Matematyka II, lista zadań No. 5: Odwz. liniowe i (ich) macierze

12.03.2012

1. ■ Które z następujących odwzorowań, w odpowiednich przestrzeniach wektorowych, są odwzorowaniami liniowymi:

   (a) Które z następujących odwzorowań, w odpowiednich przestrzeniach wektorowych, są operatorami liniowymi:

   (b) $x \mapsto a$ (a – ustalony wektor); V - dowolna p. wektorowa

   (c) $x \mapsto x + a$ (a – ustalony wektor); V - dowolna p. wektorowa

   (d) $x \mapsto \alpha x$(α – ustalony skalar); V - dowolna p. wektorowa

   (e) $x \mapsto (a, x)b$ (a, b - ustalone wektory; $V = \mathbb{R}^3$, (x, y) – standardowy iloczyn skalarny wektorów x i y)

   (f) $x \mapsto (a, x)x$ (a - ustalony wektor; $V = \mathbb{R}^3$, (x, y) – standardowy iloczyn skalarny wektorów x i y) f) $f(x) \mapsto f(ax + b)$ ($f(x) \in \mathbf{R}[x]_n$; a, b – ustalone liczby);

   (g) $f(x) \mapsto f(x + 1) - f(x)$ ($f(x) \in \mathbf{R}[x]_n$);

   (h) $f(x) \mapsto f^{(k)(x)}$ ($f(x) \in \mathbf{R}[x]_n$);

   (i) $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

   (j) $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, x_2^2, x_1x_3) \in \mathbb{R}^3$;

   (k) $\mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3) \in \mathbb{R}^3$.

2. ■ Wyznaczyć macierze:

   (a) odwzorowania $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ względem bazy wektorów jednostkowych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$;

   (b) obrotu na płaszczyźnie o kąt α względem dowolnej bazy ortonormalnej;

   (c) obrotu w $\mathbb{R}^3$ o kąt $2\pi/3$ względem prostej, danej w prostokątnym układzie współrzędnych równaniem $x_1 = x_2 = x_3$, względem bazy złożonej z jednostkowych wektorów osi współrzędnych;

   (d) operatora w przestrzeni euklidesowej danego wzorem $x \mapsto (a, x)a$ w bazie ortonormalnej (e_1, e_2, e_3), gdzie $a = e_1 - 2e_3$

3. Wyznaczyć macierz:

4. ■ operatora $X \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X$ w przestrzeni $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ względem bazy złożonej z jednostek macierzowych;

5. operatora $X \mapsto X \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ w przestrzeni $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ względem bazy złożonej z jednostek macierzowych;

6. ■ operatora $X \mapsto X^T$ w przestrzeni $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ względem bazy złożonej z jednostek macierzowych;

7. operatora $X \mapsto AXB$, gdzie A, B – ustalone macierze, w przestrzeni $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ względem bazy złożonej z jednostek macierzowych;

8. operatora różniczkowania w przestrzeni $\mathbf{R}_n[x]$ w bazie $(1, x, \ldots, x^n)$;

9. ■ operatora różniczkowania w przestrzeni $\mathbf{R}_n[x]$ w bazie $(x^n, x^{n-1}, \ldots, 1)$;

10. operatora różniczkowania w przestrzeni $\mathbf{R}_n[x]$ w bazie $(1, x-1, (x-1)^2/2!, \ldots$ $\ldots, (x-1)^n/n!)$.

11. ■ Niech odwzorowanie liniowe $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie reprezentowane przez macierz

$$[A]^f{}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(tzn. w bazach $e = (e_1, e_2, e_3)$ w $\mathbb{R}^3$ i $f = (f_1, f_2)$ w $\mathbb{R}^2$). Znaleźć macierz tegoż odwzorowania $[A]^F{}_E$w bazach $E_1 = e_1$, $E_2 = e_1 + e_2$, $E_3 = e_1 + e_2 + e_3$ oraz $F_1 = f_1, F_2 = f_1 + f_2$.

12. ■ Niech operator liniowy T w przestrzeni $\mathbb{R}_2[\cdot]$ będzie reprezentowany macierzą:

$$[T]^e{}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

w bazie standardowej $e_0 = 1, e_1 = x, e_2 = x^2$. Znaleźć jego macierz $[T]^E{}_E$ względem bazy: $E_0 = 3x^2 + 2x + 1, E_1 = x^2 + 3x + 2, E_2 = 2x^2 + x + 3$.

13. Odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest określone macierzą (w bazie zero-jedynkowej: $e = (e_1, e_2, e_3)$)

$$[T]^e{}_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Znaleźć obraz i jądro odwzorowania;
(b) Niech $E = (2e_1 + 2e_2, 2e_1 - 2e_2, 2e_3)$ będzie nową bazą w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć macierz odwzorowania T względem bazy E (tzn. macierz $[T]^E{}_E$).

14. Niech $\mathbb{R}_4[x]$ będzie przestrzenią wielomianów rzeczywistych (zmiennej rzeczywistej x z rzeczywistymi współczynnikami) stopnia co najwyżej czwartego, a $e = (0, 1, x, x^2, \cdots, x^4)$ bazą tej przestrzeni. Wykaż, że odwzorowanie

$$T : \mathbb{R}_4[x] \ni W(x) \mapsto (1+x)W'(x) - W(x_{\in}\mathbb{R}_4[x]$$

(gdzie W' jest pochodną wielomianu W po zmiennej x) jest liniowe. Znajdź macierz tego odwzorowania względem bazy e. Znajdź obraz i jądro odwzorowania.

15. Znaleźć macierze (względem bazy kanonicznej) odwzorowań liniowych $T_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $T_y : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ polegających na obrotach odpowiednio wokół osi X i Y układu współrzędnych o kąty, odpowiednio, ϕ_x i ϕ_y . Znaleźć macierze odwzorowań $T_x \circ T_y$ i $T_y \circ T_x$.

16. ■ (połowę podpunktów): Przemnóż macierze w podanej i odwrotnej kolejności:

(a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(e)
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

17. Znajdź odwrotności podanych macierzy: (**Uwaga**: Ogólny wzór na macierz odwrotną (wyrażony przez macierz dopełnień) będzie podany później; na razie więc nie liczmy odwrotności macierzy, gdzie są parametry. Odwrotności macierzy o wartościach liczbowych liczymy przez redukcję (wierszową lub kolumnową)

(a) ■
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(c) ■
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

18. ■ Pomnożyć poniższe macierze w podanej i odwrotnej kolejności. (w tych przypadkach, gdy to wykonalne – określić kiedy tak jest):

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\quad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

19. Udowodnij, że $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, gdzie A i B są macierzami.

20. Oblicz A^{-1}, gdy

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$