1 Liczby zespolone

1.1 Dlaczego nie wystarczają liczby rzeczywiste

W dziejach systemów liczbowych, niejednokrotnie trzeba było rozszerzać istniejące – wynikało to z naturalnych zapotrzebowań.

- Liczby naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ z działaniami dodawania i mnożenia; są one zawsze wykonalne. Natomiast działanie odwrotne do dodawania, tzn. odejmowanie, jest *nie zawsze* wykonalne w zbiorze $\mathbb{N}$, np. równanie: $x + 3 = 1$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{N}$. Można jednak sprawić, by odejmowanie stało się wykonalne, *rozszerzając* zbiór $\mathbb{N}$ o wszystkie rozwiązania równań postaci $x + a = 0$, $a \in \mathbb{N}$.

- W zbiorze $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ jest już wykonalne odejmowanie, natomiast nie zawsze jest wykonalna operacja odwrotna do mnożenia, tzn. dzielenie; innymi słowy, równanie postaci: $ax = 1$, $a \neq 0$, nie zawsze ma rozwiązanie w liczbach całkowitych. I znów można zapewnić wykonalność dzielenia, dołączając do $\mathbb{Z}$ rozwiązania równań postaci $ax = 1$, $a \neq 0$. Wynikiem jest zbiór liczb *wymiernych* Q jako zbioru ułamków nieskracalnych $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

- W zbiorze $\mathbb{Q}$ (tzn. liczb postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$) są już wykonalne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Można jednak wprowadzić jeszcze operację *potęgowania* (wywodzącą się z mnożenia): $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n razy). I znów okazuje się, że operacja odwrotna do potęgowania, tzn. *pierwiastkowanie* (tzn. szukanie, dla danej liczby $a \in \mathbb{Q}$, takiej liczby x, że $x^n = a$), *nie zawsze* jest wykonalne (np. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; czy Czytelnik pamięta /moze zrekonstruować dowód?)
  Zbiór liczb wymiernych można rozszerzać na różne sposoby; najważniejszy z nich to dołączenie do $\mathbb{Q}$ wszystkich *granic ciągów zbieżnych* o wyrazach wymiernych; prowadzi to do zbioru liczb rzeczywistych. W zbiorze liczb rzeczywistych wyciąganie pierwiastków jest już wykonalne (jeśli są to pierwiastki parzyste, to można je wyciągać jedynie z liczb nieujemnych).

Jednak w zbiorze liczb rzeczywistych mamy jeszcze jeden problem z pierwiastkami: Pierwiastki (parzystych stopni) z liczb *ujemnych.*

Rozpatrzmy podnoszenie do kwadratu i wyciąganie pierwiastka drugiego stopnia. To pierwsze jest zawsze wykonalne i jego wynikiem jest liczba *nieujemna.* Powoduje to, że wyciąganie pierwiastka jest wykonalne tylko dla liczby *nieujemnej.* Tak więc, pozostając w obrębie liczb rzeczywistych, nie ma sensu wyrażenie

$$\sqrt{-1}, \tag{1}$$

gdyż nie istnieje taka liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu dałaby liczbę ujemną (tu: -1).

Tym niemniej, taki "bezsensowny" czy "nieistniejący" obiekt jak $\sqrt{-1}$ pojawiał się kilkakrotnie w dziejach (średniowiecznej i renesansowej) matematyki i nie można go było ignorować. Problem nabrzmiał w XVI wieku, kiedy odkryto metodę rozwiązywania równań trzeciego stopnia:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

gdzie a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi. Dla $a \neq 0$, zawsze istnieje przynajmniej jeden pierwiastek tego równania, będący liczbą rzeczywistą.

W XVI w. znaleziono metodę znajdowania rozwiązań (pierwiastków) takich równań dla dowolnych parametrów a, b, c, d, zwaną *metodą Cardano* (chociaż wcześniej metodę rozwiązywania znaleźli też Tartaglia i Scipio del Ferro). Cechą charakterystyczną tej metody był jednak fakt, że – mimo iż rozwiązanie było rzeczywiste – aby je otrzymać, trzeba było użyć "nieistniejącej" liczby $\sqrt{-1}$. Innymi słowy, trzeba było przejść przez "zakazany obszar", gdzie pojawia się "nieistniejący" (urojony) obiekt $\sqrt{-1}$.

Ale skoro taki obiekt, jak $\sqrt{-1}$, okazuje swoją użytecznosc, to może nie brońmy się przed nim i pozwólmy mu zaistnieć? Oczywiście, nie jest wyjściem z sytuacji przyjęcie go za liczbę rzeczywistą. Ale gdyby spróbować rozszerzyć pojęcie liczby rzeczywistej, tak by to – ogólniejsze – pojęcie dopuszczało też takie byty jak $\sqrt{-1}$.

Czy można tak rozszerzyć zbiór liczb rzeczywistych, aby to rozszerzenie zawierało też takie byty jak $\sqrt{-1}$? Odpowiedź jest pozytywna; zanim jednak o tym powiemy, wyliczmy najpierw własności dodawania i mnożenia, co doprowadzi do pojęcia *ciała*; oraz sprecyzujmy co rozumiemy przez "rozszerzenie".

1.2 Ciała

W zbiorach takich, jak $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$, wykonalne są działania dodawania i mnożenia oraz ich odwrotności. Bardziej precyzyjnie można powiedzieć, że $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$ są przykładami *ciał*.

Definicja. *Ciałem* nazywamy zbiór $\mathbb{K}$, w którym można wykonywać działania dodawania: "+" i mnożenia "$\cdot$", takie, że $\mathbb{K}$ jest zamknięty względem tych działań (tzn. nie wyprowadzają one poza zbiór $\mathbb{K}$). "+" i "$\cdot$"spełniają warunki:

- *łączność*: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- *przemienność*: $a+b = b+a$, $\quad a \cdot b = b \cdot a$.
- *istnienie elementu neutralnego* (dla "+" i "$\cdot$"): $a+0 = a$, $\quad a \cdot 1 = a$, przy czym $1 \neq 0$.
- *istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego) do danego*: $a+(-a) = 0$, $\quad a \cdot a^{-1} = 1$ (dla $a \neq 0$).
- *rozdzielność mnożenia względem dodawania*: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Definicja. *Rozszerzeniem* ciała $\mathbb{K}_0$ przez ciało $\mathbb{K}$ nazywamy takie ciało $\mathbb{K}$, że $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}$ oraz działania w $\mathbb{K}$ stosowane do elementów $\mathbb{K}_0$ pokrywają się z działaniami w $\mathbb{K}_0$. Mówimy też wtedy, że ciało $\mathbb{K}_0$ jest *podciałem* ciała $\mathbb{K}$.

Dwa przykłady ciał, które już znamy, to liczby wymierne $\mathbb{Q}$ i rzeczywiste $\mathbb{R}$. Tutaj $\mathbb{R}$ jest rozszerzeniem $\mathbb{Q}$.

Inne przykłady:

1. Ciało Z_2, tzn. zbiór $\{0, 1\}$ z działaniami: $0+0 = 0, 0+1 = 1+0 = 1, 1+1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$, jest ciałem (proszę sprawdzić!). Elementami neutralnymi są: 0 dla dodawania oraz 1 dla mnożenia. Ciało Z_2 jest podzbiorem $\mathbb{R}$, natomiast *nie jest* podciałem $\mathbb{R}$.
2. Zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, jest ciałem liczbowym. Oznaczamy je $Q(\sqrt{2})$; jest ono rozszerzeniem ciała liczb wymiernych. (Proszę sprawdzić te stwierdzenia!)
3. Zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, *nie jest* ciałem liczbowym (dlaczego?).

4. Natomiast zbiór liczb postaci: $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, gdzie a,b,c są liczbami wymiernymi, jest już ciałem liczbowym. (proszę sprawdzić!)

Nasz problem rozszerzenia ciała R możemy więc doprecyzować tak: *Znaleźć rozszerzenie ciała $\mathbb{R}$ zawierające element, którego kwadrat jest równy -1.*

Stwierdzenie. Jeśli $\tilde{\mathbb{K}}$ jest takim rozszerzeniem, zaś i jest elementem takim, że $i^2 = -1$, to podzbiór $\mathbb{C} \in \tilde{\mathbb{K}}$

$$\hat{\mathbb{C}} := \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}\} \tag{2}$$

jest zamknięty ze względu na dodawanie, mnożenie i branie elementu odwrotnego, więc jest podciałem $\tilde{\mathbb{K}}$, w szczególności jest też ciałem.

Dowód: Operacje dodawania, mnożenia i brania elementu odwrotnego, stosowane do elementów $\hat{\mathbb{C}}$, nie wyprowadzają poza ten podzbiór (własność *zamkniętości*). Wynika to z wzorów:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i; \tag{3}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c - b \cdot d + (ad + bc)i; \tag{4}$$

$$-(a + bi) = (-a) + (-b)i; \tag{5}$$

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \tag{6}$$

Operacje te określają w podzbiorze $\hat{\mathbb{C}}$ strukturę podciała.

Ponadto widać, że wszystkie działania na elementach postaci $a + bi$ nie zależą od rozszerzenia; są one dane wzorami (3–(6) , które nie odwołują się w żaden sposób do rozszerzenia.

1.3 Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Wprowadźmy w zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par liczb rzeczywistych działanie dodawania i mnożenia w następujący sposób:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{7}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{8}$$

Można sprawdzić bezpośrednimi rachunkami, że tak określona struktura jest ciałem. Zerem jest tu para $(0, 0)$; jedynką: $(1, 0)$; elementem przeciwnym do (a, b) jest $(-a, -b)$, zaś element odwrotny do (a, b) to $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

Tak zdefniniowane ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy jako $\mathbb{C}$. Daje ono rozwiązanie naszego problemu (tzn. rozszerzenia ciała liczb rzeczywistych). Zawieranie się ciała liczb rzeczywistych w $\mathbb{C}$ jako podciała dane jest przez utożsamienie $a \in \mathbb{R}$ z liczbą zespoloną $(a, 0) \in \mathbb{C}$, natomiast elementem takim, że $i^2 = -1$, można wziąć $i := (0, 1)$. Mając to utożsamienie, dostajemy prostszą do rachunków postać liczby zespolonej:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi. \tag{9}$$

(W ten sposób dokonaliśmy utożsamienia $\mathbb{C}$ z $\hat{\mathbb{C}}$). Postać liczby zespolonej jako pary jest mniej wygodna do rachunków, ale prowadzi do wygodnej interpretacji liczby zespolonej jako *punktu na płaszczyźnie*. Bowiem na iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ można patrzeć jako na płaszczyznę własnie; w ten sposób liczba zespolona (a, b) będzie wektorem o składowej "x"-owej równej a oraz składowej "y" równej b. Taki sposób patrzenia na liczby zespolone podał Gauss na przełomie XVIII i XIX w.

1.4 Sprzężenie zespolone

Ważną operacją w ciele liczb zespolonych jest *sprzężenie zespolone*, określane jako:

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} := a - bi. \tag{10}$$

Łatwo sprawdzić (bezpośrednim rachunkiem) następujące własności operacji sprzężenia zespolonego:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \quad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}; \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Niech $z = a + bi$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$\Re z := a, \quad \Im z := b; \tag{11}$$

nazywamy je odpowiednio: częścią *rzeczywistą* i *urojoną* liczby z. Mamy:

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

1.5 Postać trygonometryczna

Liczbę zespoloną $a+bi$ można przedstawić jako punkt na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ o współrzędnych kartezjańskich (a, b) lub jako wektor o tych składowych. Dodawanie liczb zespolonych odpowiada dodawaniu wektorów.

Punkty na płaszczyźnie możemy też opisywać innymi współrzędnymi- *biegunowymi*: (r, ϕ). Przejście od współrzędnych kartezjańskich do biegunowych dane jest przez wyrażenia:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Definicja. Jeśli $z \neq 0$, to $\phi \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

nazywamy *argumentem* liczby z i oznaczamy przez $\arg z$.

Zauważmy, że argument liczby zespolonej wyznaczony jest z dokładnością do wielokrotności 2π. Argument ϕ liczby z spełniający nierówność $0 \leqslant \phi < 2\pi$ nazywamy *argumentem głównym* i oznaczamy $\operatorname{Arg} z$.

Przejście od współrzędnych biegunowych do kartezjańskich dane jest wyrażeniami:

$$a = r\cos\phi; \quad b = r\sin\phi$$

Liczbę zespoloną $z = a + bi$ można więc równoważnie przedstawić w postaci

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),$$

nazywanej *reprezentacją trygonometryczną* liczby zespolonej z.

Przykład. Niech $z_1 = 1+i$; mamy: $z_1 = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; promień dla liczby z_1 jest równy $\sqrt{2}$, zaś argument $\operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{4}$.

1.6 Moduł i jego własności

Definicja. *Modułem* $|z|$ liczby zespolonej $z = a + bi$ nazywamy

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{12}$$

Bezpośrednio z definicji i z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej $z = a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ wynikają własności

- $|z| \in \mathbb{R} \cup \{0\}$,
- $|z| = r$.

Stwierdzenie. Zachodzą związki:

1. $|z|^2 = z\bar{z}$,
2. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
3. $|\bar{z}| = |z|$,
4. $|\mathrm{Re}z| \leqslant |z|,\ |\mathrm{Im}z| \leqslant |z|$; tym bardziej: $\mathrm{Re}z \leqslant |z|,\ \mathrm{Im}z \leqslant |z|$.
5. $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$,
6. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,
7. $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Dowód:

1. Niech $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Z bezpośredniego rachunku mamy:
$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$
2. Udowodniona właśnie równość mówi że $z\bar{z} = |z|^2$; zastosujmy ją do $z = z_1 z_2$:
$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$
3. Oczywiste.
4. Niech $z = a+bi$. Mamy: $|\mathrm{Re}z| = |a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Drugą nierówność pokazujemy analogicznie.
5. Mamy $1 = z\frac{1}{z}$. Biorąc moduły obu stron i korzystając z 2) mamy: $1 = |z|\left|\dfrac{1}{z}\right|$. Zatem $\dfrac{1}{|z|} = \left|\dfrac{1}{z}\right|$. Stąd i z 2) wynika 4).

6. Niech $z_i = r_i(\cos\phi_i + i\sin\phi_i)$, $i = 1, 2$. Mamy:
$$z_1 z_2 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)\cdot r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$$
$$= r_1 r_2[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_2\sin\phi_1)]$$
$$= r_1 r_2[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)]$$
skąd wynika 5). Powyższą równość można też wypowiedzieć słowami: "Przy mnożeniu liczb zespolonych promienie się mnożą a argumenty dodają".

7. W reprezentacji biegunowej:
$$\bar{z} = r(\cos\phi - i\sin\phi) = r(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi))$$

Wniosek (wzór de Moivre'a). Jeżeli $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, to dla $n \in \mathbb{N}$
$$z^n = r^n[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)].$$

Uwaga. Wygodne jest zastosowanie następującego skrótowego *zapisu* liczby postaci $(\cos\phi + i\sin\phi)$:
$$cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}.$$
Mamy:
$$e^{i(\phi+\psi)} = e^{i\phi}e^{i\psi}, \qquad \overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}.$$
W chwili obecnej, symbol $e^{i\phi}$ jest jedynie wygodnym *oznaczeniem* i nie ma on żadnego związku z liczbą e i funkcją wykładniczą. Związek ten pojawi się dopiero na analizie, stając się *twierdzeniem.*

Stwierdzenie. Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności:

1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$,

1'. $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

2. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Dowód:

1. Weźmy kwadrat lewej strony nierówności:
$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\cdot\overline{(z_1+z_2)} = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2$$
$$= |z_1|^2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + z_2\bar{z}_1 + \overline{z_1\bar{z}_2} + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| + |z_2|^2$$
$$\leqslant |z_1|^2 + 2|(z_1\bar{z}_2)| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$
(wykorzystaliśmy tu p. 4) poprzedniego stwierdzenia).

1'. Dowód indukcyjny, którego pierwszy krok stanowi powyższa nierówność.

2. Z udowodnionej właśnie nierówności 1. wynika
$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|,$$
$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1|,$$
skąd
$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|,$$
$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|,$$
i teza.

1.7 Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Definicja. Niech $w \in \mathbb{R}$. *Pierwiastkiem* stopnia n z liczby w nazywamy taką liczbę zespoloną z, że $z^n = w$.

Stwierdzenie. Niech $n \in \mathbb{N}$. Każda niezerowa liczba zespolona posiada $w \in \mathbb{R}$ dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia. Jeśli $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, to są one dane wzorami

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{13}$$

gdzie $\sqrt[n]{r}$ – pierwiastek arytmetyczny.

Dowód: Liczba $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ jest takim pierwiastkiem
$\iff |z| = \sqrt[n]{r}$ oraz $n\alpha = \phi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$
$\iff |z| = \sqrt[n]{r}$ oraz $\alpha = \frac{\phi+2k\pi}{n}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Dwie liczby całkowite k i k' dają równoważne argumenty $\alpha = \frac{\phi+2k\pi}{n}$ i $\alpha' = \frac{\phi+2k'\pi}{n}$
$\iff \frac{\phi+2k\pi}{n} - \frac{\phi+2k'\pi}{n}$ jest wielokrotnością 2π
$\iff k - k'$ jest wielokrotnością n.

Stąd wynika, że wszystkie różne pierwiastki otrzymamy dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

cbdo.

Komentarz. Widać tutaj różnicę pomiędzy ciałami liczb rzeczywistych a zespolonych. W przypadku zespolonym, *zawsze* mamy dokładnie n pierwiastków z liczby niezerowej. W przypadku rzeczywistym, sytuacja jest bardziej skomplikowana:

1. gdy pierwiastek jest nieparzystego stopnia, to jest on wyznaczony jednoznacznie (np. $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$);

2. gdy pierwiastek jest parzystego stopnia, to:

   (a) pierwiastek z liczby ujemnej nie istnieje,

   (b) pierwiastek z liczby dodatniej ma dwie wartości, różniące się znakiem (np. $\sqrt[4]{16} = \pm 2$).

Tak więc sytuacja w przypadku rzeczywistym może być bardziej skomplikowana niż w przypadku zespolonym.

Przykład. Weźmy $w = -4$ i obliczmy $\sqrt[4]{-4}$. Mamy: $w = (\sqrt{2})^4(-1+0i) = (\sqrt{2})^4(\cos\pi + i\sin\pi)$. Istnieją cztery pierwiastki:

$$k = 0: \qquad z_0 = (\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi + 0\cdot 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 0\cdot 2\pi}{4}\right)\right] = 1 + i$$

$$k = 1: \qquad z_0 = (\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi + 1\cdot 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 1\cdot 2\pi}{4}\right)\right] = -1 + i$$

$$k = 2: \qquad z_0 = (\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\cdot 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\cdot 2\pi}{4}\right)\right] = -1 - i$$

$$k = 3: \qquad z_0 = (\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi + 3\cdot 2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 3\cdot 2\pi}{4}\right)\right] = 1 - i$$

Przykład. Obliczmy pierwiastki n-tego stopnia z 1. Promień liczby 1 jest równy 1, a argument Arg=0. Mamy więc n pierwiastków, danych wyrażeniami:

$$\epsilon_k = \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Wszystkie te pierwiastki leżą na okręgu jednostkowym o środku w punkcie $(0,0)$ układu współrzędnych, w wierzchołkach n-kąta foremnego.

Uwaga. Mamy: $\epsilon_k = (\epsilon_1)^k$.

Uwaga. Jeśli z jest *którymkolwiek* pierwiastkiem z liczby zespolonej $w \neq 0$, to **wszystkie** pierwiastki $n-$tego stopnia można otrzymać z z mnożąc ją przez wszystkie ϵ_k. Mamy więc wszystkie te pierwiastki dane wzorem równoważnym z (13)

$$z, z\epsilon_1, z\epsilon_2, \ldots, z\epsilon_{n-1}.$$

1.8 Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie będzie wykorzystane przy liczeniu całek z f. wymiernych – przy rozkładaniu wyrażenia podcałkowego na ułamki proste; oraz przy problemie wartości własnych macierzy, gdzie będzie się badało wielomian charakterystyczny i jego pierwiastki.

Twierdzenie. Każde równanie n-tego stopnia

$$q(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0 \tag{14}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{C}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ ma rozwiązanie w $\mathbb{C}$.

Dygresja. Ideę dowodu zilustrujemy najpierw w prostszym przypadku wersji rzeczywistej powyższego twierdzenia:

Każde równanie nieparzystego stopnia $n = 2k+1$

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

gdzie $k \geqslant 0$, $a_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ *ma rozwiązanie w* $\mathbb{R}$.

Tu idea dowodu jest następująca: Dla $x \to +\infty$, również $p(x) \to +\infty$, tak więc istnieje x_+ takie, że dla dowolnego $x > x_+$, $p(x) > 0$. Analogicznie, dla $x \to -\infty$ zachodzi: $p(x) \to -\infty$, tak więc istnieje x_- takie, że dla dowolnego $x < x_-$, $p(x) < 0$. Ponieważ funkcja $p(x)$ jest ciągła, to na odcinku $[x_-, x_+]$ funkcja $p(x)$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie, a w szczególności istnieje takie x_0, że $f(x_0) = 0$.

W przypadku równania (14) zarówno argument jak i wartość funkcji są liczbami zespolonymi, więc nie można użyć powyższego rozumowania bezpośrednio; jednak uogólnienie jest naturalne i wtedy dowód "idzie".

Idea dowodu. (*Nie będzie to dowód jako taki, gdyż argumentacja odwołuje się do kilku faktów z analizy, prawdopodobnie nie znany w tej chwili Czytelnikowi. W tej chwili znajomość tych faktów musi zastąpić Jego/Jej intuicja.*)

1) Rozpatrzmy najsampierw odwzorowanie $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to z^n$. Weźmy w przestrzeni argumentów okrąg $\gamma_1 = C_0^R$ (okrąg o środku w punkcie 0 i promieniu R); jego obrazem jest również okrąg $C_0^{R^n}$. Obiegnijmy naokoło okrąg γ_1. Zmiana argumentu w *przeciwobrazie* wynosi 2π, zaś w *obrazie* wynosi $2n\pi$ (tzn. okrąg w obrazie jest obiegany n razy).

2) Pokażemy, że podobna sytuacja ma miejsce, gdy rozpatrujemy dowolne odwzorowanie $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to q(z)$ dla dostatecznie dużego R. Rozpatrzmy znów obraz okręgu $\gamma_1 = C_0^R$: $\gamma_2 = q(\gamma_1)$. Obraz ten jest pewną zamkniętą krzywą *ciągłą*. Obiegnijmy znów naokoło okrąg γ_1. Ile będzie wynosił przyrost argumentu w *obrazie*? Obliczmy argument $q(z)$:

$$\arg(q(z)) = \arg(z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0) = \arg(z^n) + \arg(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n})$$

Przyrost argumentu $\Delta(q(z))$, gdy z obiega okrąg γ_1, wynosi:

$$\Delta(q(z)) = 2\pi n + \Delta \arg(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n})$$

Mamy oszacowanie (pamiętajmy że $z = Re^{i\phi}$):

$$|1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n}| \leqslant 1 + |\frac{c_{n-1}}{z}| + \cdots + |\frac{c_1}{z^{n-1}}| + |\frac{c_0}{z^n}|$$

$$= 1 + \frac{|c_{n-1}|}{R} + \cdots + \frac{|c_1|}{R^{n-1}} + \frac{|c_0|}{R^n}$$

Biorąc teraz R *dostatecznie duże*, otrzymujemy, że dla dowolnego $z = Re^{i\phi}$ liczby: $(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n})$ leżą wewnątrz okręgu o środku w punkcie 1 i promieniu $\frac{1}{2}$. Tak więc zmiana argumentu tej liczby wynosi zero, gdy obiegamy okrąg γ_1 w przeciwobrazie.

Sytuację możemy podsumować mówiąc, że: *Przyrost argumentu $q(z)$, gdy z obiega okrąg γ_1, wynosi $2\pi n$ – analogicznie jak w przypadku odwzorowania $z \to z^n$.*

3) Z drugiej strony, mamy: $q(0) = c_0$, zakładamy zaś, że $c_0 \neq 0$, gdyż w innym przypadku dowód jest skończony.

4) Weźmy teraz rodzinę okręgów o promieniu malejącym od R do zera i rozpatrujmy obrazy tych okręgów. Zmiana obrazu okręgu o promieniu r jest *ciągła*, gdy zmieniamy promień. Z 2) i 3) wnioskujemy, że gdzieś po drodze, gdy deformujemy okręgi, przechodząc od promienia R do zera, obraz pewnego okręgu "zahaczy" o zero.

Uwaga. Pokazaliśmy, że dowolne równanie algebraiczne n-tego stopnia posiada przynajmniej jeden pierwiastek. Stąd łatwo wynika, że równanie $n-$tego stopnia posiada dokładnie n pierwiastków (liczonych z krotnościami) – wystarczy zastosować tw. Bézout: Niech z_1 będzie pierwiastkiem równania $q(z) = 0$. Możemy zapisać: $q(z) = (z - z_1)\tilde{q}(z)$, gdzie $\tilde{q}(z)$ jest wielomianem $n - 1$-wszego stopnia. Argumentując jak wyżej, $\tilde{q}(z)$ znów ma pierwiastek; nazwijmy go z_2. Zatem $\tilde{q} = (z - z_2)\widetilde{tildeq}(z)$, tzn. $q(z) = (z - z_1)(z - z_2)\tilde{\tilde{q}}(z)$, czyli $q(z)$ ma dwa pierwiastki z_1, z_2; itd., aż dojdziemy do równania stopnia 1.

Zadajmy jeszcze pytanie dodatkowe: co z możliwością efektywnego *obliczenia* pierwiastków? Innymi słowy, czy dla dowolnego równania algebraicznego da się napisać wzory na jego pierwiastki, analogiczne do wzorów na pierwiastki równania kwadratowego?

Okazuje się, że odpowiedź jest *negatywna*. Wzory na pierwiastki daje się jeszcze napisać dla równania 4. stopnia (znalazł je L. Ferrari w XVI w.) Rozwiązań dla równań wyższych stopni bezskutecznie poszukiwano przez następne dwa wieki, aż na początku XIX w. niezależnie N. Abel oraz E. Galois odkryli, że *dla równań stopnia wyższego niż czwarty, w ogólnym przypadku pierwiastki nie wyrażają się za pomocą skończonej kombinacji działań arytmetycznych i operacji wyciągania pierwiastka.* [1] (Dowody można znaleźć w wielu podręcznikach algebry; przystępny wykład teorii Galois stanowi książeczka M. Bryńskiego w serii "Biblioteka Delty".)

Później okazało się, że *można* napisać wyrażenia na pierwiastki równania dowolnego stopnia, jeśli rozszerzy się "asortyment" funkcji, które dopuszczamy w wyrażeniach na pierwiastki. Pierwiastki dowolnego równania można wyrazić przez tzw. *funkcje modularne* (do ich zdefiniowania i zbadania konieczna jest dość zaawansowana analiza zespolona). Pokazano to pod koniec XIX wieku (Ch. Hermite, F. Klein, F.Lindemann, C. Jordan).

[1] Ich prace były poprzedzone niezależnym i – jak się później okazało – niekompletnym dowodem Ruffiniego.