

1 Agitacja

W. I. Arnold – wielkiej klasy matematyk – zauważył, że:

’Główne odkrycie Newtona, to, którego zdecydował się nie ujawniać i opublikował tylko w postaci anagramu, brzmi: *Data aequatione quodcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*. W tłumaczeniu [z łaciny i] na współczesny język matematyki oznacza to, że

Rozwiązywanie równań różniczkowych jest rzeczą pożyteczną.’

Tak się składa, że ogromna większość praw fizyki sformułowana jest jako równania różniczkowe. Pierwsze z brzegu przykłady to: Prawo Newtona $f = ma$, równania Maxwella, równanie Schrödingera. Aby wydobyć fizyczną treść z równania, trzeba je umieć rozwiązać lub zbadać jego własności. Niniejszy rozdział jest wstępem do tego.

2 Ogólnikowa definicja

Niech F będzie funkcją $n + 1$ zmiennych, zaś y niech będzie funkcją *jednej* zmiennej x . Równanie

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

(gdzie $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$) nazywamy *równaniem różniczkowym zwyczajnym*. Każdą funkcję $y(x)$, która po wstawieniu do tego równania spełnia je tożsamościowo, nazywamy *rozwiązaniem równania różniczkowego*.

Tak sformułowany problem jest bardzo ogólny i bardzo trudny – w tej chwili dalecy jesteśmy od jego pełnego rozwiązania. Będziemy zaczynać od szczególnych przypadków, o których da się więcej powiedzieć.

3 Garść przykładów

Zanim podamy formalne definicje, podamy najspierw garść przykładów, które Czytelnik najprawdopodobniej już zna, nie będąc może jedynie obznajomionym z terminologią.

1. (a) Znaleźć funkcję $x(t)$, spełniającą równanie:

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \quad (1)$$

gdzie $f(t)$ jest zadaną funkcją. Rozwiązanie problemu każdy umie znaleźć (a przynajmniej powinien):

$$x(t) = \int f(t)dt + C, \quad C - \text{dowolna stała.} \quad (2)$$

W języku najbardziej chyba typowego przykładu z fizyki: Rozpatrujemy ruch punktu materialnego po prostej. Niech $f(t)$ jest prędkością punktu w chwili t . Szukamy zależności drogi od czasu.

- (b) Możemy też mieć do czynienia z nieco innym postawieniem problemu: Znaleźć rozwiązanie zagadnienia (1) zakładając, że $x(t_0) = x_0$ – dane. (W języku fizyki, zakładamy, że w danej chwili czasu t_0 punkt materialny znajduje się w określonym położeniu $x_0 = x(t_0)$). Wtedy rozwiązanie (2) jest już *jednoznaczne* – stała C przybiera określoną wartość.

2. *Rozpad promieniotwórczy.* Szybkość rozpadu promieniotwórczego próbki jest proporcjonalna do jej masy. Można więc zapisać:

$$\frac{dm}{dt} = -km; \quad (3)$$

(gdzie k jest dodatnią stałą); chcemy znaleźć zależność masy próbki od czasu.

Rozważmy ogólniejszy problem: Znaleźć funkcję $x(t)$, spełniającą równanie:

$$\frac{dx}{dt} = g(x). \quad (4)$$

Tu wygodniej jest szukać nie $x(t)$, a funkcji odwrotnej $t(x)$. Pamiętając, że pochodna funkcji odwrotnej $\frac{dt}{dx}$ wyraża się przez pochodną $\frac{dx}{dt}$ wzorem: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$, mamy:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{g(x)}, \quad (5)$$

co daje

$$t(x) = \int \frac{1}{g(x)} dx + C, \quad C - \text{dowolna stała}. \quad (6)$$

(Powyższą procedurę można zapamiętać za pomocą sztuczki mnemotechnicznej, polegającej na potraktowaniu lewej strony równania (4) jako ułamka i przekształceniu go do postaci: $dt = \frac{dx}{g(x)}$ i obłożeniu obu stron znakiem całki, co daje (6). Ten sposób postępowania należy traktować WYŁĄCZNIE jako sztuczkę mnemotechniczną, bo pochodna *nie jest* ułamkiem, a całościowym wyrażeniem).

Rozwiązując w ten sposób równanie (3), mamy

$$t = - \int \frac{1}{km} dm = -\frac{1}{k} \ln m + C,$$

co przekształcamy do postaci

$$m(t) = e^C e^{-kt}$$

zatem masa próbki *wykładniczo* maleje w czasie.

Jest to *ogólne* rozwiązanie problemu. Gdy mamy do czynienia z konkretnym *warunkiem początkowym*, tzn. warunkiem, że masa próbki w danej chwili czasu (powiedzmy $t = 0$) jest równa m_0 , mamy

$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

3. Omawiane dotąd przykłady miały jedną cechę wspólną: Istniało *jednoznaczne* rozwiązanie równania z zadaniem warunkiem początkowym. Istnieją jednak sytuacje, w których jednoznaczność *nie ma* miejsca.

Rozważmy równanie:

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 0$.

Rozwiązanie ogólne równania jest proste do uzyskania:

$$t = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C,$$

skąd, uwzględniając warunek początkowy

$$x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ale też! Funkcja $x(t) = 0$ spełnia zarówno równanie (7) jak i warunek początkowy $x(0) = 0$. Rozwiązanie zatem *nie jest* jednoznaczne. Niedługo zobaczymy, przy jakich warunkach *istnienie i jednoznaczność* rozwiązania mają miejsce.

3.1 Algorytmy rozwiązywania niektórych równań pierwszego rzędu

(Prawie) najogólniejsza postać równania pierwszego rzędu to

$$y' = F(x, y) \tag{8}$$

gdzie F jest daną funkcją ciągłą. Szukamy funkcji $y(x)$, która spełnia równanie (8).

1. **Równanie o zmiennych rozdzielonych.** Nazywamy tak sytuację, gdy $F(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$, gdzie f, g – funkcje ciągłe. Wtedy równanie (8) przyjmuje postać

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Zapiszmy je w postaci:

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x).$$

Niech F, G będą funkcjami pierwotnymi do f i g odpowiednio (tzn. $F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$). Wtedy powyższe równanie można zapisać

$$(G(y(x)))' = F'(x)$$

co daje

$$G(y(x)) = F(x) + C;$$

rozwiązanie jest więc dane w postaci uwikłanej. Po odwróceniu G (jeśli się to da zrobić) mamy

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Przykł. Podajmy ogólne rozwiązanie równania

$$y' = \frac{e^{-x}}{y}; \quad \text{zakładamy, że } y > 0$$

Postępując jak powyżej, mamy

$$y \cdot y' = e^{-x} \quad \text{lub} \quad y \frac{dy}{dx} = e^{-x}, \quad \text{co daje}$$

$$\int y dy = \int e^{-x} dx,$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -e^{-x} + C, \quad \text{czyli} \quad y^2(x) = -2e^{-x} + C$$

i ostatecznie

$$y(x) = \sqrt{C - 2e^{-x}}.$$

Uwaga. Do klasy równań o zmiennych rozdzielonych należą dwa pierwsze przykłady z poprzedniej Subsection.

2. **Równanie jednorodne.** Nazywamy tak równanie (8), gdzie prawa strona jest funkcją zależącą tylko od $\frac{y}{x}$:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (9)$$

Rozwiązanie otrzymujemy podstawiając zamiast y nową zmienną u , zdefiniowaną jako

$$u = \frac{y}{x}$$

Mamy wtedy:

$$y(x) = u(x)x, \quad y'(x) = u'(x)x + u(x)$$

i wstawiając to do równania (9), otrzymujemy

$$xu' + u = F(u), \quad \text{co daje} \quad u' = \frac{F(u) - u}{x}$$

co jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Całkując je otrzymamy

$$\int \frac{du}{F(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (10)$$

Przykł. Rozwiążmy równanie:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$$

Podstawiając standardowo $y = ux$, otrzymamy:

$$u + xu' = u^2 - 2, \quad \text{tzn.} \quad u' = \frac{u^2 - u - 2}{x}$$

i całkując, otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c = \int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln \left(\sqrt[3]{\frac{u-2}{u+1}} \right),$$

i wracając do zmiennej y , dostajemy rozwiązanie w postaci

$$Cx^3 = \frac{y-2x}{y+x}.$$

bądź, gdybyśmy chcieli mieć rozwiązanie w postaci nieuwikłanej,

$$y = \frac{Cx^3 + 2}{1 - Cx}x.$$

3. **Równanie liniowe.** Nazywamy tak równanie

$$y' - p(x)y = b(x) \quad (11)$$

gdzie p, b – zadane funkcje. Gdy $b(x) \equiv 0$, to równanie powyższe nazywamy *jednorodnym*; w przeciwnym wypadku mówimy o równaniu *niejednorodnym*.

Uwaga. Sprawdza się natychmiastowo, że jeśli $y_1(t), y_2(t)$ – dwa rozwiązania równania *jednorodnego*, to ich suma też jest rozwiązaniem; ponadto, jeśli jakieś rozwiązanie pomnoży się przez stałą, to również otrzymuje się rozwiązanie. To pokazuje, że rozwiązania równania *jednorodnego* są *przestrzenią wektorową*. Jej wymiar jest równy 1 – co za chwilę zobaczymy.

Ogólny przypadek równania (11) – równania *niejednorodnego* – rozwiązuje się w dwóch etapach. Pierwszy z nich to rozwiązanie ogólne równania *jednorodnego*. Drugi, to uzyskanie jakiegoś (tzw. szczególnego) rozwiązania równania *niejednorodnego*. Ogólne rozwiązanie równania *niejednorodnego* będzie sumą powyższych dwu rozwiązań.

(a) Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (RORJ). Mamy

$$y' - p(x)y = 0,$$

co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Mamy

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y = \int p(x)dx + c,$$

i oznaczając: $\int p(x)dx = P(x)$ oraz $e^c = C$, mamy

$$y_{OJ} = Ce^{P(x)},$$

gdzie C – dowolna stała, a OJ – 'Ogólne Jednorodne'.

(b) Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (RSRN). Znajdowanie tego rozwiązania odbywa się za pomocą tzw. *metody uzmienniania stałej*. Polega ona na tym, iż *zakładamy*, że rozwiązanie równania niejednorodnego jest postaci $y_{SN} = C(x)e^{P(x)}$. Zakładając tę postać, wstawiamy ją do równania (11) i mamy

$$C'(x)e^{P(x)} + C(x)P'(x)e^{P(x)} - p(x)C(x)e^{P(x)} = b(x),$$

a że $P'(x) = p(x)$, to drugi i trzeci wyraz z lewej strony się kasują i dostajemy

$$C'(x)e^{P(x)} = b(x),$$

skąd

$$C(x) = \int b(x)e^{-P(x)}dx.$$

Można zapytać, dlaczego przy całkowaniu nie dopisaliśmy kolejnej dowolnej stałej? Otóż dlatego, że dopisanie tej stałej prowadziłyby do dodania do y_N wyrazu *proporcjonalnego do równania jednorodnego*, a więc nie prowadziłyby do rozwiązania ogólniejszego, niż już mamy.

Ostatecznie mamy wzór na rozwiązanie równania (11)

$$y(x) = y_{OJ} + y_{SN} = Ce^{P(x)} + \int b(x)e^{-P(x)}dx \quad (12)$$

gdzie C – dowolna stała.

Przykł. Znajdźmy ogólne rozwiązanie równania

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}. \quad (13)$$

• RORJ: Równanie jednorodne: $y' + \frac{1}{x}y = 0$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych. Mamy:

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \text{skąd} \quad \ln y = -\ln x + c \quad \text{co daje} \quad y_{OJ} = \frac{C}{x} \quad (\text{gdzie } C = e^c)$$

• • RSRN: Uzmienniamy stałą C tzn. przyjmujemy, że jest ona funkcją x . Mamy: $y_{SN} = \frac{C(x)}{x}$, co po wstawieniu do wyjściowego równania (13) daje, po kilku skróceniach: $C'(x) = e^x$, skąd $C(x) = e^x$; tak więc • • • RORN:

$$y = \frac{C}{x} + \frac{e^x}{x}.$$

3.2 Równania 2. rzędu: Obniżenie rzędu równania – parę sztuczek

3.2.1

$$y'' = F(x)$$

Tu recepta jest prosta: Pamiętając, że $y'' = (y')'$, mamy po jednostronnym scałkowaniu:

$$y' = \tilde{F}(x) + C_1,$$

gdzie: $\tilde{F}(x) = \int F(x)dx$, zaś C_1 jest dowolną stałą.

Całkujemy jeszcze raz i dostajemy już rozwiązanie:

$$y = \tilde{\tilde{F}}(x) + C_1x + C_2,$$

gdzie: $\tilde{\tilde{F}}(x) = \int \tilde{F}(x)dx$, zaś C_2 jest drugą dowolną stałą.

Przykł. Ruch ze stałym przyspieszeniem a , np. spadek swobodny ciała w jednorodnym polu grawitacyjnym. Chcemy znaleźć zależność położenia od czasu $x(t)$. $x(t)$ spełnia równanie Newtona:

$$F = ma = mx'', \quad \text{skąd} \quad x'' = a.$$

Po jednokrotnym scałkowaniu:

$$x' = at + v_0$$

(stałą całkowania nazwaliśmy v_0), a po drugim

$$x \equiv x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

(stałą całkowania nazwaliśmy x_0). Te dwie stałe całkowania mają sens fizyczny *prędkości* oraz *położenia początkowego*: $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$.

3.2.2

$$y'' = F(y')$$

Podstawiamy $z = y'$ i mamy:

$$z' = F(z),$$

co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Gdy znajdziemy jego rozwiązanie sposobem znanym nam już, tzn. mamy funkcję $z(x, C)$ (C – stała całkowania), to dalej

$$y(x) = \int z(x)dx + C_2.$$

3.2.3

$$y'' = F(y)$$

Przykł. Obniżenie rzędu dla równania Newtona z siłą gradientową: $f = ma$, tzn.

$$mx'' = f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Po obustronnym pomnożeniu przez x' mamy:

$$\frac{1}{2}m((x')^2)' = -(U(x))', \quad \text{a po scałkowaniu} \quad \frac{1}{2}m(x')^2 = E - U(x)$$

gdzie E jest dowolną stałą. Jaki jest jej sens fizyczny? Po przeniesieniu $-U(x)$ na drugą stronę mamy

$$\frac{1}{2}m(x')^2 + U(x) = E$$

czyli stała C ma sens fizyczny *energii całkowitej*.

Otrzymaliśmy w ten sposób *równanie pierwszego rzędu*. Stąd po przekształceniu mamy:

$$x' = \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

co jest równaniem o rozdzielonych zmiennych. Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\int dt = t - t_0 = \int \sqrt{\frac{m}{2(E - U(x))}} dx.$$

• Oscylator harmoniczny

•• Wahadło bez przybliżenia małych drgań i ELIPTYSIE.

3.3 Równania wyższych rzędów

Okazuje się, że równanie n -tego rzędu

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (14)$$

można sprowadzić do układu równań pierwszego rzędu.

Wprowadźmy bowiem pomocnicze funkcje:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Wtedy równanie (14) można zapisać w postaci układu równań:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ F(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Przykł. Równanie ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem zapisane jako układ 2 równań I rzędu.

Pole wektorowe.

Interpretacje graficzne układów równań w \mathbb{R}^n : $\dot{x} = f(x)$ ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$), oraz $\dot{x} = F(x, t)$ ($F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$).

4 Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności – sformułowanie i ilustracja

4.1 Wstęp ideowy

Rozważamy tu układy równań różniczkowych pierwszego rzędu; zgodnie z otrzymanym dopiero co wynikiem, dowolne równanie n -tego stopnia możemy wyrazić jako układ n równań pierwszego rzędu.

Zadamy określony warunek początkowy i zapytamy, kiedy układ ma jednoznaczne rozwiązanie.

Odpowiedź dana jest przez twierdzenie (Cauchy'ego)¹ o istnieniu i jednoznaczności dla takich układów.

Zanim sformułujemy to twierdzenie, podamy najspierw wstęp ideowy, a potem przygarść niezbędnych definicji.

Niech $x \equiv x(t) \in \mathbb{R}^n$. Będziemy rozważać układ równań różniczkowych z warunkiem początkowym:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad - \text{dane.} \quad (16)$$

Def. *Odwzorowaniem Picarda* nazywamy odwzorowanie A , przeprowadzające funkcję $\varphi : \mathbb{R} \ni t \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$ w funkcję $A\varphi : \mathbb{R} \ni t \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, gdzie

$$(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\varphi(\tau), \tau) d\tau. \quad (17)$$

Okazuje się, że φ jest rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym $\varphi(t_0) = x_0$

$$\iff$$

φ jest punktem stałym odwzorowania A , tzn.

$$\varphi = A\varphi \quad (18)$$

Dow. jest natychmiastowy, jeśli się nie przejmujemy 'drobiazgami', tzn. porządnym określeniem używanych obiektów oraz ich istnieniem. (*Na razie* się tym nie przejmujemy, ale zrobimy to później):

Jeśli zróżniczkujemy $(A\varphi)(t)$, to dostaniemy $F(\varphi(t), t)$ (z podstawowego tw. rachunku różniczkowego i całkowego); mamy więc: $\frac{d(A\varphi)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi(t), t)$. Ponadto $(A\varphi)(t_0) = x_0$, więc spełniony jest też warunek początkowy.

Koniec dowodu – ale tylko formalnego!

Uwaga. W ten sposób, zamieniliśmy równanie *różniczkowe* (16): Tu szukana funkcja występuje jako *pochodna* na równanie *całkowe* (18) (tu szukana funkcja występuje pod znakiem całki).

Jak znaleźć punkt stały odwzorowania A ?

Okazuje się, że – przy pewnych założeniach, o których dalej – można to zrobić *iteracyjnie*: Wybierzmy jakąś funkcję ϕ_0 . Działajmy na nią kolejnymi iteracjami operatora A , otrzymując w ten sposób ciąg:

$$\phi_1 = A\phi_0; \quad \phi_2 = A\phi_1 = A^2\phi_0; \quad \phi_3 = A\phi_2 = A^3\phi_0; \quad \dots \text{itd.}$$

Okazuje się, że *graniczna funkcja*

$$\phi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$$

jest punktem stałym odwzorowania A , tzn. mamy:

$$A\phi_\infty = \phi_\infty.$$

¹Zwane też tw. Picarda lub Picarda–Cauchy'ego

Dowód będzie za jakiś czas, a na razie przykład: Skonstruujemy rozwiązanie układu (16) przez kolejne iteracje odwzorowania A .

Przykł. Znajdźmy rozwiązanie równania różniczkowego z warunkiem początkowym:

$$\frac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) \equiv x_0 = 1 \quad (19)$$

metodą Picarda.

Tu nasza funkcja F , występująca we wzorze ogólnym (16), jest równa: $F(x, t) = x + t$.

Musimy wziąć jakąś funkcję jako 'punkt startowy' i następnie działać na nią kolejnymi potęgami odwzorowania Picarda. Weźmy dla prostoty jako punkt startowy *funkcję stałą* $x_0(t) = 1$:

$$x_0(t) = 1;$$

konkretna postać odwzorowania Picarda ma tu postać:

$$x_n(t) = Ax_{n-1}(t) = x_0 + \int_0^t F(x_{n-1}(\tau), \tau) d\tau = x_0 + \int_0^t (\tau + x_{n-1}(\tau)) d\tau.$$

Liczymy kolejno:

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2;$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{1}{2!} \tau^2) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3;$$

$$x_3(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{2}{2!} \tau^2 + \frac{1}{3!} \tau^3) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!} t^2 + \frac{2}{3!} t^3 + \frac{1}{4!} t^4;$$

$$x_4(t) = 1 + \int_0^t (\tau + 1 + \tau + \frac{2}{2!} \tau^2 + \frac{2}{3!} \tau^3 + \frac{1}{4!} \tau^4) d\tau = 1 + t + \frac{2}{2!} t^2 + \frac{2}{3!} t^3 + \frac{2}{4!} t^4 + \frac{1}{5!} t^5;$$

itd. Z postaci kilku pierwszych wyrazów ciągu funkcji $x(t)$ łatwo chyba już domyślić się postaci n -tego elementu:

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{2}{3!} t^3 + \frac{2}{4!} t^4 + \dots + \frac{2}{n!} t^n + \frac{1}{(n+1)!} t^{(n+1)}$$

w czym można rozpoznać rozwinięcie w szereg funkcji

$$x(t) = 2e^t - 1 - t.$$

Czytelnik zechce się przekonać, że powyższa funkcja jest rozwiązaniem problemu (19).

4.2 Punkty stałe, odwzorowania zwięzające etc.

Oswójmy się na razie z punktami stałymi. Mamy ogólne odwzorowanie $F : X \rightarrow X$, odnośnie X zażądajmy tu na razie tylko, aby X było *przestrzenią macryczną*. Załóżmy, że F ma punkt stały $x^* \in X$, tzn. $F(x^*) = x^*$. Zapytajmy, jakie własności musi mieć F , aby punkt stały x^* był granicą ciągu rekurencyjnego $x_n = F^n x_0$ (x_0 - jakiś punkt startowy dla ciągu rekurencyjnego).

Najsampierw weźmy $X = \mathbb{R}$, ze zwykłą metryką: $d(x, y) = |x - y|$.

Weźmy trzy przykłady.

1. $F(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Punkt stały: $F(x^*) = x^*$ otrzymujemy przez rozwiązanie równania $\frac{1}{2}x^* + 1 = x^*$ czyli $\frac{1}{2}x^* = 1$, co daje $x^* = 2$.

A teraz wybierzmy jakiś punkt startowy, np. $x_0 = 5$ i liczymy kolejne iteracje. Mamy:

$$x_1 = \frac{7}{2} = 2 + \frac{3}{2}; \quad x_2 = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}; \quad x_3 = \frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}; \quad x_4 = \frac{35}{16} = 2 + \frac{3}{16}; \dots$$

Łatwo można wyprowadzić wzór na n -ty wyraz:

$$x_n = 2 + \frac{3}{2^n},$$

tak więc widać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Warto całą sytuację zilustrować graficznie **RYS**.

2. A teraz zobaczmy: $F(x) = 2x - 2$. Widać (sprawdzamy od razu), że punkt stały $x^* = 2$. Popatrzmy, jak wyglądają kolejne iteracje odwzorowania F **RYS**. Widać, że tu kolejne iteracje F *oddalają* od punktu stałego. Tu więc metoda znajdowania punktu stałego przez stosowanie kolejnych przybliżeń *nie działa*.

Rozpatrzmy teraz ogólne odwzorowanie, określone przez funkcję $F(x) = ax + b$. Po chwili zastanowienia widać, jaki warunek musi być spełniony, aby ciąg x_n dążył do punktu stałego. Z powyższej konstrukcji 'schodków' widać, że *Trzeba, aby* $0 < F' < 1$. (Okazuje się, że można go rozluźnić do warunku: $|F'| < 1$. Gdy $F' < 0$, scenariusz dążenia do punktu stałego jest ciekawszy – niech zainteresowany Czytelnik wykona analogon konstrukcji 'schodków' w tym przypadku).

3. $F(x) = +\sqrt{2+x}$. **RYS**. Tu można znaleźć rozwiązanie równania $F(x) = x$ – sprawdza się od razu, że punktem stałym jest $x^* = 2$. Z ilustracji (**RYS.**) wynika, że kolejne iteracje F prowadzą do punktu stałego. Weźmy jako punkt startowy np. $x_0 = 10$. Kalkulując bezpośrednio, otrzymamy kolejne wartości ciągu x_n :

$$x_1 = 3.4641; \quad x_2 = 2.3375; \quad x_3 = 2.0826; \quad x_4 = 2.0205; \quad x_5 = 2.0051; \quad x_6 = 2.0012 \dots$$

4. $F(x) = \ln(5+x)$. **RYS**. Tu już nie napiszemy jawnego rozwiązania równania $F(x) = x$, przynajmniej przy użyciu znanych nam funkcji. Metodą kolejnych iteracji możemy znaleźć rozwiązanie z dowolną dokładnością: Biorąc np. $x_0 = 10$, dostajemy:

$$x_1 = 2.7080; \quad x_2 = 2.0423; \quad x_3 = 1.9519; \quad x_4 = 1.9390; \quad x_5 = 1.9371; \quad x_6 = 1.9368 \dots$$

z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku jest to już granica – pierwszych pięć cyfr nie zmienia się już przy dalszych iteracjach.

Podsumujmy nasze obserwacje: *Punkt stały x^* odwzorowania F jest granicą ciągu rekurencyjnego $x_n = F^n x_0$: $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, jeśli odwzorowanie F spełnia warunek: $|F'(x)| < 1$, a tak będzie wtedy, gdy F jest zblizajace, tzn. $|F(x) - F(y)| < |x - y|$.*

Uwaga. Opisaną wyżej technikę znajdowania punktu stałego można wykorzystać m.in. do znajdowania rozwiązań równania $f(x) = 0$. Zauważmy, że to równanie można przepisać jako: $f(x) + x = x$; definiując teraz: $F(x) = f(x) + x$ i zakładając, że $|F'(x)| < 1$, mamy gwarancję, że możemy iteracyjnie znaleźć rozwiązanie równania $f(x) = 0$ jako punkt stały odwzorowania F . Obserwacja ta jest podstawą kilku metod numerycznych znajdowania rozwiązań równań postaci $f(x) = 0$.

4.3 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Gwarancję znalezienia punktu stałego odwzorowania poprzez granicę ciągu iteracji daje

Tw. (Banacha). Niech (X, d) – zupełna przestrzeń metryczna.² Niech $T : X \rightarrow X$. Załóżmy, że odwzorowanie T jest *zblizajacym*, tzn. dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi:

$$d(T(x), T(y)) \leq C d(x, y), \quad \text{gdzie } 0 \leq C < 1. \quad (20)$$

Wtedy T ma dokładnie jeden punkt stały x^* (tzn. zachodzi: $T(x^*) = x^*$). x^* jest granicą ciągu $x_n = T^n x_0$, gdzie x_0 jest dowolnym punktem z X .

Uwaga. Jeśli odwzorowanie T ma własność (20), to mówimy, że jest odwzorowaniem *zblizajacym* (lub *zwezajacym*), albo że jest *kontrakcją*.

Dow. Pokażemy, że ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy’ego, tzn.

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall m, n > M : d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Oszacujmy odległość $d(x_n, x_m)$ dla odwzorowania zblizajacym. Załóżmy przy tym, że $n > m$, tzn. $n = m + k$, gdzie $k > 0$:

$$d(x_n, x_m) = d(T^m x_k, T^m x_0) \leq C^m d(x_k, x_0)$$

Skorzystaliśmy tutaj z własności (20) odwzorowania zblizajacym.

Przypomnijmy sobie teraz *nierówność trójkąta* dla metryki:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Biorąc tu: $x = x_k$, $y = x_0$, $z = x_{k-1}$, mamy:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_0) &\leq d(x_k, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_0) = d(T^k x_0, T^{k-1} x_0) + d(x_{k-1}, x_0) \\ &= C^{k-1} d(x_1, x_0) + d(x_{k-1}, x_0); \end{aligned}$$

w ostatniej równości znów skorzystaliśmy z własności (20).

Do członu $d(x_{k-1}, x_0)$ znów stosujemy tę sztuczkę, co wyżej, i mamy:

$$d(x_{k-1}, x_0) \leq C^{k-2} d(x_1, x_0) + d(x_{k-2}, x_0)$$

i możemy napisać:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_0) &\leq C^{k-1} d(x_1, x_0) + d(x_{k-1}, x_0) \leq C^{k-1} d(x_1, x_0) + C^{k-2} d(x_1, x_0) + d(x_{k-2}, x_0) \leq \dots \\ &\leq (C^{k-1} + C^{k-2} + \dots + C + 1) d(x_1, x_0) = \frac{1 - C^k}{1 - C} d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{1}{1 - C} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z wzorów na sumę częściową i nieskończoną szeregu geometrycznego.

Dla danego $\epsilon > 0$, niech teraz M będzie liczbą taką, że

$$\frac{C^M}{1 - C} d(x_1, x_0) < \epsilon.$$

²Dla przypomnienia: X jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy’ego elementów z X ma granicę należącą do X . Pamiętamy np. (a przynajmniej było to w I semestrze), że \mathbb{Q} nie jest zupełna, a \mathbb{R} jest zupełna.

Widzimy, że mamy wtedy spełniony warunek Cauchy'ego dla ciągu $\{x_n\}$, tzn. że ciąg ten jest zbieżny.

Jego granica jest punktem stałym odwzorowania T . Mamy bowiem:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq C^n d(x_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

a z drugiej strony, ponieważ T jest *ciągłe* (co wynika z własności, że T jest zbijające), oraz, ponieważ metryka jest funkcją ciągłą swoich argumentów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(T(x_n), x_n) = d(\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = d(T(x^*), x^*) = 0,$$

czyli $T(x^*) = x^*$.

Jeszcze jednoznaczność x^* . Załóżmy, że T ma dwa punkty stałe: x_1^* oraz x_2^* , tzn. mamy: $T(x_1^*) = x_1^*$, $T(x_2^*) = x_2^*$. Zatem:

$$d(T(x_1^*), T(x_2^*)) = d(x_1^*, x_2^*).$$

Z drugiej strony, ponieważ T jest zbijające, to

$$d(T(x_1^*), T(x_2^*)) \leq C d(x_1^*, x_2^*) < d(x_1^*, x_2^*);$$

otrzymujemy zatem *sprzeczność*, CHYBA ŻE $x_1^* = x_2^*$; wtedy wszystkie odległości powyżej są zerami. Mamy więc: $x_1^* = x_2^*$.

CBDO

4.4 Przy pewnych warunkach odwz. Picarda jest zwięzające

4.4.1 Gdzie działa odwz. Picarda

Powiemy teraz nieco – ale tylko nieco – o *przestrzeni* w której działa odwz. Picarda.

Pamiętamy, że odwzorowanie Picarda A przyporządkowuje funkcji $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ inną funkcję $(A\phi)(t) \in \mathbb{R}^n$.

Podamy najpierw definicję przestrzeni odwzorowań.

Def. Załóżmy, że rozpatrujemy \mathcal{C} – zbiór *funkcji ciągłych* określonych na odcinku $[a, b]$ o wartościach wektorowych $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. (Gdy $n = 1$, to tym zbiorem jest przestrzeń $C[a, b]$). Na zbiorze \mathcal{C} wprowadzamy metrykę ρ : Dla funkcji $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ definiujemy ich odległość jako

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{t \in [a, b]} \|f_1(t) - f_2(t)\|.$$

Tw. Przestrzeń (\mathcal{C}, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną.

Dow. (częściowy). Pierwszą część, tzn. że (\mathcal{C}, ρ) jest przestrzenią metryczną, sprawdza się nietrudno. Pierwsze dwa aksjomaty metryki są spełnione w oczywisty sposób, zaś nierówność trójkąta wynika z nierówności trójkąta dla normy i własności sup:

$$\begin{aligned} \rho(f_1, f_2) &= \sup_{t \in [a, b]} \|f_1(t) - f_2(t)\| = \sup_{t \in [a, b]} \|f_1(t) - f_3(t) + f_3(t) - f_2(t)\| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} (\|f_1(t) - f_3(t)\| + \|f_3(t) - f_2(t)\|) \leq \sup_{t \in [a, b]} \|f_1(t) - f_3(t)\| + \sup_{t \in [a, b]} \|f_3(t) - f_2(t)\| \end{aligned}$$

$$= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_3, f_2).$$

Druga część, tzn. sprawdzenie zupełności przestrzeni \mathcal{C} , wymaga szczegółów technicznych, którymi nie dysponujemy (tzn. pojęcia i własności *zbieżności jednostajnej*) i tę część pominiemy.

(częściowo **cbdo**)

Przestrzeń, w której działa odwzorowanie Picarda, jest przestrzenią \mathcal{C} , z pewnymi dodatkowymi warunkami, których teraz nie wypiszemy.

Wypiszemy za to warunek gwarantujący, że odwzorowanie A będzie zblizające. Wtedy dowód twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego sprowadzi się do zaaplikowania tw. Banacha o punkcie stałym do odwzorowania A .

Będziemy jeszcze do tego potrzebowali definicji.

Def. Niech (M_1, ρ_1) , (M_2, ρ_2) – przestrzenie metryczne. Niech G – odwzorowanie między nimi: $G : M_1 \rightarrow M_2$. Niech $L \in \mathbb{R}_+$. Mówimy, że G spełnia *warunek Lipschitza* ze stałą L , jeśli powiększa ono odległość między dowolnymi dwoma punktami należącymi do M_1 nie więcej niż L razy:

$$\forall_{x,y \in M_1} \rho_2(Gx, Gy) \leq L\rho_1(x, y).$$

Uwaga. Jeśli $(M_1, \rho_1) = (M_2, \rho_2)$, zaś stała $L < 1$, to takie odwzorowanie jest zblizające.

Przykłady.

1. Niech $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ ze standardową metryką. Odwzorowanie $G(x) = ax + b$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = a$.
2. Niech $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ ze standardową metryką. Odwzorowanie $G(x) = x^2$ *nie* spełnia warunku Lipschitza – odległość $x_1^2 - x_2^2$ może być dowolnie duża dla $x_1 - x_2 = 1$.
3. Niech $M_1 = [-1, 1]$, $M_2 = [0, 1]$ ze zwykłą metryką. Odwzorowanie $G(x) = x^2$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = 2$.
4. Ogólnie, jeśli G ma *ograniczoną pochodną*, to spełnia warunek Lipschitza. Pokazaliśmy to przy okazji dowodu tw. o istnieniu odwzorowania odwrotnego (str. 5 części 12 notatek). Ale odwzorowanie może nie być różniczkowalne, a mimo to spełniać warunek Lipschitza.
5. Niech $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ ze standardową metryką. Odwzorowanie $G(x) = \sqrt[3]{x}$ *nie* spełnia warunku Lipschitza (biorąc $x_1 = 0$, iloraz $\frac{|G(x_2) - G(x_1)|}{|x_2 - x_1|}$ może być dowolnie duży).

4.4.2 Kiedy odwz. Picarda jest zwężające

Spójrzmy znów na układ (16). Okazuje się, że:

1. jeśli odcinek czasu, na którym rozpatrujemy ewolucję daną przez układ (16) jest mały, tzn. rozpatrujemy wartości t spełniające: $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. $\epsilon > 0$;
2. prawa strona układu (16) jest różniczkowalna w sposób ciągły (co można zastąpić przez słabsze założenie, iż spełnia ona *warunek Lipschitza*,

to gwarantuje już to, że odwz. Picarda będzie zwężające.

Tw. Jeśli wartość ϵ jest dostatecznie mała, to odwzorowanie Picarda jest zwężające.

Dow.

nie będzie. Nie jest on bardzo trudny, ale znów wymaga technicznych narzędzi: pojęcia i własności zbieżności jednostajnej.

4.5 Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania

Tw. (*Cauchy'ego³ o lokalnym istnieniu i jednoznaczności rozwiązania układu równań różniczkowych I. rzędu.*)

Rozważmy układ równań różniczkowych z warunkiem początkowym (16). Niech prawa strona F będzie różniczkowalna w sposób ciągły w otoczeniu punktu (t_0, x_0) . (co można zastąpić przez słabsze założenie, iż spełnia ona *warunek Lipschitza* Wówczas istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu (16).

Komentarze – uwagi.

1. Gdy prawa strona układu (16) nie spełnia warunku Lipschitza, to jednoznaczność może nie mieć miejsca – przekonaliśmy się o tym na przykładzie.
2. Dla ogólnych (nieliniowych) równań, rozwiązanie może nie istnieć dla dowolnych t . Jako prosty przykład weźmy $n = 1$ i równanie:

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1.$$

Rozwiązanie znajdujemy prosto:

$$\frac{dx}{x^2} = dt, \quad \implies -\frac{1}{x} = t + C.$$

Stałą C znajdujemy z warunku początkowego: $x(0) = 1 \implies C = -1$. Mamy więc:

$$x(t) = -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t}.$$

Łatwo to rozwiązanie naszkicować – jest to fragment *hiperboli*. Rozwiązanie istnieje dla $t < t^* = 1$.

3. Powyższe twierdzenie można wzmocnić: Okazuje się, że jednoznaczne rozwiązanie istnieje również dla warunku początkowego dostatecznie bliskiego x_0 (tzn. jeśli $x(t_0) = y_0$, oraz $\|y_0 - x_0\|$ jest dostatecznie małe, to na odcinku czasu $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie z warunkiem początkowym $x(t_0) = y_0$).

Stąd widać, że:

4. Z punktu x_0 można pójść w n liniowo niezależnych kierunkach. Tak więc, *rozwiązanie układu n równań I. rzędu zależy od n dowolnych stałych.*

Ponadto

5. Rozwiązanie to zależy przy tym od punktu początkowego w sposób ciągły.

Zainteresowany Czytelnik znajdzie dowody np. w książce Arnolda, 'Równania różniczkowe zwyczajne', rozdz. 4, lub F. Leja, 'Rachunek różniczkowy i całkowy', Dodatek.

³Zwane też tw. Picarda lub Picarda–Cauchy'ego

5 Równania i układy liniowe

Def. *Układem równań liniowych* nazywamy układ (??) z prawą częścią zależącą *liniowo* od x :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (21)$$

Tu $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ jest macierzą $n \times n$. Zakładamy, że wszystkie elementy macierzy $A(t)$ oraz wektora niejednorodności $b(t)$ zależą w sposób *ciągły* od t dla $t \in [a, b]$ (jakiś odcinek).

Uwaga (terminologiczna). Analogicznie jak w przypadku równania I rzędu, układ (22) nazywamy *niejednorodnym*, gdy $b(t) \equiv 0$, oraz *jednorodnym*, gdy $b(t) \not\equiv 0$.

I takż podobnie jak w przypadku równania I rzędu: Jeśli $x_1(t), x_2(t)$ są dwoma rozwiązaniami układu *jednorodnego*, to ich suma i – ogólniej – ich dowolna liniowa kombinacja też jest rozwiązaniem. Tak więc rozwiązania układu jednorodnego mają strukturę przestrzeni wektorowej.

Zapytajmy teraz, jak wygląda sprawa istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla układów równań liniowych. W celu zbadania tej sytuacji zauważmy najspierw, że dla układów równań liniowych warunek Lipschitza *jest spełniony*:

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| = \|A(t)x + b(t) - A(t)x' - b(t)\| = \|A(t)(x - x')\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x - x'\|.$$

Funkcja $t \rightarrow \|A(t)\|$ jest *ciągła*. Oznaczając

$$L = \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\|$$

widzimy, że jest spełniony warunek Lipschitza ze stałą L . Ponieważ warunek Lipschitza jest spełniony, to istnieje lokalnie jednoznaczne rozwiązanie.

Ale dzięki temu, że układ (22) jest *liniowy*, można o rozwiązaniu podać znacznie dokładniejsze informacje, niż w ogólnym przypadku. Dowody pominiemy, natomiast stwierdzenie wypiszemy:

Stw. Rozważmy układ równań liniowych (22), gdzie $A(t)$ jest ograniczona:

$$\forall t > t_0 : \|A(t)\| \leq M.$$

Wtedy układ (22) ma rozwiązanie dla dowolnych $t > t_0$.

6 Układy liniowe o stałych współczynnikach

Ogólny układ równań (22) jest trudny do rozwiązania. Schematy rozwiązywania znamy dla szczególnych przypadków macierzy $A(t)$, i nawet te szczególne przypadki tworzą bogatą teorię. Np. rozwiązania układów 2×2 z macierzami specjalnej postaci są równoważne *funkcjom specjalnym* (wielomiany i funkcje Legendre'a, Hermite'a, Legendre'a, funkcje Bessela, hipergeometryczna, ... Zainteresowany Czytelnik dowie się więcej o nich np. na wykładzie dla II roku: 'Funkcje specjalne', lub np. z książki E.T. Whittaker, G. Watson, 'Elementy analizy współczesnej', t. II). Ale dla ogólnej postaci układu (22) algorytmu rozwiązywania nie znamy.

Ważną klasą układów równań liniowych, dla których *istnieje* ogólny algorytm rozwiązywania, są *układy o stałych współczynnikach*, tzn. układy (22), dla których macierz A *nie zależy od czasu*.

Rozpatrujemy więc:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + b(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (22)$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

6.1 Układy jednorodne

Zajmijmy się najspierw układem *jednorodnym*, tzn. takim, że $b(t) \equiv 0$:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (23)$$

Okazuje się, że rozwiązanie powyższego układu łatwo podać, a mianowicie mamy:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (24)$$

Sprawdźmy to. Pamiętamy, jak się definiuje funkcję analityczną – w naszym przypadku *exponens* – od argumentu macierzowego:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots$$

Pamiętając o tym, policzmy pochodną $\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}$, nie przejmując się takimi 'drobiazgami', jak możliwość różniczkowania szeregu wyraz za wyrazem oraz zbieżnością szeregu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)} &= \frac{d}{dt} \left(I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}A^3(t-t_0)^3 + \dots \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(A + A^2(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^3(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}A^4(t-t_0)^3 + \dots \right) = \dots \end{aligned}$$

... wyciągamy A przed nawias...

$$\dots = A \left(I + A(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}A^3(t-t_0)^3 + \dots \right) = Ae^{A(t-t_0)}.$$

Mamy więc:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}x_0 \\ &= Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t). \end{aligned}$$

Sprawdzamy też, że dla rozwiązania (24) spełniony jest warunek początkowy:

$$x(t)|_{t=t_0} = e^{A \cdot 0}x_0 = Ix_0 = x_0.$$

Zatem! Rozwiązanie układu (24) sprowadza się do obliczenia eksponensu od macierzy.

Na szczęście, takie rzeczy już robiliśmy.

Przypomnijmy więc sobie, jak to się robi, na przykładzie.

Przykł. Znaleźć rozwiązanie układu równań w \mathbb{R}^3 z warunkiem początkowym:

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 \equiv x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Dla rozwiązania problemu kluczowe jest znalezienie macierzy e^{At} i zadziaływanie nią na wektor warunku początkowego x_0 .

W części algebraicznej wykładu, nie tak dawno temu, liczyliśmy funkcje od macierzy. Najsampierw trzeba znaleźć wartości własne, co znajdujemy, przyrównując wielomian charakterystyczny do zera. Konkretnie⁴:

$$w_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

Otrzymujemy więc tu *dwie* wartości własne: $\lambda_1 = -1$ o krotności 2 oraz $\lambda_2 = 2$ o krotności 1.

Stąd otrzymujemy wartości własne macierzy At : Są to: $\lambda_1 = -t$ o krotności 2 oraz $\lambda_2 = 2t$ o krotności 1. Sytuacja wielokrotnych wartości własnych wymaga rozszerzenia technologii liczenia funkcji od macierzy. Przyjrzyjmy się jej jeszcze raz, biorąc ogólny przypadek funkcji analitycznej $f(x)$; chcemy obliczyć funkcję macierzy B rozmiaru $n \times n$, tzn. $f(B)$.

Podzielmy $f(x)$ przez wielomian charakterystyczny macierzy B :

$$f(x) = q(x) w_B(x) + r(x), \quad \deg r < n \quad (26)$$

Reszta ma postać:

$$r(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1};$$

chcemy wyznaczyć współczynniki wielomianu-reszty tzn. a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Znajdziemy je, wstawiając do równości (26) kolejne wartości własne macierzy B . Mamy w ten sposób:

$$f(\lambda_i) = r(\lambda_i).$$

Jeśli mamy dokładnie n wartości własnych, to nie ma kłopotów: Mamy układ n równań na n współczynników wielomianu r . Co jednak, gdy mamy *wielokrotne* wartości własne? Mamy wtedy mniej równań niż niewiadomych!

'Brakujące' równania możemy jednak otrzymać w następujący sposób. Załóżmy, że λ_k jest dwukrotną wartością własną. Weźmy równanie:

$$f(x) = q(x) w_B(x) + r(x)$$

i zróżniczkujemy je po x . Otrzymamy:

$$f'(x) = q'(x) w_B(x) + q(x) w'_B(x) + r'(x).$$

Wstawiając doń λ_k , mamy: $w_B(\lambda_k) = 0$ (bo λ_k jest pierwiastkiem $w_B(x)$) oraz $w'_B(\lambda_k) = 0$ (bo λ_k jest *dwukrotnym* pierwiastkiem $w_B(x)$). Zatem otrzymamy równość:

$$f'(\lambda_k) = r'(\lambda_k).$$

⁴Szampan i owoce...

Jest to brakujące równanie.

Gdy mamy więcej pierwiastków wielokrotnych, albo pierwiastek o większej krotności, postępujemy analogicznie. Łącznie zawsze możemy sprawić, że mamy tyle równań, ile jest niewiadomych współczynników.

Konkretyzując to dla naszej sytuacji i λ_1 jest dwukrotna, mamy: $r(x) = a + bx + cx^2$, oraz równania na współczynniki a, b, c :

$$\begin{cases} f(\lambda_1) &= a + b\lambda_1 + c\lambda_1^2 \\ f'(\lambda_1) &= 0 + b + 2c\lambda_1 \\ f(\lambda_2) &= a + b\lambda_2 + c\lambda_2^2 \end{cases}$$

W naszym przypadku $f(x) = e^x$, a macierzą której Exponens liczymy to At , i pamiętając, że $\lambda_1 = -t$ (dwukrotna) oraz $\lambda_2 = 2t$, mamy

$$\begin{cases} e^{-t} &= a - bt + ct^2 \\ e^{-t} &= 0 + b - 2ct \\ e^{2t} &= a + 2bt + 4ct^2 \end{cases}$$

To jest nasz układ równań. Rozwiązujemy go np. metodą wyznaczników:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & -2t \\ 1 & 2t & 4t^2 \end{vmatrix} = 4t^2 + 2t^2 + 0 - t^2 + 4t^2 + 0 = 9t^2;$$

$$W_a = \begin{vmatrix} e^{-t} & -t & t^2 \\ e^{-t} & 1 & -2t \\ e^{2t} & 2t & 4t^2 \end{vmatrix} = e^{-t}(4t^2 + 2t^3 + 4t^2 + 4t^3) + e^{2t}(2t^2 - t^2) = e^{-t}(8t^2 + 6t^3) + e^{2t}t^2;$$

$$W_b = \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} & t^2 \\ 0 & e^{-t} & -2t \\ 1 & e^{2t} & 4t^2 \end{vmatrix} = e^{-t}(4t^2 - 2t - t^2) + e^{2t}2t = e^{-t}(3t^2 - 2t) + 2te^{2t};$$

$$W_c = \begin{vmatrix} 1 & -t & e^{-t} \\ 0 & 1 & e^{-t} \\ 1 & 2t & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{-t}(-t - 1 - 2t) + e^{2t} = e^{-t}(-3t - 1) + e^{2t}$$

Stąd mamy:

$$a = \frac{1}{9}[(8 + 6t)e^{-t} + e^{2t}]; \quad bt = \frac{1}{9}[(3t - 2)e^{-t} + 2e^{2t}]; \quad ct^2 = \frac{1}{9}[(-3t - 1)e^{-t} + e^{2t}]. \quad (27)$$

Więc!! Mamy znaleziony Exponens od macierzy:

$$e^{At} = aI + Abt + A^2ct^2 \quad (28)$$

gdzie a, b, c są dane przez (27). Można wynik zapisać w postaci jednej macierzy, ale nie będziemy tego robić z braku motywacji.

Napiszmy teraz rozwiązanie spełniające warunek początkowy (25). Musimy w tym celu zadziałać macierzą e^{At} na wektor x_0 . Mamy:

$$Ix_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2x_0 = A(Ax_0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

stąd

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 = (aI + bAt + cA^2t^2)x_0 = \begin{bmatrix} -a + b - c \\ a - b + c \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} e^{-t}(-6t - 8 + 3t - 2 + 3t + 1) + e^{2t}(-1 + 2 - 1) \\ 1 - e^{-t}(-6t - 8 + 3t - 2 + 3t + 1) - e^{2t}(-1 + 2 - 1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

To jest nasze szukane rozwiązanie. Widać od razu, że spełnia ono warunek początkowy.

Uwagi.

1. Ogólna struktura rozwiązania jest następująca: Z każdą pojedynczą wartością własną λ_i pojawia się wyraz proporcjonalny do $e^{\lambda_i t}$, zaś z wielokrotną wartością własną λ_k o krotności n_k pojawiają się dodatkowo człony proporcjonalne do $te^{\lambda_k t}, t^2e^{\lambda_k t}, \dots, t^{n_k-1}e^{\lambda_k t}$. (W naszym przypadku akurat się one skasowały).
2. Wykorzystując szczególne postaci macierzy (np. w naszym przypadku była ona *symetryczna*), można rozwiązanie znaleźć szybciej i prościej. Zaprezentowana metoda – będąc nieco przydługą – jest uniwersalna i działa dla *każdej* macierzy.

6.2 Układy niejednorodne

7 Równania liniowe o stałych współczynnikach

7.1 Ogólne fakty

Nazywamy tak równanie spełniane przez szukaną funkcję $y(x)$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (30)$$

przy czym:

- Jeżeli $f(x) \equiv 0$ to równanie nazywamy *jednorodnym*,
- Jeżeli $f(x) \not\equiv 0$ to równanie nazywamy *niejednorodnym*.

Uwaga. Przy równaniu jednorodnym chodzi o to, aby funkcja $f(x)$ była równa zeru *tożsamościowo*, tzn. dla każdego x . W izolowanych punktach x funkcja $f(x)$ może być równa zeru, ale w takim przypadku równanie nazywamy jednorodnym, np. dla $f(x) = \sin x$.

Fakt 1. Zbiór rozwiązań równania *jednorodnego* (30) jest przestrzenią wektorową. Dla równania *jednorodnego* jest to przestrzeń *afiniczna*.

Fakt 2. Przestrzenie te są n -wymiarowe. Innymi słowy, ogólne rozwiązanie równania (30) zależy od n dowolnych stałych.

7.2 Równania jednorodne: algorytm

7.2.1 Jednokrotne wartości własne

7.2.2 A gdy się trafią zespolone...

... to nie należy ich się bać! Ale trzeba wtedy postępować trochę inaczej.

Najsamprzód przypomnijmy sobie (a jeśli go nie było, to od ręki pokażemy) fakt z algebry.

Fakt. Jeżeli pierwiastki wielomianu n -tego stopnia o współczynnikach rzeczywistych:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (31)$$

są *zespolone*, to występują one w parach zespolonych sprzężonych. Innymi słowy, jeśli $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ jest pierwiastkiem równania (31), to $\bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k$ również jest pierwiastkiem tego równania.

Dow.

To teraz napiszmy część rozwiązania równania ogólnego, odpowiadającą pierwiastkom $\lambda = \alpha + i\beta$ i $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Na pierwszy rzut oka nie ma tu nic podejrzanego: piszemy część rozwiązania równania ogólnego:

$$y_J = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\bar{\lambda} x} = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}). \quad (32)$$

Ale, na drugi rzut oka... jest tu *dwa razy za dużo* o 'stopni swobody'! Bo mamy nominalnie *dwie* stałe C_1 i C_2 ; ale mogą one przyjmować wartości *zespolone* (skoro są zespolone wyrazy wykładnicze). 2 stałe zespolone = 4 stałe rzeczywiste – dwa razy za dużo. Co tu jest nie tak?

Tu trzeci rzut oka (tzn. przyjrzenie się problemowi po raz trzeci). Gdybyśmy byli w dziedzinie *zespolonej*, to wszystko byłoby ok. Ale jesteśmy w dziedzinie *rzeczywistej*. Przyjmujemy, że w jakiejś chwili czasu rozwiązanie jest rzeczywiste, i musi ono być takie we wszystkich chwilach następnych. Jak się przekonamy – ten warunek (aby rozwiązanie było rzeczywiste) zapewnia już właściwą ilość parametrów rozwiązania ogólnego.

Przyjrzyjmy się temu bliżej. Załóżmy, że stałe C_1, C_2 w (32) są:

$$C_1 = a + bi, \quad C_2 = c + di.$$

Aby rozwiązanie (32) było rzeczywiste dla $x = 0$, musimy mieć:

$$(a + bi)e^0 + (c + di)e^0 \in \mathbb{R} \implies b + d = 0, \quad \text{tzn. } b = -d.$$

Weźmy jeszcze jakiś drugi warunek, np. aby pochodna rozwiązania była rzeczywista dla $x = 0$. To daje:

$$(i\beta)C_1 - (i\beta)C_2 = \beta(ia - b - ic + d) \in \mathbb{R} \implies a - c = 0, \quad \text{tzn. } a = c.$$

Mamy więc tylko *dwie* niezależne stałe; wybierzmy jako niezależne a oraz b (pamiętając, że są one *czysto rzeczywiste*).

Wstawiając te warunki do stałych C_1, C_2 , otrzymujemy:

$$y_J = e^{\alpha x} (C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x} ((a + ib)e^{i\beta x} + (a - ib)e^{-i\beta x})$$

$$= e^{\alpha x} \left[a(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) + ib(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \right] = e^{\alpha x} [2a \cos \beta x - 2b \sin \beta x];$$

widać, że ta postać rozwiązania jest *czysto rzeczywista!*

Podsumujmy: W przypadku zespolonych pierwiastków równania charakterystycznego, (tzn. $\lambda = \alpha \pm i\beta$), zamiast pisać RORJ w postaci:

$$e^{\alpha x} [C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}],$$

co *nie jest* postacią jawnie rzeczywistą, możemy przyjąć, że RORJ będzie sumą członów postaci:

$$e^{\alpha x} [A \cos \beta x + B \sin \beta x].$$

7.2.3 Wielokrotne wartości własne

7.3 Równania jednorodne: przykłady

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań:

1. $y'' + y' - 2y = 0$. ($y' = \frac{dy}{dt}$ itd.) Tworzymy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$, C_1, C_2 - dowolne stałe.
2. $y'' - 4y' = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{0 \cdot t} = C_1 e^{4t} + C_2$, C_1, C_2 - dowolne stałe.
3. $y'' + y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 1 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$, gdzie C_1, C_2 są *zespolone*. Rozwiązanie, zamiast w postaci wykładniczej, można równoważnie zapisać w postaci trygonometrycznej: $y = A \cos t + B \sin t$, A, B - dowolne stałe *rzeczywiste*.
4. $y'' + 6y' + 13y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = -3 - 4i$, $\lambda_2 = -3 + 4i$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = a_1 e^{(-3-4i)t} + a_2 e^{(-3+4i)t} = e^{-3t}(a_1 e^{-4it} + a_2 e^{4it})$, co równoważnie można zapisać w postaci trygonometrycznej: $y = e^{-3t}(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)$, C_1, C_2 - dowolne stałe.
5. $y'' - 2y' + y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ posiada jeden pierwiastek podwójny $\lambda = 1$, zatem rozwiązanie ogólne jest $y = (C_1 + C_2 t)e^t$.
6. **Oscylator harmoniczny tłumiony.** Zapiszmy równanie ruchu dla położenia $x(t)$ w postaci:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0.$$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ ma wyróżnik:

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega^2 = 2(\gamma^2 - \omega^2).$$

Zachowanie rozwiązania jest jakościowo różne w zależności od tego, czy $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.

- $\Delta > 0$, co odpowiada $\gamma > \omega$ ('silne tłumienie'). Mamy, dla pierwiastków równania charakterystycznego:

$$\lambda_+ = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0, \quad \lambda_- = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$

i rozwiązanie ogólne jest czysto wykładnicze:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_+ t} + C_2 e^{\lambda_- t}. \quad (33)$$

Ponieważ, jak widzieliśmy: $\lambda_+ < 0$, $\lambda_- < 0$, to oba człony w rozwiązaniu (33) będą 'gasły', a nie 'wybuchały' – rozwiązanie będzie wykładniczo 'spełzało' do położenia równowagi.

- $\Delta = 0$, co zachodzi w przypadku $\gamma = \omega$ ('tłumienie krytyczne'). Mamy jeden pierwiastek podwójny:

$$\lambda_* = -\gamma < 0,$$

i rozwiązanie ogólne ma postać:

$$x(t) = e^{\lambda_* t} (C_1 + C_2 t).$$

Gdy $t \rightarrow \infty$, oba wyrazy dążą do zera ('funkcja wykładnicza rośnie szybciej niż dowolny wielomian'). Rozwiązanie ma jakościowo podobny charakter co w poprzednim przypadku – 'spełza' ono do zera bez oscylacji, choć nieco wolniej.

- $\Delta < 0$, co odpowiada $\gamma < \omega$ ('słabe tłumienie'). Mamy: $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ i pierwiastki

$$\lambda_+ = -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < 0, \quad \lambda_- = -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < 0$$

(zwróćmy uwagę, że części rzeczywiste obu pierwiastków są mniejsze od zera). Ogólne rozwiązanie zapiszmy w postaci trygonometrycznej:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A \cos \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + B \sin \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t).$$

Rozwiązanie ma charakter tłumionych oscylacji, przy czym ich częstość $\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ jest *mniejsza* niż częstość ω w przypadku drgań nietłumionych. Częstość maleje do zera, gdy $\gamma \rightarrow \omega$.

7.4 Równania niejednorodne ze 'zgadywalnymi' niejednorodnościami: algorytm

7.5 Równania niejednorodne ze 'zgadywalnymi' niejednorodnościami: przykłady

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań:

1. $y'' + 4y = e^t$ (*). *i)* Znajdujemy Rozwiązanie Ogólne Równania Jednorodnego (RORJ), tzn. z prawą stroną równą zero: $y'' + 4y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 4 = 0$ ma pierwiastki: $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Wypisujemy od razu RORJ w postaci trygonometrycznej: RORJ = $C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$. *ii)* Znajdujemy Rozwiązanie Szczególne

Równania Niejednorodnego (RSRN) metodą 'zgadywania': Przewidujemy postać rozwiązania y_N jako: $y_N = Ae^t$, gdzie A jest stałą; po wstawieniu y_N do (*) dostajemy: $5Ae^t = e^t$, skąd $A = \frac{1}{5}$, zatem RSRN = $\frac{1}{5}e^t$. *iii)* Rozwiązanie Ogólne Równania Niejednorodnego (RSRN) jest sumą RORJ i RSRN: RORN = $C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t + \frac{1}{5}e^t$.

2. $y'' - 9y = (12t - 8)e^{-3t}$ (**). *i)* RORJ: $\lambda^2 - 9 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$. RORJ = $C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$. *ii)* RSRN: Niejednorodność jest 'zgadywalna', (bo jest postaci: wielomian razy funkcja wykładnicza). Wykładnik niejednorodności pokrywa się z jedną z wartości własnych, zatem RSRN przewidujemy w postaci: $y_N = t(A + Bt)e^{-3t}$, gdzie A i B są stałymi, które musimy wyznaczyć. Po wstawieniu y_N do (**) dostajemy: $(-2B - 6A - 12Bt)e^{-3t} = (12t - 8)e^{-3t}$, skąd, porównując współczynniki przy potęgach wielomianów po obu stronach, dostajemy: $-12Bt = 12t, 2B - 6A = 8$, skąd $B = -1, A = 1$. *iii)* RSRN = RORJ + RSRN = $C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + t(1 - t)e^{-3t}$.

3. Oscylator harmoniczny tłumiony z periodyczną siłą wymuszającą

Weźmy siłę wymuszającą w postaci $f(t) = \cos \alpha t$. Rozważmy najspierw

- oscylator *nietłumiony, nierezonansowy*. Mamy więc:

$$x'' + \omega^2 x = \cos \alpha t \quad (34)$$

i zakładamy $\alpha \neq \omega$.

Pamiętamy (a jeśli nie to liczymy od razu) RORJ:

$$x_J = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad A, B - \text{dowolne stałe}$$

Zakładamy RSRN w postaci:

$$y_N = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t,$$

i wstawiamy to do równania (34), dostając:

$$-a\alpha^2 \cos \alpha t - b\alpha^2 \sin \alpha t + \omega^2 a \cos \alpha t + b\omega^2 \sin \alpha t = \cos \alpha t$$

skąd mamy:

$$a(\omega^2 - \alpha^2) = 1, \quad b = 0$$

Mamy więc:

$$y_N = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} \cos \alpha t.$$

RORN jest sumą dwóch powyższych wyrażeń i ogólnie trudno znaleźć uproszczenie otrzymanego wyrażenia. W bardziej szczególnych przypadkach możemy się jednak o to pokusić. Weźmy $B = 0$ i $A = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2}$. Po pomnożeniu przez stałą mamy wtedy:

$$x(t) = \cos \omega t + \cos \alpha t.$$

Weźmy teraz przypadek *bliski rezonansowemu*, tzn. $\alpha \approx \omega$, co zapiszmy w postaci: $\alpha = \theta + \epsilon, \omega = \theta - \epsilon$, gdzie ϵ jest małe. Mamy:

$$x(t) = \cos \omega t + \cos \alpha t = \cos(\theta + \epsilon) + \cos(\theta - \epsilon)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta t \cos \epsilon t - \sin \theta t \sin \epsilon t + \cos \theta t \cos \epsilon t + \sin \theta t \sin \epsilon t \\ = 2 \cos \theta t \cos \epsilon t \end{aligned}$$

Pierwszy czynnik jest *szybkodzienny* w porównaniu z drugim; ich iloczyn ma charakter wolnych oscylacji o częstości ϵ 'wypełnionych' szybkimi o częstości θ **RYS**.. Sygnał radiowy ma podobny kształt: Szybkie oscylacje o częstości rzędu MHz (fale średnie) wypełniające powolne modulacje o częstości dźwiękowej (kHz).

- oscylator *nietłumiony, rezonansowy*, tzn. o częstości $\alpha = \omega$. RORJ mamy jak poprzednio, zaś RSRN zakładamy postaci:

$$y_N = t(a \cos \omega t + b \sin \omega t), \implies y_N'' = -2a\omega \sin \omega t + 2b\omega \cos \omega t - a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t;$$

po wstawieniu do równania niejednorodnego dostaniemy

$$y_N'' + \omega^2 y_N = -2a\omega \sin \omega t + 2b\omega \cos \omega t = \cos \omega t \implies a = 0, \quad b = \frac{1}{2\omega},$$

tzn.

$$y_N = \frac{1}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Są to *rosnące oscylacje RYS*.. Przykład każdy mógł zaobserwować rozhuśtując huśtawkę – najskuteczniej robi się to działając ruchami o częstości dostosowanej do częstości własnej huśtawki.

Fizycznie tak można robić do czasu, aż przybliżenie harmoniczne się załamie, czasem załamanie się przybliżenia harmonicznego odpowiada destrukcji układu. Np.: Most w Amiens; śpiewanie do szklanki z jej częstością własną, co zostało przesadnie, ale malowniczo ukazane w 'Błaszanym bębenu', czy w filmie 'Shrek I', scena z Fioną i niebieskim ptaszkiem.

- Oscylator tłumiony. Tu mamy:

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = \cos \alpha t \tag{35}$$

Wzory na RORJ już uzyskaliśmy uprzednio. Dla RSRN robimy standardowy Ansatz:

$$y_N = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t.$$

Przez wstawienie do równania jednorodnego uzyskamy równania na stałe a oraz b . Zanim to zrobimy, zastanówmy się nad postacią RORN. Nakładają się tu dwa czynniki: Pierwszy to odchodzące z RORJ gasnące oscylacje lub 'spływanie' do położenia równowagi, i drugi – periodyczne oscylacje o częstości α . Pierwsze ulegają wytłumieniu po czasie rzędu $\frac{1}{\gamma}$. Amplituda drugich się w czasie nie zmienia.

Wypiszemy zaraz y_N , pamiętając, że RORN = $y_J + y_N$, a charakter ruchu przeanalizujemy dokładniej dla dużych czasów (znacznie większych od $\frac{1}{\gamma}$). Wstawiamy, wyliczamy, aby wykładu nie przekształcić w środek nasenny, szczegóły rachunkowe pomijamy, i (**sprawdź, proszę, Czytelniku**) otrzymujemy, na współczynniki a oraz b z y_N :

$$a = \frac{\alpha^2 - \omega^2}{4\alpha^2\gamma^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}, \quad b = \frac{2\alpha\gamma}{4\alpha^2\gamma^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}$$

RSRN można zapisać jako *jedną* funkcję trygonometryczną, ale z *przesunięciem fazowym* i pomnożone przez *amplitudę* \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} \sin(\alpha t + \phi_0) = \mathcal{A}(\sin \alpha t \cos \phi_0 + \cos \alpha t \sin \phi_0) = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t,$$

skąd mamy na przesunięcie fazowe:

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha\gamma},$$

zaś na amplitudę:

$$\mathcal{A} = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha^2\gamma^2 + (\omega^2 - \alpha^2)^2}}.$$

Dla przypadku słabego tłumienia, see **RYS**. amplitudy jako funkcji częstości wymuszającej α . Widać, że amplituda ruchu wymuszonego jest największa dla *częstości bliskich częstości własnej*; tłumienie zapewnia, że amplituda pozostaje zawsze skończona.

7.6 Równania niejednorodne z ogólnymi niejednorodnościami

Sprowadzamy równanie n -tego rzędu do układu niejednorodnego pierwszego rzędu rozmiaru $n \times n$ i postępujemy tak jak to opisano w odpowiedniej Subsection.