# 1 Rozwiązywanie układów równań. Wyznaczniki.

## 1.1 Układ dwu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Niech będzie dany układ dwu równań liniowych z dwiema niewiadomymi $x, y$:

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} a_1x & + & b_1y & = & n_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & n_2 \end{array}\right. \tag{1}$$

Zdefiniujmy:

$$W = \left|\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right| = a_1b_2 - a_2b_1; \quad W_x = \left|\begin{array}{cc} n_1 & b_1 \\ n_2 & b_2 \end{array}\right| = n_1b_2 - n_2b_1; \quad W_y = \left|\begin{array}{cc} a_1 & n_1 \\ a_2 & n_2 \end{array}\right| = a_1n_2 - a_2n_1$$

Mogą zachodzić następujące sytuacje dotyczące rozwiązalności układu (1):

- Jeśli $W \neq 0$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = \frac{W_x}{W}$, $y = \frac{W_y}{W}$. Układ taki nazywamy *układem oznaczonym.*
  **Dow.** Wyprowadźmy powyższe wzory bezpośrednio: Pomnóżmy pierwsze z równań ... przez $a_2$ a drugie przez $a_1$...

  $$\left\{\begin{array}{lcrcl} a_2a_1x & + & a_2b_1y & = & a_2n_1 \\ a_1a_2x & + & a_1b_2y & = & a_1n_2 \end{array}\right.$$

  ...i odejmijmy stronami:

  $$a_1b_2y - a_2b_1y = a_1n_2 - a_2n_1,$$

  a to jest – patrząc na definicję wyznaczników – równe dokładnie

  $$Wy = W_y \Longrightarrow \quad y = \frac{W_y}{W}.$$

  Wyrażenie na $x$ wyprowadza się analogicznie.

- Jeśli $W = 0$ i co najmniej jeden z wyznaczników $W_x, W_y$ jest różny od zera, to układ nie posiada rozwiązań. Układ taki nazywamy *układem sprzecznym.*

- Jeśli $W = 0 = W_x = W_y$, to może się zdarzyć, że:

  – układ (1) posiada nieskończenie wiele rozwiązań; układ taki nazywamy *układem nieoznaczonym.* Przykł:

  $$\left\{\begin{array}{lcrcl} x & + & 2y & = & 3 \\ 2x & + & 4y & = & 6 \end{array}\right. ; \quad \text{rozw.}: \quad y - \text{dowolne}, \ x = 3 - 2y$$

  lub

  – układ jest sprzeczny. Przykł:

  $$\left\{\begin{array}{lcrcl} 0x & + & 0y & = & 1 \\ 0x & + & 0y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Tutaj same wyznaczniki nie dają dostatecznej informacji o rozwiązalności układu. Okazuje się, że potrzebne jest badanie tzw. *rzędu* układu. Powiemy o tym w dalszej części wykładu.

## 1.2 Układ dwu równań liniowych z trzema niewiadomymi

Niech będzie dany układ dwu równań liniowych z trzema niewiadomymi $x, y, z$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1y & = & n_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2y & = & n_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3y & = & n_3 \end{array}\right. \tag{2}$$

Zdefiniujmy znowu: *wyznacznik główny*:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1;$$

ostatnie wyrażenie łatwiej zapamiętać, stosując *regułę Sarrusa.*

$$W_x = \begin{vmatrix} n_1 & b_1 & c_1 \\ n_2 & b_2 & c_2 \\ n_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & n_1 & c_1 \\ a_2 & n_2 & c_2 \\ a_3 & n_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad W_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & n_2 \\ a_3 & b_3 & n_3 \end{vmatrix};$$

liczy się je analogicznie jak wyznacznik główny.

Mamy, podobnie jak w przypadku układu 2×2, następujące sytuacje dotyczące rozwiązywalności układu:

- Jeśli $W \neq 0$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Układ taki nazywamy *układem oznaczonym.*
  $$x = \frac{W_x}{W}, \quad y = \frac{W_y}{W}, \quad z = \frac{W_z}{W}.$$
  Uzasadnienie tym razem sobie podarujemy (można je wyprowadzić przez dodawanie stronami, podobnie jak w sytuacji $2 \times 2$, ale jest to dość pracochłonne i nudne; za 3 miesiące wyprowadzenie pojawi się w ogólniejszej postaci, dla układów $n \times n$.
- Jeśli $W = 0$ i co najmniej jeden z wyznaczników $W_x, W_y, W_z$ jest różny od zera, to układ (2) nie posiada rozwiązań. Układ taki nazywamy *układem sprzecznym.*
- Jeśli $W = 0 = W_x = W_y = W_z$, to może się zdarzyć, że:
  - układ (2) posiada nieskończenie wiele rozwiązań; lub
  - układ jest sprzeczny.

  Tutaj same wyznaczniki nie dają dostatecznej informacji o rozwiązalności układu. Okazuje się, że potrzebne jest badanie tzw. *rzędu* układu. Powiemy o tym w dalszej części wykładu.

# 2 Wektory – kilka faktów użytkowych

## 2.1 Wektory.

### 2.1.1 Wektor jako $n-$ka liczb

W fizyce mamy do czynienia z pojęciami lub obiektami o różnym charakterze. Są np. wielkości, które można charakteryzować podaniem *jednej* liczby – np. masa, temperatura.

Nazywamy je *skalarami*. Inaczej jest, gdy musimy podać położenie np. *punktu w przestrzeni*. Do podania położenia np. samolotu w przestrzeni trzeba wskazać jego długość i szerokość geograficzną oraz wysokość, na jakiej leci – więc *trzy* liczby. Położenie punktu w przestrzeni jest przykładem *wektora*. Poszczególne współrzędne nazywamy *składowymi* wektora.

Piszemy więc, np. dla wektora $\mathbf{x}$ wskazującego położenie punktu w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Tak jest dla wektora w przestrzeni trójwymiarowej; wektor na płaszczyźnie ma dwie składowe. Można również rozpatrywać wektory z $\mathbb{R}^n$ jako (uporządkowanej) $n-$ki liczb; będziemy to robić później.

(Inne oznaczenia wektora to: $\vec{x}$; $\underline{x}$). W tych notatkach wektory będą oznaczane generalnie grubymi literami; ale gdyby przyszło pisać na tablicy, wykładowca będzie oznaczał wektory strzałką, jako że łatwiej to pisać niż grube litery kredą.)

(Generalnie będziemy się trzymać powyższej notacji, tzn. zapisu wektora jako *kolumny* liczb. Czasem – dla oszczędności miejsca – będziemy też stosować zapis *wierszowy*, tzn. $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$).

Wektory ilustrujemy w sposób, który Czytelnik/Słuchacz z pewnością zna, tzn. jako strzałki. Traktujemy jako równoważne wektory zaczepione w różnych punktach.

RYS.

(Później pojawi się potrzeba rozpatrywania sytuacji, gdy trzeba uwzględniać również punkt zaczepienia wektora; na razie jednak takich sytuacji nie rozpatrujemy).

### 2.1.2 Dwa podstawowe działania na wektorach

Na wektorach możemy wykonywać dwa podstawowe działania[1]:

- *Dodawanie wektorów*: Dla dowolnych wektorów $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ określamy ich sumę jako wektor $\mathbf{z}$: $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, o składowych

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

- *Mnożenie wektora* $\mathbf{x}$ *przez liczbę* $\alpha \in \mathbb{R}$: Wektorem $\alpha\mathbf{x}$ nazywamy wektor o składowych

$$\alpha\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$$

RYS. RYS. – ilustracje dwuwymiarowe

Mamy następujące ważne pojęcie:

[1] za chwilę poznamy ich więcej, ale nie są one tak podstawowe – w tym sensie, że wymagają dodatkowych struktur geometrycznych na przestrzeni

**Def.** *Kombinacją liniową k wektorów* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ ze współczynnikami $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (gdzie $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$) nazywamy wektor $\mathbf{X}$ określony jako

$$\mathbf{X} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\mathbf{x}_j. \tag{3}$$

## 2.2 Bazy. Rozkład wektora w bazie.

Zauważmy, że dowolny wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

gdzie oznaczyliśmy: $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Znaczy to, że *dowolny* wektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić jako *liniową kombinację* wektorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Wektory te stanowią przykład *wektorów bazowych*, tzn. takich, że dowolny wektor z $\mathbb{R}^3$ można *jednoznacznie* przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy. Zapiszmy to formalnie:

**Def.** *Bazą* w $\mathbb{R}^3$ nazywamy taki zbiór trzech wektorów z $\mathbb{R}^3$, że dowolny wektor z $\mathbb{R}^3$ można *jednoznacznie* przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy.

**Przykł.** Omówione dopiero co wektory $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ stanowią bazę; jest to tzw. *baza standardowa.* Weźmy inne trzy wektory: $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, określone następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \end{aligned} \tag{4}$$

Czy stanowią one bazę? Jest tak, jeśli wyrażenie wektorów $\{\mathbf{f}_i\}$ przez $\{\mathbf{e}_i\}$ jest *odwracalne*, tzn. gdy $\{\mathbf{e}_i\}$ wyrażają się przez $\{\mathbf{f}_i\}$ *jednoznacznie.* Tutaj tak jest; gdy bowiem potraktujemy (4) jako układ równań na niewiadome $\{\mathbf{e}_i\}$, to możemy go rozwiązać i mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\tfrac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{e}_2 &= \tfrac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_3 - \tfrac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{f}_2 \end{aligned} \tag{5}$$

W ten sposób, dowolny wektor $\mathbf{x}$ możemy wyrazić w bazie $\{f_i\}$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_1(-\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2) + x_2(\frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2) + x_3(\mathbf{f}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_2)$$

$$= (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3)\mathbf{f}_1 + (\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3)\mathbf{f}_2 + x_3\mathbf{f}_3.$$

Przez skojarzenie z kryterium na istnienie jednoznacznego rozwiązania układu równań liniowych, mamy następujące

**Kryterium** na to, aby układ wektorów $(\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\})$ był bazą:
Wyznacznik utworzony ze składowych wektorów $(\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\})$ musi być różny od zera.

**Przykł.** Dla wektorów $\{\mathbf{f}_i\}$, zdefiniowanych przez (4), mamy:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -2 \neq 0,$$

a więc znowu stwierdziliśmy, że wektory $(\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\})$ tworzą bazę.

**Przykł.** Weźmy teraz wektory $(\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3\})$, zdefiniowane jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{F}_3 &= \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Tworząc z ich składowych wyznacznik, mamy:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - 2 - 2 = 0,$$

a więc wektory $(\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3\})$ *nie tworzą* bazy. Można się przekonać, że np. wektor $\mathbf{F}_3$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$:

$$\mathbf{F}_3 = 2\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1,$$

co geometrycznie znaczy, że wektory $(\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3\})$ rozpinają *płaszczyznę* dwuwymiarową, a nie całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

## 2.3 Iloczyn skalarny i zastosowania.

### 2.3.1 Definicja ogólna i standardowy iloczyn skalarny

*Iloczyn skalarny* dwóch wektorów $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ jest liczbą. Oznaczamy go: $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. (Inne oznaczenia: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$,$(\mathbf{x}|\mathbf{y})$). Żądamy, aby iloczyn skalarny spełniał następujące własności dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ oraz współczynnika $\alpha \in \mathbb{R}$:

- Nieujemność: $(x, x) \geqslant 0$, przy czym równość $(x, x) = 0$ zachodzi tylko dla wektora zerowego.
- Symetria: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- Liniowość: $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. (Nazywa się czasem tę własność *liniowością multiplikatywną*).
- Rozdzielność: $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$. (Tę własność nazywa się też *liniowością addytywną*).

Iloczyn skalarny można wprowadzać na wiele sposobów (tzn. można znaleźć wiele funkcji $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, spełniających powyższe warunki). W naszej euklidesowej przestrzeni jest jednak jedna wyróżniona funkcja, mająca postać:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \equiv \sum_{i=1}^{3} x_iy_i. \tag{7}$$

Powyższe warunki łatwo się sprawdza dla (6).

Aby bardziej uzmysłowić sobie znaczenie geometryczne powyższego wzoru, zastosujmy go najsampierw do iloczynu skalarnego wektora samego z sobą. Mamy:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

i z tw. Pitagorasa widzimy, iż jest to *kwadrat długości* wektora $\mathbf{x}$. Długość wektora $\mathbf{x}$ będziemy oznaczać jako $||\mathbf{x}||$; mamy więc:

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

*Uwaga.* Długość wektora (zwaną czasem *normą*) określamy analogicznym wzorem dla *dowolnego* iloczynu skalarnego, nie tylko standardowego:

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}. \tag{8}$$

W celu dalszego zobaczenia własności geometrycznych iloczynu skalarnego, pokażemy ważną nierówność.

### 2.3.2 Nierówność Schwarza

**Tw.** . *Nierówność Schwarza* Załóżmy, że mamy przestrzeń wektorową[2] z iloczynem skalarnym. Wtedy dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zachodzi nierówność

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||. \tag{9}$$

**Dow.** Z wektorów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ zbudujmy następującą kombinację liniową: $\mathbf{x} + t\mathbf{y}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, i obliczmy iloczyn skalarny tego wektora samego z sobą. Mamy, z warunku nieujemności iloczynu skalarnego:

$$(\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y}) \geqslant 0. \tag{10}$$

Jednocześnie:

$$(\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + t^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Popatrzmy na to wyrażenie jako na *trójmian kwadratowy* w zmiennej $t$. Z nieujemności iloczynu skalarnego (9) wynika, że trójmian ten jest nieujemny *dla dowolnych* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *oraz* $t$. Skoro tak, to wyróżnik tego trójmianu jest *niedodatni*:

$$\Delta = 4(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant 0,$$

a to znaczy, że

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

lub, wyciągając pierwiastek kwadratowy i uwzględniając definicję długości wektora (7), otrzymujemy nierówność (8).

■

[2] Tu: $\mathbb{R}^3$; ale nier. Schwarza prawdziwa jest dla $\mathbb{R}^n$ dla dowolnego $n$.

### 2.3.3 Interpretacja geometryczna iloczynu skalarnego

Utwórzmy teraz, dla dowolnych *niezerowych* wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ wielkość

$$K = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}.$$

Z nierówności Schwarza widzimy, że $K$ może przyjmować wartości ze zbioru $[-1, 1]$. (Dwie skrajne wartości są osiągane dla $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ – wtedy $K = -1$; oraz dla $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ – wtedy $K = +1$).

Teraz *zdefiniujmy* kąt $\theta$ pomiędzy wektorami $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jako

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}. \tag{11}$$

Widać, że ta definicja ma szansę być sensowna, ponieważ: $\theta = 0$ dla $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\theta = \pi$ dla $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ oraz $\theta$ leży pomiędzy tymi skrajnymi wartościami dla innego wyboru $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{y}$.

*Uwaga.* Powyższy wzór jest często używany jako *definicja* iloczynu skalarnego. Wtedy ta definicja ma postać:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \cos\theta,$$

zaś wyrażenie (6) pojawia się jako jej konsekwencja. Tu przyjęliśmy odwrotną kolejność – gwoli ogólności: Kąt pomiędzy wektorami można zdefiniować wzorem (10) dla *dowolnego* iloczynu skalarnego, niekoniecznie standardowego.

Korzystając z powyższego wyrażenia, możemy napisać inne wyrażenie na iloczyn skalarny:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \cos\theta, \tag{12}$$

gdzie $\theta$ jest kątem pomiędzy wektorami, mierzonym od $\mathbf{x}$ do $\mathbf{y}$. Jest ono wygodne, gdy nie mamy wektorów zadanych w jakiejś konkretnej bazie, a mamy ich długości oraz kąt pomiędzy nimi.

W celu lepszego 'wyczucia' iloczynu skalarnego, zastosujmy go teraz do wektoów bazy $\{\mathbf{e}_i\}$ (tzn. bazy *standardowej*, nazywanej też *kartezjańską*. Mamy, np.:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$$

i tak samo dla wektorów $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Mamy też:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

i podobnie dla innych wektorów bazy o różnych wskaźnikach:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0 \quad \text{(i symetrycznie } (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0 \quad \text{itd.)}$$

Możemy to skrótowo zapisać jako:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

(gdzie liczby $i, j$ – *wskaźniki* – mogą przyjmować wartości $1, 2, 3$), zaś symbol $\delta_{ij}$ zwany jest *deltą Kroneckera* i jest zdefiniowany następująco:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli} \quad i = j \\ 0, & \text{jeżeli} \quad i \neq j \end{cases}$$

Jak zinterpretujemy powyższe równości dla różnych wskaźników? Możemy na nie popatrzyć jako na wyrażenie faktu, że $\mathbf{e}_1$ jest *prostopadły* do $\mathbf{e}_2$ itd.; bo skoro iloczyn skalarny dwu niezerowych wektorów jest równy zeru, to kąt pomiędzy nimi jest równy $\frac{\pi}{2}$. (Wektory prostopadłe nazywamy też *ortogonalnymi*).

Okazuje się, że iloczyn skalarny ma ważną własność, której teraz nie pokażemy (odkładając ją na ok. 3 miesiące, kiedy nabędziemy więcej wprawy w przestrzeniach wektorowych), a mianowicie, iż jest on *niezmienniczy względem obrotu baz.* To znaczy, gdy mamy dwie bazy kartezjańskie, obrócone względem siebie, to iloczyn skalarny *nie zależy* od tego, w której bazie go liczymy (musi to być tylko baza kartezjańska, tzn. $(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = \delta_{ij}$).

### 2.3.4 Zastosowanie: Praca w polu sił.

$$W = (\mathbf{F}, \mathbf{s}) = Fs\cos\alpha$$

## 2.4 Iloczyn wektorowy i zastosowania.

### 2.4.1 Permutacje (zb. 3-elementowego), parzyste i nieparzyste

### 2.4.2 Symbol zupełnie antysymetryczny

$\epsilon_{ijk}$

### 2.4.3 Iloczyn wektorowy

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \quad z_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j y_k;$$

konkretnie:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

Własności iloczynu wektorowego:

- $\mathbf{z}$ jest prostopadły do $\mathbf{x}$ oraz do $\mathbf{y}$. (Tu rachunek).
- $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ (tu uzasadnienie)
- Długość wektora $\mathbf{z}$ nie zależy od wyboru bazy, w której się go liczy (musi to być tylko znowu baza kartezjańska, tzn. $(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = \delta_{ij}$). (To jest zapodane na wiarę – uzasadnienie będzie później). (Niezła dyskusja w: Byron, Fuller, *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*, t. 1).
- Konsekwencja tej własności: Przejdźmy do takiej bazy, której pierwsza oś pokrywa się z wektorem $\mathbf{x}$ oraz wektor $\mathbf{y}$ leży w płaszczyźnie 12. (RYS.) Liczymy i wychodzi, że $\mathbf{z}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, a jego długość wynosi:

  $$||\mathbf{z}|| = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \sin\theta \tag{13}$$

  $\theta$ – kąt mierzony od $\mathbf{x}$ do $\mathbf{y}$.

### 2.4.4 Zastosowanie: Moment pędu.

Zast. teorii momentu pędu: Moment pędu jest zachowany w ruchu planet.

### 2.4.5 Zastosowanie: Siła Lorentza.

### 2.4.6 Zastosowanie: Pole powierzchni. Objętość.

*Pole powierzchni* $P$ równoległoboku rozpiętego na wektorach $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jest równe

$$P = ||\mathbf{x} \times \mathbf{y}||. \tag{14}$$

Uzasadnienie: Pole powierzchni to iloczyn długości podstawy oraz wysokości, a więc dwóch boków razy sinus kąta pomiędzy nimi (RYS.), a to się dokładnie pokrywa z wzorem (12). Wzór jest wygodny, gdy mamy równoległobok zadany przez rozpinające go wektory – unikamy wtedy liczenia ich długości oraz kąta pomiędzy nimi.

*Objętość* $V$ równoległościanu rozpiętego na wektorach $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ jest równa

$$V = |(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot gr| \tag{15}$$

Uzasadnienie: Wzór ten mówi, że objętość to pole podstawy razy wysokość.