'$ – otwarty, a to znaczy że $A_1 \cup A_2$ – domknięty.

   Uwaga: Własność ta *nie jest* słuszna dla sum nieskończonych: Jako przykład weźmy $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Każdy zbiór A_n jest domknięty, a ich suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} =]0,1]$ *nie jest* zbiorem domkniętym.

3. Jeśli A_α jest domknięty to $\mathbb{R}^N \setminus A_\alpha$ jest otwarty. Suma dowolnej ilości zbiorów otwartych jest otwarta (własność 3. zb. otwartych), wobec tego: $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} (\mathbb{R}^N \setminus A_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha'$ jest otwarty. Ale mamy: $A' \cup B' = (A \cap B)'$ dla dowolnych zbiorów A i B, (A' – dopełnienie A, tzn. $\mathbb{R}^N \setminus A$) i również: $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha' = \left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\right)'$. A mamy jeszcze dla dowolnych zbiorów X, Y: $X \setminus Y = X \cap Y'$, zatem $\left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\right)' = \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\right)$.

   Tak więc $\mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha\right)$ jest otwarty, zatem $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ jest *domknięty.*

CBDO

1.3.4 Zbiory zwarte

Def. Niech $K \subset \mathbb{R}^N$. Mówimy, że K jest *zwarty*, jeśli z dowolnego ciągu elementów zbioru K można wybrać podciąg zbieżny do elementu zbioru K.

Tw. Niech $K \subset \mathbb{R}^N$. Wtedy:

$$(K \text{ jest zwarty }) \Longleftrightarrow (K \text{ jest domknięty i ograniczony }).$$

Dow. $\Longleftarrow$ Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, z dowolnego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny. Granica tego ciągu musi być w K, bo K – domknięty.

$\Longrightarrow$ Załóżmy, że K jest zwarty. Bierzemy ciąg elementów z K zbieżny do $x \in \mathbb{R}^N$. Granicą dowolnego podciągu jest ten sam punkt x. Zatem (z zał. i z definicji zb. zwartego) $x \in K$. To pokazuje, że K jest domknięty.

Przypuśćmy teraz, że zbiór K nie jest ograniczony. Wtedy istnieje ciąg $\{x_n\}$ elementów zbioru K taki, że $d(0, x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Tak też jest dla dowolnego podciągu ciągu $\{x_n\}$. Ale taki podciąg nie może być zbieżny.

CBDO

Przykł. $]0,1[\subset \mathbb{R}^1$ nie jest zwarty; $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^1$ nie jest zwarty; $[0,1] \subset \mathbb{R}^1$ jest zwarty.

2 Odwzorowania

Pojęcie *odwzorowania* pomiędzy dwoma zbiorami było już definiowane, ale dawno, więc nie od rzeczy będzie przypomnieć, że odwzorowaniem nazywamy sposób przyporządkowania (niekoniecznie każdemu) elementowi $x \in X$ elementu $y \in Y$. Zapisujemy to: $T : X \to Y$, Dalej X będzie podzbiorem $\mathbb{R}^N$, zaś Y podzbiorem $\mathbb{R}^M$.

RYS.

Załóżmy, że mamy jakieś układy współrzędnych w $\mathbb{R}^N$ i $\mathbb{R}^M$, tak że dowolny punkt $x \in X$ ma postać:

$$x = (x^j), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

i analogicznie w Y

$$y = (y^k), \quad k = 1, 2, \ldots, M.$$

$$(Tx)^k = T^k(x^1, x^2, \ldots, x^N) \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

Na odwzorowanie możemy patrzeć po prostu jak na układ M funkcji N zmiennych.

Przykł.

1. $R \to \mathbb{R}^3$ – krzywa w $\mathbb{R}^3$.

2. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Zamiana układu współrzędnych; pole wektorowe.

2.1 Definicja odwzorowania ciągłego i niektóre przykłady

Def. Niech $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$, oraz niech będzie dane odwzorowanie $T : X \to Y$.

Mówimy, że odwzorowanie T jest *ciągłe*, jeśli dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ elementów zbioru X zbieżnego do punktu $g \in X$ mamy

$$T(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T(g). \tag{14}$$

Uwaga: Przypominając sobie definicję zbieżności ciągu widzimy, że odwzorowanie T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje T^k $(k = 1, 2, \ldots, M)$ są ciągłe.

Przykłady odwzorowań ciągłych. Tu: $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$,$T : X \to Y$.

1. Odwzorowanie stałe: Dla każdego $x \in X$: $T(x) = y_0 = \text{const.}$. **RYS.**

2. Tu niech $N = M$. Określamy *odwzorowanie identycznościowe* wzorem: $T(x) = x$; T często też oznaczamy symbolem Id_X.

3. Niech Tu: $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$, $Z \subset \mathbb{R}^k$ oraz $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$. Oznaczamy: $(S \circ T)(x) = S(T(x))$, czyli $S \circ T : X \to Z$.

   RYS.

   Odwzorowanie $S \circ T$ nazywamy *superpozycją* lub *złożeniem* odwzorowań S oraz T.

   Tw. Jeśli S i T są odwzorowaniami ciągłymi, to $S \circ T$ też jest odwzorowaniem ciągłym.

   Dow. (podobny jak w $\mathbb{R}^1$): Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem elementów z X: $x_n \in X$ oraz $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g \in X$.

   Ponieważ T – ciągłe, więc $T(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T(g)$.

Oraz:

Ponieważ X – ciągłe, więc $S(T(x_n)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} S(T(g))$.

Zatem $(S \circ T)(x_n)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (S \circ T)(g))$.

CBDO

4. $+ : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to x + y \in \mathbb{R}$ (dodawanie liczb rzeczywistych) jest odwzorowaniem ciągłym.

   Dow. Jest to po prostu twierdzenie, że granica sumy dwóch ciągów zbieżnych jest sumą granic.

   CBDO

5. $\cdot : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to x \cdot y \in \mathbb{R}$ (mnożenie liczb rzeczywistych) jest odwzorowaniem ciągłym.

   Dow. Granica iloczynu dwóch ciągów zbieżnych jest iloczynem granic.

   CBDO

6. $:: (\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}) \ni (x, y) \to x : y \in \mathbb{R}$ (dzielenie liczb rzeczywistych) jest odwzorowaniem ciągłym.

   Dow. Granica ilorazu dwóch ciągów zbieżnych jest ilorazem granic.

   CBDO

7. Funkcja dwóch zmiennych co *nie jest* ciągła:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ poza } (0, 0) \text{ oraz } f(0, 0) = 0.$$

Def. Jeśli $A \subset Y$, to zbiór:

$$T^{-1}(A) = \{x \in X : \quad T(x) = A\} \tag{15}$$

nazywamy *przeciwobrazem* zbioru A przy odwzorowaniu T.

Przykł. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x^2 + y^2$; $T^{-1}(1) = ...$, $T^{-1}(1) = ...$, $T^{-1}(0) = (0, 0)$, $T^{-1}(-1) = \emptyset$, $T^{-1}([1, 2]) = ...$

Uwaga. Pojawiający się wyżej symbol T^{-1} *nie oznacza*, że T jest odwracalne! Powyższy zapis należy odczytywać *łącznie*.

Def. (*) Niech $X \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{O} \subset X$.

Mówimy, że $\mathcal{O}$ jest *otwarty* w X, jeżeli istnieje zbiór otwarty $\mathcal{O}'$ w $\mathbb{R}^N$ taki, że $\mathcal{O} = X \cap \mathcal{O}'$.

RYS.

2.2 Inna charakteryzacja odwzorowań ciągłych

Tw. Niech $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$. Wówczas

T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy wszystkich zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^M$ są otwarte w $\mathbb{R}^N$.

Dow. Przypuśćmy, że T jest ciągłe na $X = \mathbb{R}^N$. Niech V będzie zbiorem otwartym w $Y = \mathbb{R}^M$. Trzba pokazać, że każdy punkt zbioru $T^{-1}(V)$ jest jego punktem wewnętrznym. Załóżmy, że $p \in X$, $T(p) \in V$. Ponieważ V jest otwarty, więc istnieje $\epsilon > 0$ takie, że

$y \in V$, jeśli $d_Y(T(p), y) < \epsilon$; a ponieważ T jest ciągłe w punkcie p, więc istnieje $\delta > 0$ takie, że $d_Y(T(x), T(p)) < \epsilon$, jeśli $d_X(x, p) < \delta$. W ten sposób $x \in T^{-1}(V)$, jeśli tylko $d_X(x, p) < \delta$.

W drugą stronę: Przypuśćmy, że że zbiór $T^{-1}(V)$ jest otwarty w X dla dowolnego zbioru otwartego V w Y. Weźmy $p \in X$ i $\epsilon > 0$; i niech V będzie zbiorem wszystkich $y \in Y$ takich, że $d_Y(y, T(p)) < \epsilon$. Wtedy V jest otwarty i dlatego $T^{-1}(V)$ jest otwarty. Skoro tak, to istnieje $\delta > 0$ takie, że $x \in T^{-1}(V)$, jeśli tylko $d_X(p, x) < \delta$. Ale jeśli $x \in T^{-1}(V)$, to $T(x) \in V$, ponieważ $d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$.

CBDO

2.3 Jeszcze inna charakteryzacja odwzorowań ciągłych

Poniższa charakteryzacja odwzorowań ciągłych jest bezpośrednim analogonem charakteryzacji Cauchy'ego funkcji ciągłej w $\mathbb{R}^1$. **Tw.**

$$(T \text{ ciągłe na } X) \Longleftrightarrow \left(\underset{x \in X}{\forall} \ \underset{\epsilon > 0}{\forall} \ \underset{\delta > 0}{\exists} \ \underset{y \in X}{\forall} \ (d(x, y) < \delta) \Longrightarrow d(T(x), T(y)) < \epsilon \right) \tag{16}$$

Dow.

$\Longrightarrow$

Załóżmy, że teza tw. powyżej jest nieprawdziwa, tzn.

$$\underset{x \in X}{\exists} \ \underset{\epsilon > 0}{\exists} \ \underset{\delta > 0}{\forall} \ \underset{y \in X}{\exists} \ (d(x, y) < \delta) \ \text{ i } \ d(T(x), T(y)) \geqslant \epsilon.$$

Wybierzmy $\delta = \frac{1}{n}$. Istnieje więc taki ciąg $\{y_n\}$, że

$$d(x, y_n) < \frac{1}{n} \qquad (*)$$
$$d(T(x), T(y_n)) \geqslant \epsilon \qquad (**)$$

Z (*) wynika, że $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$,

natomiast z (**) wynika, że $T(y_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} T(x)$, co jest sprzeczne z założeniem, że T jest ciągłe.

$\Longrightarrow$

Niech $x_n, x \in X$, oraz $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Weźmy $\epsilon > 0$. Z założenia,

$$\underset{\delta > 0}{\exists} \ \underset{y \in X}{\forall} \ (d(x, y) < \delta) \Longrightarrow d(T(x), T(y)) < \epsilon.$$

Ponieważ $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, to dla prawie wszystkich n zachodzi:

$$d(x, x_n) < \delta \quad \text{oraz } d(T(x), T(x_n)) < \epsilon$$

a ta ostatnia nierówność mówi, że $T(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(x)$, a to znaczy, że T jest ciągłe.

CBDO

Tw. (nazwane w notatkach 'sakramentalnym'; na pewno jest FUNDAmentalne).

Niech $K \subset \mathbb{R}^N$ – zwarty, oraz niech $f : K \to \mathbb{R}$ – funkcja ciągła. Wtedy:

1. f jest ograniczona.
2. f osiąga swoje kresy, tzn.:

$$\underset{x_{min},x_{max}\in K}{\exists}\ \underset{x\in K}{\forall}\ f(x_{min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{max}) \tag{17}$$

3. f jest jednostajnie ciągła.

Dow.

1. Przypuśćmy, że f nie jest ograniczona. Wtedy istnieje $\{x_n\}$, $x_n \in K$ taki, że

$$f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad (\bullet)$$

Ponieważ K jest zwarty, więc ciąg $\{x_n\}$ posiada podciąg zbieżny $\{y_n\} : y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \in K$. Ale f jest ciągła, więc

$$f(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(g)$$

co stanowi sprzeczność z $(\bullet)$.

CBDO

2. Niech $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem wartości funkcji f na K: $\mathcal{W} = \{f(x) :\ x \in K\}$. Niech M będzie kresem górnym zbioru wartości funkcji na K: $M = \sup \mathcal{W}$. Kres górny należy do domknięcia zbioru: $M \in \overline{\mathcal{W}}$. $\overline{\mathcal{W}}$ jest domknięty, więc istnieje ciąg $\{x_n\}$ o wyrazach z K taki, że $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M$. K jest zwarty, więc domknięty, więc istnieje podciąg $\{x_{n_m}\}$ ciągu $\{x_n\}$, który to podciąg jest zbieżny do granicy należącej do K:

$$f(\underbrace{\lim_{m\to\infty} x_{n_m}}_{x_{max}}) = \lim_{m\to\infty} f(x_{n_m}) = M.$$

CBDO

3. Przypomnijmy sobie, co to znaczy, że funkcja od argumentu rzeczywistego jest jednostajnie ciągła. Dla odwzorowania definicja jest analogiczna:

Def.

$$(T \text{ jednostajnie ciągłe na } X) \Longleftrightarrow \left(\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x,y\in X}{\forall}\ (d(x,y) < \delta) \Longrightarrow d(T(x),T(y)) < \epsilon\right) \tag{18}$$

Teraz

Dow. Przypuśćmy, że f *nie jest* jednostajnie ciągła, tzn.

$$\underset{\epsilon>0}{\exists}\ \underset{\delta>0}{\forall}\ \underset{x,y\in X}{\exists}\ (d(x,y) < \delta) \overset{\text{i}}{\Longrightarrow} d(T(x),T(y)) \geqslant \epsilon.$$

Weźmy $\delta = \frac{1}{n}$ i ciągi $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ o wyrazach z X takie, że

$$d(x_n, y_n) < \tfrac{1}{n}$$
$$d(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \epsilon. \quad (\bullet\bullet)$$

K jest zwarty, więc można założyć, że $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_\infty \in K$.

Mamy:

$$d(y_n, x_\infty) \leqslant d(y_n, x_n) + d(x_n, x_\infty) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Mamy więc: $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_\infty$; oraz z ciągłości f:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_\infty) \\ f(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_\infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow d(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon.$$

Ale ostatnia nierówność jest sprzeczna z (••).

CBDO

3 Rachunek różniczkowy

3.1 Pochodne cząstkowe, różniczkowalność funkcji, przyrosty

Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem otwartym, zaś $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ – funkcją ciągłą.

Niech $x \in \mathcal{O}$. Wypiszmy jawnie składowe x:

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^N), \quad f(x) = f(x^1, x^2, \ldots, x^N).$$

Wybierzmy teraz $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ i traktujmy zmienne x^l, gdzie $l \neq k$ jako stałe.

Rozważmy granicę:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} f(x^1, x^2, \ldots, x^N) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^{k-1}, x^k + h, x^{k+1}, \ldots, x^N) - f(x^1, \ldots, x^k, \ldots, x^N)}{h} \tag{19}$$

Def. Powyższą granicę nazywamy *pochodną cząstkową* funkcji f po zmiennej x^k (liczoną w punkcie x).

Def. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem otwartym, zaś $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ – funkcją ciągłą. (Ten ostatni warunek piszemy też: $f \in C(\mathcal{O})$).

Mówimy, że f jest różniczkowalna r razy w sposób ciągły, jeżeli istnieją wszystkie pochodne cząstkowe aż do rzędu r i są one ciągłe.

Uwaga. (terminologiczna) Ten ostatni warunek zapisujemy krócej jako: $f \in C^r(\mathcal{O})$, gdzie przez $C^r(\mathcal{O})$ oznaczamy zbiór funkcji różniczkowalnych r razy w sposób ciągły. Stosujemy też oznaczenie $C^\infty(\mathcal{O})$ dla funkcji, które posiadają pochodne ciągłe dowolnie wysokiego rzędu. Funkcje takie nazywamy *funkcjami gładkimi* (należą do nich np. wielomiany).

Tw. Niech $\mathcal{O}$ – otwarty podzbiór $\mathbb{R}^N$, oraz $f \in C^1(\mathcal{O})$. Niech $x_0 \in \mathcal{O}$, i niech $h \in \mathbb{R}^N$ – dostatecznie małe, tzn. $||h|| < \epsilon$ dla pewnego ϵ – tak, by $x_0 + h \in \mathcal{O}$ **RYS.**

Zdefiniujmy $r(x_0, h)$ przez:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) h^k + r(x_0, h).$$

Wtedy zachodzi:

$$\frac{r(x_0, h)}{||h||} \xrightarrow{h \to 0} 0 \tag{20}$$

Uwaga. Znaczenie tego wzoru: Pozwala on wyznaczać przyrost funkcji: Im mniejsze h, tym lepiej przyrost jest przybliżany przez część liniową.

Dow. Będzie dla (najważniejszego w zastosowaniach) przypadku $N = 3$; dla dowolnego N jest analogiczny.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) =$$

$$\begin{aligned} & f(x_0^1 + h^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) \qquad I \\ & + f(x_0^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3 + h^3) \qquad II \\ & + f(x_0^1, x_0^2, x_0^3 + h^3) - f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \qquad III \end{aligned}$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej mamy

$$III = \frac{\partial}{\partial x^3} f(x_0^1, x_0^2, y^3) h^3,$$

gdzie y^3 – punkt pomiędzy x_0^3 a $x_0^3 + h^3$;

$$II = \frac{\partial}{\partial x^2} f(x_0^1, y^2, x_0^3 + h^3) h^2, \qquad y^2 \in]x_0^2, x_0^2 + h^2[;$$

$$I = \frac{\partial}{\partial x^1} f(y^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) h^1, \qquad y^1 \in]x_0^1, x_0^1 + h^1[.$$

Tak więc

$$\begin{aligned} r(x_0, h) &= f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) h^1 - \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0) h^2 - \frac{\partial f}{\partial x^3}(x_0) h^3 \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x^1} f(y^1, x_0^2 + h^2, x_0^3 + h^3) - \frac{\partial}{\partial x^1} f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right] h^1 \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x^2} f(x_0^1, y^2, x_0^3 + h^3) - \frac{\partial}{\partial x^2} f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right] h^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x^3} f(x_0^1, x_0^2, y^3) - \frac{\partial}{\partial x^3} f(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \right] h^3 \end{aligned} \tag{21}$$

Składowe wektora h szacują się przez:

$$\frac{|h^k|}{||h||} \leqslant 1.$$

Ponadto, jeżeli $h \to 0$, to:

$$y^1 \to x^1; \qquad y^2 \to x^2; \qquad y^3 \to x^3.$$

Ponieważ pochodne cząstkowe są ciągłe, to różnice w (21) dążą do zera i mamy

$$\frac{r(x_0, h)}{||h||} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

CBDO

3.2 Pochodna funkcji złożonej

Usystematyzujmy oznaczenia, przydając im, jeśli trzeba, dodatkowe jeszcze wyjaśnienia:

1. $h = \Delta x$ – przyrost zmiennej (-ych);
2. $f(x + h) - f(x) = \Delta f$ – przyrost funkcji;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) h^k = \mathsf{d}f$ – różniczka funkcji;
4. r – reszta.

Pamiętajmy, że wszystkie powyższe obiekty: $\Delta x, \Delta f, \mathsf{d}f, r$ są funkcjami od x i h.

Mamy też:

$$\Delta f = \mathsf{d}f + r;$$

im mniejsze h, tym mniejsze r i w wielu zastosowaniach fizycznych na ogół przyjmuje się, że dla małych h, r jest zaniedbywalny.

Tw. (Prototyp twierdzenia o pochodnej odwzorowania złożonego) Niech $g : \mathcal{U} \to \mathcal{O}$, gdzie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$, oraz $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. (Pisząc jawnie argumenty, mamy: $f(y^1, y^2, \dots, y^N)$ oraz $g(x) = g^1(x), g^2(x), \dots, g^N(x))$. Niech $k = f \circ g$, tzn. $k(x) = f(g(x))$ lub, pisząc bardziej jawnie, ale też bardziej rozwlekle argumenty: $k(x) = f(g^1(x), g^2(x), \dots, g^N(x))$.

Jeżeli $f \in C^1(\mathcal{O}), g \in C^1(\mathcal{U})$, to $k \in C^1(\mathcal{U})$ oraz

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x} k(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y^i}(g(x)) \frac{\mathsf{d}g^i}{\mathsf{d}x}(x). \tag{22}$$

Dow. Liczymy iloraz różnicowy:

$$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \spadesuit$$

(tu $h \in \mathbb{R}$). Oznaczmy: $\Delta y = g(x+h) - g(x)$ (tzn. $\Delta y^i = g^i(x+h) - g^i(x)$).

$$\spadesuit = \frac{f(g(x) + \Delta y)) - f(g(x))}{h} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y^i}(g(x))\Delta y^i + r(g(x), \Delta y)}{h}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y^i}(g(x))\Delta y^i}{h} + \frac{r(g(x), \Delta y)}{h} \tag{23}$$

Pierwszy wyraz w powyższym wyrażeniu (23) to jest to co trzeba, ponieważ

$$\frac{\Delta y^i}{h} = \frac{g^i(x+h)) - g^i(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} \frac{\partial g^i}{\partial x}(x)$$

Natomiast drugi wyraz w wyrażeniu (23) okazuje się ,że dąży do 0 gdy $h \to 0$. Bowiem, gdy $\Delta y = 0$, to $\frac{r(g(x), \Delta y)}{h} = 0$. Natomiast gdy $\Delta y \neq 0$, to mamy:

$$\frac{r(g(x), \Delta y)}{h} = \frac{r(g(x), \Delta y)}{||\Delta y||} \cdot \frac{||\Delta y||}{h}$$

W pierwszym czynniku mamy: $\Delta y \xrightarrow{h \to 0}$ i co za tym idzie, cały wyraz też dąży do zera (z własności reszty). Drugi czynnik, tzn. iloraz $\frac{||\Delta y||}{h}$, spełnia:

$$\frac{||\Delta y||}{h} = \left|\left|\frac{\Delta y}{h}\right|\right| \xrightarrow{h \to 0} \left|\left|\frac{\mathsf{d}g}{\mathsf{d}x}\right|\right|$$

CBDO

Będziemy dalej potrzebować dwu prostych faktów dotyczących normy i odległości.

Stw. Norma jest funkcją ciągłą swoich argumentów (tzn. składowych wektora).

Dow. Przyjrzyjmy się wyrażeniu na normę wektora x:

$$||x|| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^N)^2}$$

i mamy:

1. podnoszenie do kwadratu jest funkcją ciągłą,

2. sumowanie jest funkcją ciągłą,

3. pierwiastek jest funkcją ciągłą.

Stw. Odległość jest funkcją ciągłą, tzn. jeżeli $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, to

$$d(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d(x, y). \tag{24}$$

Dow. Najsampierw pokażemy następującą *nierówność czworoboku*:

$$d(x, u) \leqslant d(x, y) + d(y, z) + d(z, u);$$

bowiem, pisząc dwukrotnie nierówność trójkąta, mamy:

$$d(x, u) \leqslant d(x, y) + d(y, u) \leqslant d(x, y) + d(y, z) + d(z, u)$$

(szkoda tu pisać **CBDO**) i teraz, korzystając dwukrotnie z nierówności czworoboku:

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \Longrightarrow d(x_n, y_n) - d(x, y) \leqslant d(x_n, x) + d(y, y_n);$$

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \Longrightarrow d(x, y) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x, x_n) + d(y_n, y);$$

czyli mamy

$$0 \leqslant |d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leqslant d(x, x_n) + d(y_n, y);$$

Prawa strona powyższej nierówności z założenia dąży do zera, a z tego wynika (24).

CBDO

3.3 Równość drugich pochodnych mieszanych

Tw. (o równości drugich pochodnych mieszanych). Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ – zbiór otwarty. Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathcal{O})$. Wtedy:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial x^1} \tag{25}$$

Dow. Najsampierw oznaczmy x zamiast x^1 oraz y zamiast x^2.

Oznaczmy:

$$\Delta x = h, \qquad \Delta y = k$$

oraz

$$w = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$$

Ustalmy teraz x i h i zdefiniujmy

$$\phi(y) = f(x + h, y) - f(x, y)$$

Możemy wyrazić w przez ϕ:

$$w = \phi(y + k) - \phi(y) = \phi'(\xi) \cdot k$$

gdzie $\xi \in]y, y + k[$; jest to wniosek z tw. Lagrange'a o wartości średniej. Mamy dalej

$$\phi'(\xi) \cdot k = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x + h, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\eta, \xi) \cdot h \cdot k$$

gdzie $\eta \in]x, x+h[$; w ostatnim kroku znów skorzystaliśmy z tw. Lagrange'a o wartości średniej.

Zdefiniujmy teraz

$$\psi(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$$

i podobnie jak wyżej, możemy wyrazić w przez ψ. Mamy:

$$w = \psi(x+h) - \psi(x) = \psi'(\tilde{\eta}) \cdot h = \spadesuit$$

(tu $\tilde{\eta} \in]x, x+h[$; znów skorzystaliśmy z tw. Lagrange'a) i dalej

$$\spadesuit = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{\eta}, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{\eta}, y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \cdot h \cdot k$$

gdzie $\tilde{\xi} \in]y, y+k[$.

W powyższych wyrażeniach liczyliśmy tę samą wielkość w na dwa różne sposoby. Mamy więc:

$$w = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\eta, \xi) \cdot h \cdot k = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}) \cdot h \cdot k$$

Jeśli teraz $h \to 0$, to wtedy $\xi \to y$, $\eta \to x$, oraz $\tilde{\xi} \to y$, $\tilde{\eta} \to x$, zatem otrzymujemy równość pochodnych cząstkowych mieszanych w punkcie (x, y).

CBDO

Przykł.: Nie można opuścić założeń o ciągłości; Nierówność pochodnych mieszanych gdy f nie jest kl. C^2 .

3.4 Wyższe pochodne

Notacja pochodnych cząstkowych. Mówiąc o pochodnej cząstkowej trzeba podać nie tylko jej rząd (ilość różniczkowań), ale też powiedzieć, po jakich zmiennych się różniczkuje. Ogólnie pochodna r-tego rzędu funkcji N zmiennych ma postać:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^r f}{(\partial x^1)^{r_1}(\partial x^2)^{r_2}\dots(\partial x^N)^{r_N}}, \qquad \text{gdzie} \quad r = r_1 + r_2 + \dots + r_N;$$

i tak wszystkie drugie pochodne funkcji dwóch zmiennych są

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

pochodne trzeciego rzędu:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

itd.

3.5 Różniczkowalność odwzorowań

Powyższe uwagi dotyczyły *funkcji* N zmiennych. Gdy mamy odwzorowania, różniczkowalność tychże definiujemy analogicznie:

Niech T odwzorowuje $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ na $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^M$, $\mathcal{O}$ i $\mathcal{U}$ są otwarte. **RYS.**; niech $x \in \mathcal{O}$, $y \in \mathcal{U}$.

Niech $y = T(x)$. Wypiszmy tę równość jawnie w składowych:

$$y^k = T^k(x^1, x^2, \ldots, x^N), \quad k = 1, 2, \ldots, M.$$

Def. Mówimy, że T jest klasy C^r, jeżeli wszystkie funkcje $T^k \in C^r(\mathcal{O})$.

Można wypisywać wszystkie pochodne cząstkowe rzędu r dla odwzorowania – wzory są podobne jak na pochodną funkcji, tylko nieco bardziej skomplikowane. Będziemy je wypisywać, gdy będzie to potrzebne, a na razie wypiszmy jawnie *pierwszą* pochodną odwzorowania:

$$T'(x) = \begin{bmatrix} (T^1(x))' \\ (T^2(x))' \\ \vdots \\ (T^M(x))' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^1}{\partial x^1} & \frac{\partial T^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial T^1}{\partial x^N} \\ \frac{\partial T^2}{\partial x^1} & \frac{\partial T^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial T^2}{\partial x^N} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial T^M}{\partial x^1} & \frac{\partial T^M}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial T^M}{\partial x^N} \end{bmatrix} \tag{26}$$

tzn. na skrzyżowaniu i-tego wiersza i j-tej kolumny mamy pochodną $\dfrac{\partial T^i}{\partial x^j}$. Pamiętajmy, że każda z pochodnych $\dfrac{\partial T^i}{\partial x^j}$ jest funkcja N zmiennych $x^1, \ldots, x^N$.

Oznaczenia & terminologia: Pochodną odwzorowania (26) oznacza się też czasem DT. Taka tablica liczb, jak pamiętamy z części algebraicznej wykładu, nazywa się *macierzą*; w tym konkretnym przypadku mamy *macierz pochodnej* odwzorowania albo *macierz Jacobiego.*

Przykł. Macierz Jacobiego zamiany współrzędnych kartezjańskich na biegunowe.

3.6 Pochodna odwzorowania złożonego

Niech: $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$, $Z \subset \mathbb{R}^k$ oraz $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$. Pamiętamy, że *superpozycją* (*złożeniem* odwzorowań S i T nazywamy odwzorowanie $T \circ S : X \to Z$, określone jako: $(T \circ S)(x) = T(S(x))$.

RYS.

Pamiętamy też twierdzenie, że jeśli S i T są odwzorowaniami ciągłymi, to $T \circ S$ też jest odwzorowaniem ciągłym.

Wyprowadziliśmy niedawno wzór (22) na pochodną odwzorowania złożonego w przypadku, gdy X było podzbiorem $\mathbb{R}$, Y podzbiorem $\mathbb{R}^n$, oraz $Z \subset \mathbb{R}$:

RYS.

Zastosujmy teraz ten wzór w przypadku, gdy mamy pochodną $\dfrac{\partial (T \circ S)^k}{\partial x^l}(x)$.

RYS.

Mamy:

$$\frac{\partial (T \circ S)^k}{\partial x^l}(x) = \frac{\partial T^k(S^1(x^1, x^2, \ldots, x^N), S^2(x^1, x^2, \ldots, x^N), \ldots, S^M(x^1, x^2, \ldots, x^N))}{\partial x^l}(x)$$

$$= \frac{\partial T^k}{\partial y^1}(S(x)) \cdot \frac{\partial S^1}{\partial x^l}(x) + \frac{\partial T^k}{\partial y^2}(S(x)) \cdot \frac{\partial S^2}{\partial x^l}(x) + \cdots + \frac{\partial T^k}{\partial y^M}(S(x)) \cdot \frac{\partial S^M}{\partial x^l}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial T^k}{\partial y^j}(S(x)) \cdot \frac{\partial S^j}{\partial x^l}(x). \tag{27}$$

To była konkretna składowa $\frac{\partial (T \circ S)^k}{\partial x^l}(x)$. Dla całej macierzy Jacobiego można wypisać wzór, przypominający jako żywo pochodną funkcji złożonej – ale aby go prawidłowo rozczytać, trzeba pamiętać, co oznaczają poszczególne symbole:

$$(T \circ S)'(x) = T'(S(x)) \cdot S'(x)$$

gdzie kropka oznacza *mnożenie macierzy* pochodnych.

Jeśli zarówno S jak i T są odwzorowaniami różniczkowalnymi klasy C^1, to i ich złożenie też jest odwzorowaniem różniczkowalnym klasy C^1. Wynika to od razu z faktu, że sumy i iloczyny odwzorowań różniczkowalnych typu (22) też są różniczkowalne, a we wzorze (27) są tylko sumy i iloczyny takich wyrażeń.

Analogicznie się argumentuje pokazując, że jeśli S oraz T są odwzorowaniami różniczkowalnymi klasy C^r, to i ich złożenie też jest odwzorowaniem różniczkowalnym klasy C^r.

Powyższe można podsumować w twierdzeniu:

Tw. Jeśli S i T są odwzorowaniami klasy C^r, to również ich złożenie $T \circ S$ jest klasy C^r. Pierwsza pochodna odwzorowania złożonego dana jest wzorem

$$(T \circ S)'(x) = T'(S(x)) \cdot S'(x) \tag{28}$$

or, in more explicit manner,

$$\frac{\partial (T \circ S)^k}{\partial x^l}(x) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial T^k}{\partial y^j}(S(x)) \cdot \frac{\partial S^j}{\partial x^l}(x). \tag{29}$$

Przykł. $S : \mathbb{R}^2 \ni (r, \phi) \to (x = r\cos\phi, y = r\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$, $T : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to (u = exp(x+y), v = \exp(x-y) \in \mathbb{R}^2$. Policzymy pochodną wprost oraz jako iloczyn macierzy pochodnych S i T.