

# 1 Pochodne pierwszego rzędu

## 1.1 Podstawowe definicje

**Def.** Niech funkcja  $f$  będzie określona w pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt  $a$ . Ilorazem różnicowym funkcji  $f$  w punkcie  $a$  dla przyrostu  $h$  nazywamy funkcję

$$g_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1)$$

Pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (ozn.  $f'(a)$ ) nazywamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

*Inne oznaczenia pochodnej:* Pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $a$  oznacza się też:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

bądź – jeśli nie trzeba podawać, w jakim punkcie jest liczona – jako  $\frac{df(x)}{dx}$ .

Oznaczenia  $\frac{df(x)}{dx}$  pochodzą od Leibniza (XVII w.) – jednego z wynalazców (obok Newtona) rachunku różniczkowego. Pochodzenie tej symboliki jest następujące: Iloraz różnicowy (1) można zapisać jako:

$$\frac{\text{przyrost wartości funkcji } f}{\text{przyrost wartości argumentu } x} = \frac{\Delta f}{\Delta x};$$

pochodna jest granicą ilorazu różnicowego, i "w granicy" zastępuje się  $\Delta$  przez  $d$ .

*Uwaga.* Symbol  $\frac{df(x)}{dx}$  należy traktować jako *jedną całość*. O ile wielkości z licznika czy mianownika – tzn  $\Delta f$  czy  $\Delta x$  są dobrze określone, o tyle *oddzielnie* symbole  $df$ ,  $dx$  – bez dodatkowych umów – nie mają sensu, lub są bezużyteczne. (gdyby np. rozpatrywać je w najbardziej narzucający się sposób, tzn. jako granice, gdy przyrost argumentu dąży do zera, to otrzymałoby się zero). Sensowna, bądź użyteczna, jest jedynie ich kombinacja  $\frac{df}{dx}$ .

Nie oznacza to, że *nie wolno* w ogóle posługiwać się symbolami w rodzaju  $df$  czy  $dx$ . Wolno, ale jedynie na etapie pośrednim jakiegoś rozumowania, którego finałem będzie jakiś w pełni legalny już symbol w rodzaju  $\frac{df}{dx}$  czy  $\int f(x)dx$ .

*Przykł.*  $f(x) = x^2$ ,  $f'(3) = 6$ .

Pochodna funkcji w punkcie ma bardzo wyrazisty sens geometryczny. (RYS.) Rozpatrzmy wykres funkcji  $y = f(x)$ . Ustalmy dodatnie  $h$  i przeprowadźmy prostą przez punkty:  $(x, f(x))$  i  $(x+h, f(x+h))$ . Prostą taką nazywamy *sieczną* krzywej. Jak widać, iloraz różnicowy jest tangensem kąta  $\alpha_h$ , który sieczna tworzy z osią  $OX$ . Gdy  $h \rightarrow 0$ , to sieczne dążą do prostej granicznej – *stycznej* do krzywej w punkcie  $x$ . Tak więc

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

Nie każda funkcja ciągła posiada pochodną (co w ilustracji geometrycznej znaczy, że nie każda krzywa posiada styczną, a jeśli nawet tak, to taka styczna nie jest jednoznacznie określona). I tak np. funkcja  $f(x) = |x|$  nie posiada pochodnej w punkcie  $x = 0$ . Mamy bowiem:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +1, \quad \text{oraz} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

W powyższym jednak przypadku możemy mówić o *pochodnych jednostronnych*, tzn. granicach ilorazów różnicowych:  $\lim_{h \rightarrow 0+}$  (pochodna prawostronna) i  $\lim_{h \rightarrow 0-}$  (pochodna lewostronna).

Dokładniej, mamy:

**Def.** Pochodną *prawostronną* (*lewostronną*) funkcji  $f$  w punkcie  $a$  nazywamy granicę

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (4)$$

Są jednak też funkcje, które (w jakimś punkcie) w ogóle nie posiadają pochodnej – ani lewo-, ani prawostronnej. Np. funkcja:

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0; \quad f(0) = 0 \quad (5)$$

jest ciągła, lecz nie posiada pochodnej (ani lewo-, ani prawostronnej) w zerze. Nieistnienie tej pochodnej wynika np. z nieistnienia granicy  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ . Bowiem granica ilorazu różnicowego:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

nie istnieje, jak to widzieliśmy uprzednio (2 wykłady temu).

Istnieją także funkcje ciągłe, które nie posiadają pochodnej w *żadnym* punkcie.

Rozważamy też pochodne *nieskończone* (ma to miejsce, gdy granica ilorazu różnicowego w jakimś punkcie dąży do nieskończoności). I tak np. dla funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$  mamy

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$$

(bo  $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$ ); bądź dla pochodnej dwustronnej: weźmy  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty$$

**Def.** Mówimy, że funkcja jest *różniczkowalna* w przedziale otwartym, jeśli posiada pochodną skończoną w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja jest różniczkowalna w przedziale domkniętym  $[a, b]$ , jeśli posiada pochodną w każdym punkcie wewnętrznym przedziału, a pochodną jednostronną (prawą lub lewą) w lewym /prawy końcu przedziału.

**Def.** Mówimy, że pochodna  $f'(x)$  funkcji  $f(x)$  jest ciągła w przedziale  $[a, b]$ , jeśli  $f'(x)$  jest ciągła wewnątrz przedziału, pochodna prawostronna jest ciągła prawostronnie w punkcie  $a$ , zaś pochodna lewostronna – ciągła lewostronnie w punkcie  $b$ .

## 1.2 Pierwsze zastosowania geometryczne i fizyczne pochodnej

**Def.** Przez *normalną* do krzywej  $y = f(x)$  w punkcie  $p = (x, f(x))$  rozumiemy prostą, prostopadłą do stycznej w  $p$  i przechodzącej przez  $p$ .

Tak więc:

- równanie prostej stycznej do krzywej  $y = f(x)$  w punkcie  $p = (x_0, y_0)$ , gdzie  $y_0 = f(x_0)$  jest:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

lub – w postaci być może łatwiejszej do zapamiętania –

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (6)$$

- Dla prostej normalnej mamy: Współczynni kierunkowy tej prostej to  $-\frac{1}{f'(x_0)}$ , co daje równanie prostej

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}x + y_0 + \frac{x_0}{f'(x_0)}$$

lub w równoważnej postaci

$$f'(x_0)(y - y_0) = -(x - x_0). \quad (7)$$

W fizyce, znaczeniem pochodnej jest *prędkość* (zmiany jakiejś wielkości fizycznej w czasie). I tak, prototypem wszelkich takich wielkości jest *droga* (punktu materialnego jako funkcja czasu). Pochodna drogi po czasie – to właśnie prędkość. Analogicznie definiuje się inne rodzaje prędkości. Np. gdy mamy rozpad promieniotwórczy substancji radioaktywnej, to możemy mówić o szybkości rozpadu (prędkości ubytku masy substancji radioaktywnej).

### 1.3 Różniczkowanie funkcji elementarnych

Zauważmy najspierw, że jest prawdziwe

**Tw.** Jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x$ , to jest w tym punkcie ciągła.

**Dow.** Skoro  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x$ , to istnieje i jest skończona granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

tak więc

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = 0,$$

co oznacza, że  $f$  jest ciągła w punkcie  $x$ .

**CBDO**

**Tw.** Pochodna funkcji stałej:  $f(x) = c$  jest równa 0:

$$\frac{dc}{dx} = 0 \quad (8)$$

**Dow.** BOWIEM:  $f(x+h) = c$ ,  $f(x) = c$ , co daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

**CBDO**

**Tw.** Pochodna funkcji identycznościowej  $f(x) = x$  jest równa 1:

$$\frac{dx}{dx} = 1. \quad (9)$$

**Dow.** Mamy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

**Tw.** Mamy następujące wzory dotyczące różniczkowania sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych. Jeśli  $f(x)$ ,  $g(x)$  są różniczkowalne w punkcie  $x$ , to mamy

$$\frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx} \quad \text{lub krócej} \quad \boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}; \quad (10)$$

$$\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + \frac{dg(x)}{dx} \cdot f(x) \quad \text{lub} \quad \boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)} \quad (11)$$

$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) - \frac{dg(x)}{dx} \cdot f(x)}{g^2(x)} \quad \text{lub} \quad \boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}} \quad (12)$$

**Dow.** (10) (dla sumy):

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x); \end{aligned}$$

dla różnicy dowód jest analogiczny.

**Dow.** (11)

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x)) + (f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x). \end{aligned}$$

**Dow.** (12). Pokażemy najspierw:

$$\frac{d\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{dx} = -\frac{1}{f^2(x)} \frac{df(x)}{dx}. \quad (13)$$

Mamy bowiem:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{1}{g(x)}\right)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \\ &= -\frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{1}{g^2(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (14)$$

bo  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ ; i ponadto, ponieważ  $g(x) \neq 0$ , to istnieje takie  $\delta > 0$ , że dla  $|h| < \delta$  zachodzi  $g(x+h) \neq 0$ , tak więc wszystkie wyrażenia w (14) są dobrze określone.

Teraz (12) wynika z (11) oraz (13):

$$\left( f(x) \frac{1}{g(x)} \right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left( -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}. \quad (15)$$

**Wniosek.** Podstawiając we wzorach (10) oraz (11):  $f(x) = c$ , otrzymamy:

$$(f(x) + c)' = f'(x), \quad (16)$$

$$(c \cdot f(x))' = cf'(x). \quad (17)$$

Wzór (16) mówi, że przesunięcie wykresu funkcji  $f(x)$  wzdłuż osi  $0Y$  nie ma wpływu na wartość kąta, tworzonego przez styczną z osiami (RYS.). Wzór natomiast (17) mówi, że

jeżeli przeskalujemy wykres funkcji  $y = f(x)$   $c$  razy, to tyle samo razy zwiększy się tangens kąta nachylenia stycznej.

**Tw.**

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

**Dow.** Dowodzi się indukcyjnie. Dla  $n = 0$  i  $n = 1$  wzór ten jest prawdziwy – p. (8) i (9). Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla  $n - 1$ , i mamy dla  $n$ , z wykorzystaniem (11)

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} = n \cdot x^{n-1}.$$

**CBDO**

**Tw.**  $(x^n)' = nx^{n-1}$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Dow.** Weźmy teraz  $n < 0$ . Mamy, z (14) i (18)

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = -\frac{1}{x^{-2n}}(x^{-n})' = n \cdot x^{-n-1} \cdot \frac{1}{x^{2n}} = n \cdot x^{n-1}.$$

**CBDO**

*Uwaga.* Wzór ten słuszny jest też dla dowolnych wykładników rzeczywistych, co udowodnimy nieco później.

Z pokazanych właśnie faktów wynika od razu

**Tw.** (wzór na pochodną wielomianu).

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

## 1.4 Intermezzo: 2 granice – uzupełnienie

Aby nie rozpraszać się na wątkach pobocznych, policzmy następujące granice teraz.

**Tw.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (19)$$

**Dow.** Mamy, dla  $x > 0$ , następujące nierówności (p. RYS.):

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x;$$

pierwsza nierówność jest równoważna:

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

a druga:

$$\frac{\sin x}{x} > \cos x;$$

razem:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Biorąc granicę  $\lim_{x \rightarrow 0}$  i korzystając z faktu (co był uprzednio pokazany) że  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , otrzymujemy (19).

**Tw.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (20)$$

## 1.5 Granice funkcji elementarnych – cd.

**Tw.**  $(\sin x)' = \cos x$ .

**Dow.**

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x\end{aligned}\quad (21)$$

**Tw.**

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

**Dow.**

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{h} \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\sin x\end{aligned}\quad (22)$$

Po drodze korzystaliśmy z tożsamości:

$$\cos(x+h) - \cos x = -2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\quad (23)$$

Bo: Mamy:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Odejmując stronami, mamy

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Biorąc teraz:  $\alpha - \beta = x$ ;  $\alpha + \beta = x + h$ , mamy, przez dodanie i odjęcie stronami:

$$\alpha = x + \frac{h}{2}, \quad \beta = \frac{h}{2}$$

więc dostajemy (23).

**Tw.**

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Dow.**

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Tw.**  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  i ogólniej  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .

**Dow.**

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right].$$

Podstawmy teraz  $y = \frac{h}{x}$ . Ponieważ  $\lim_{h \rightarrow 0} y = 0$ , to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Mamy:  $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ . Pamiętając, że logarytm jest funkcją ciągłą wszędzie w dziedzinie, a w szczególności dla wartości argumentu równej  $e$ , mamy

$$\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}} = \ln \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \ln e = 1,$$

zatem

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Drugą część twierdzenia otrzymamy z własności logarytmu:

$$(\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

## 1.6 Pochodna funkcji odwrotnej

Niech będzie dana w przedziale  $[a, b]$  funkcja różniczkowalna i różnowartościowa  $y = f(x)$ . Wiadomo, że istnieje wówczas funkcja odwrotna  $f^{-1}$  (którą oznaczymy tu  $g: x = g(y)$ ), ciągła w przedziale  $[f(a), f(b)]$  (lub  $[f(b), f(a)]$  – zależnie od tego, czy  $f$  jest rosnąca czy malejąca). Pokażemy, że w tym przedziale funkcja  $g$  też jest różniczkowalna, a przy okazji wyprowadzimy wzór na pochodną funkcji odwrotnej. Mianowicie mamy

**Tw.** Jeśli  $f(x) = y$  tzn.  $x = g(y)$ , to

$$g'(y) \equiv \frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}. \quad (24)$$

przy założeniu że  $f'(x) \neq 0$ .

**Dow.** Przy zadanym  $x$  weźmy  $k = f(x+h) - f(x)$ . Mamy więc  $f(x+h) = y+k$ , tzn.  $x+h = g(y+k)$ , skąd  $h = g(y+k) - g(y)$ . Możemy więc traktować  $h$  jako funkcję  $k$ . Ze względu na ciągłość funkcji  $g$ , mamy  $\lim_{k \rightarrow 0} h(k) = 0$ , a ponadto dla  $k \neq 0$  mamy  $h \neq 0$ , ponieważ funkcja  $g$  jest różnowartościowa. Mamy więc:

$$g'(y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x+h) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Przy drugiej równości powyżej korzystaliśmy z faktu, iż dla funkcji ciągłych  $F(x)$ ,  $G(y)$  mamy: Jeśli  $y_0 = F(x_0)$ , to  $\lim_{x \rightarrow x_0} G(F(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} G(y)$ .

**CBDO**

*Uwaga.* Twierdzenie powyższe ma ilustrację/interpretację geometryczną. Rozpatrzmy krzywą daną równaniem  $y = f(x)$ . Poprowadźmy w jakimś punkcie  $(x_0, y_0)$  (tu  $y_0 = f(x_0)$ ) styczną do tej krzywej iznaczmy przez  $\alpha$  kąt utworzony przez styczną z osią  $OX$ , a przez  $\beta$  – kąt utworzony przez styczną z osią  $OY$ . Oczywiście  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ . Wówczas  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$  czyli  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  – zgodnie z wzorem (24).

Za pomocą powyższego twierdzenia policzymy pochodne kolejnych funkcji elementarnych.

**Tw.**  $(e^x)' = e^x$  i, ogólniej,  $(a^x)' = a^x \ln a$ .

**Dow.** Weźmy  $y = f(x) = e^x$ ; wtedy  $x = f^{-1}(y) \equiv g(y) = \ln y$ . Mamy:  $g'(y) = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{f'(x)}$ , a ostatnia równość to właśnie  $f'(x) = (e^x)' = e^x$ .

W ogólniejszym przypadku  $(a^x)'$ , bierzemy  $y = f(x) = a^x$ , a dla funkcji odwrotnej  $x = g(y) = \log_a y$ . Pamiętajmy, że  $g'(y) = \frac{1}{y \ln a} = \frac{1}{f'(x)} \implies f'(x) = a^x \ln a$ .

CBDO

**Tw.** a)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , b)  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Dow.** a) Weźmy  $y = f(x) = \arcsin x$  i wtedy  $x = g(y) = \sin y$ . Mamy:  $g'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{f'(x)}$ , (znak pierwiastka to plus, bo  $x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ ), a ostatnia równość to  $f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

b) Rozważania są analogiczne:  $y = f(x) = \arccos x$ ,  $x = g(y) = \cos y$ ; jedyna różnica jest w znaku, bo  $g'(y) = -\sin y$  i dalej jak w a), z wynikiem końcowym  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

CBDO

**Tw.**  $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Dow.** Dla  $y = f(x) = \arctg x$  jest  $x = g(y) = \operatorname{tg} y$ ,  $g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$ ; stąd  $f'(x) = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+(\operatorname{tg}(\arctg(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}$ .

## 1.7 Ekstrema funkcji. Twierdzenie Rolle'a

**Def.** Niech funkcja  $f$  będzie określona w otoczeniu punktu  $a$  (tzn. w jakimś przedziale otwartym, zawierającym  $a$ ). Jeśli istnieje takie  $\delta > 0$ , że

$$\forall_{h:|h|<\delta} : f(a+h) \leq f(a), \quad (25)$$

to mówimy, że funkcja  $f(x)$  ma *maksimum* w punkcie  $a$ .

Jeśli zaś przy analogicznych założeniach mamy nierówność:

$$f(a+h) \geq f(a), \quad (26)$$

to mówimy, że funkcja  $f(x)$  ma *minimum* w punkcie  $a$ .

Innymi słowy, w punkcie  $a$  występuje maksimum (minimum), jeśli istnieje takie otoczenie  $\mathcal{U}$  punktu  $a$ , że  $f(a)$  jest największą (najmniejszą) liczbą w zbiorze wartości, jakie funkcja  $f$  przyjmuje na  $\mathcal{U}$ .

Jeśli we wzorach (25) i (26) zastąpić znaki  $\geq$  ( $\leq$ ) przez  $>$  ( $<$ ), to mamy do czynienia z maksimum (minimum) *właściwym*.

**Def.** Maksima i minima obejmujemy wspólną nazwą *ekstremów* funkcji  $f$ .

*Przykł.*

1. Funkcja  $x^2$  posiada minimum w punkcie  $x = 0$ ;
2. funkcja  $\cos x$  posiada maksima w punktach  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  oraz minima w punktach  $(2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
3. funkcja  $|x|$  posiada minimum w  $x = 0$ .

Z pojęciem ekstremum ściśle jest związane (ale różne) pojęcie *kresów wartości funkcji na zbiorze*. Ekstrema są pojęciami *lokalnymi*: Aby stwierdzić, czy funkcja posiada ekstremum w danym punkcie  $a$ , wystarczy znać wartości funkcji *w dowolnie małym otoczeniu* punktu  $a$ . Natomiast wyznaczenie kresów zbioru wartości funkcji na zbiorze  $X$  wymaga znajomości funkcji na *całym*  $X$ .

Z definicji maksimum wynika natychmiast



**Tw.** Jeśli funkcja  $f$  określona w przedziale  $[a, b]$  osiąga kres górny w punkcie  $c$  należącym do wnętrza tego przedziału (tzn.  $a < c < b$ ), to funkcja posiada maksimum w  $c$ . (analogicznie dla kresu dolnego i minimum).

**CBDO**

Jeśli okaże się, że kres górny funkcji jest osiągany w jednym z końców przedziału  $[a, b]$  (np. w  $a$ ), to *nie mówimy*, iż w tym punkcie funkcja posiada maksimum, ponieważ funkcja nie jest określona w otoczeniu  $a$ . Np. funkcja  $y = x$  na zbiorze  $X = [0, 1]$  posiada kres górny równy 1; nie nazywamy go jednak maksimum.

**Tw.** . Jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $c$  i posiada w tym punkcie ekstremum, to  $f'(c) = 0$ .

**Dow.** Załóżmy, że  $f$  posiada w punkcie  $c$  maksimum (jeśli minimum, to rozumowanie jest analogiczne). Weźmy więc takie  $\delta > 0$ , aby dla dowolnego  $h$  takiego, że  $|h| < \delta$ , zachodziła nierówność  $f(c+h) - f(c) \leq 0$ . Dzieląc przez  $h$ , otrzymujemy

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{dla } h > 0, \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{dla } h < 0.$$

Ponieważ z założenia istnieje pochodna  $f'(c)$ , to

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c).$$

Z poprzednich nierówności wynika jednak, że  $f'_+(c) \leq 0 \leq f'_-(c)$ . Musi więc być

$$f'_+(c) = 0 = f'_-(c), \quad \text{co znaczy, że } f'(c) = 0.$$

**CBDO**

*Uwaga.* Twierdzenie odwrotne *nie zachodzi*: Równość  $f'(c) = 0$  może być spełniona, mimo iż funkcja  $f$  nie posiada ekstremum w  $c$ . Jest tak np. dla funkcji  $f(x) = x^3$  w punkcie  $x = 0$ .

**Def.** Jeśli funkcja jest różniczkowalna w  $x = a$  i  $f'(a) = 0$ , to punkt  $x = a$  nazywamy *punktem krytycznym* funkcji  $f$ .

*Uwaga.* Istnienie ekstremum funkcji różniczkowalnej w punkcie  $c$  oznacza, że styczna do krzywej  $y = f(x)$  w punkcie  $(c, f(c))$  jest równoległa do osi  $OX$  (z możliwością, że się z tą osią pokrywa).

**Tw.** (Rolle'a). Niech funkcja  $f$  będzie ciągła w przedziale domkniętym  $[a, b]$  i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeśli  $f(a) = f(b)$ , to istnieje takie  $c$ , że  $a < c < b$  oraz  $f'(c) = 0$ .

**Dow.** Jeśli funkcja  $f$  jest stała, to  $\forall_{x \in [a, b]} f'(x) = 0$ . Można wtedy wziąć dowolny  $x \in ]a, b[$  i teza tw. Rolle'a będzie spełniona.

Założmy więc, że funkcja  $f$  nie jest stała; np. niech przyjmuje wartości większe od  $f(a)$ . Oznaczając przez  $M$  kres górny zbioru wartości funkcji na przedziale  $[a, b]$ , mamy:  $M > f(a)$ . Zatem, z tw. Weierstrassa, istnieje takie  $c \in [a, b]$ , że  $f(c) = M$ . Przy tym  $a \neq c \neq b$ , ponieważ z założenia  $f(a) = f(b)$ ; zatem  $a < c < b$ . To znaczy, że funkcja  $f$  osiąga kres górny w punkcie  $c$  położonym wewnątrz przedziału  $[a, b]$ . Zgodnie z twierdzeniem niedawno udowodnionym funkcja  $f$  posiada w punkcie  $c$  *maksimum*, co z kolei implikuje (pamiętając o różniczkowalności  $f$  wewnątrz przedziału), że  $f'(c) = 0$ .

**CBDO**

**Rys. – ilustracja tw. Rolle'a.**

*Uwaga.* Twierdzenie Rolle'a można tak sformułować: Jeśli  $f(x) = f(x+h)$ , to istnieje takie  $\theta : 0 < \theta < 1$ , że

$$f'(x + \theta h) = 0. \tag{27}$$

przy tych samych założeniach, tzn. funkcja  $f$  ma być różniczkowalna wewnątrz przedziału  $[x, x+h]$  (lub  $[x+h, x]$ , jeśli  $h < 0$ ; nie zakładamy tu, że  $h > 0$  lecz jedynie że  $h \neq 0$ ) i ciągła w  $x$  oraz  $x+h$ .

## 1.8 Twierdzenie Lagrange'a i Cauchy'ego

**Tw.** (Lagrange'a). Załóżmy (podobnie jak w tw. Rolle'a), że funkcja  $f$  jest ciągła w przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Zachodzi wówczas wzór

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \theta h), \quad (28)$$

gdzie  $h = b - a$  oraz  $\theta \in ]0, 1[$ .

*Uwaga.* Wzór ten nazywany jest też wzorem Lagrange'a na wartość średnią, lub twierdzeniem o przyrostach skończonych.

**Rys. – ilustracja tw. Lagrange'a.**

Widać, że szczególnym przypadkiem (gdy  $f(a) = f(b)$ ) jest tw. Rolle'a. Okazuje się, że dowód tw. Lagrange'a można sprowadzić do tw. Rolle'a.

**Dow.** Weźmy mianowicie funkcję

$$g(x) = f(a) - f(x) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (29)$$

i ponadto  $g(x)$  jest ciągła na  $[a, b]$  i różniczkowalna w  $]a, b[$ ; jej pochodna jest

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ponadto  $g(b) = 0 = g(a)$ , zatem  $g(x)$  spełnia założenia tw. Rolle'a. Skoro tak, to pochodna  $g'(x)$  znika w pewnym punkcie między  $a$  i  $b$ . Możemy to wypowiedzieć tak, że istnieje takie  $\theta : 0 < \theta < 1$ , że

$$g'(a + \theta h) = 0 \quad \text{tzn.} \quad 0 = -f'(a + \theta h) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

czyli zachodzi wzór z tezy tw. Lagrange'a.

**CBDO**

*Uwaga.* W sposób podobny, jak wzór (27) przy tw. Rolle'a, można tezę tw. Lagrange'a sformułować jako:

Dla funkcji  $f$  różniczkowalnej wewnątrz przedziału  $[x, x+h]$  i ciągłej na  $[x, x+h]$  (to dla  $h > 0$ ; dla  $h < 0$  jest to przedział  $[x+h, x]$ ) istnieje takie  $\theta : 0 < \theta < 1$ , że

$$f(x+h) = f(x) + f'(x + \theta h) \cdot h. \quad (30)$$

Z tw. Lagrange'a wypływają dwa wnioski, bardzo ważne dla rachunku całkowego:

**Tw.** Jeśli  $\forall x \in ]a, b[$  zachodzi  $f'(x) = 0$ , to funkcja w tym przedziale jest stała.

**Dow.** Na mocy udowodnionego dopiero co wzoru (30), mamy bowiem dla każdego  $x$  i  $h$ :  $f(x) = f(x+h)$ , co oznacza, że  $f(x) = \text{const}$ .

**CBDO**

**Tw.** Jeśli  $\forall x \in ]a, b[$  zachodzi  $f'(x) = g'(x)$ , to  $f(x) = g(x) + \text{const}$ .

**Dow.** Mamy:  $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$ , czyli funkcja  $f(x) - g(x)$  ma pochodną równą zeru. Na mocy dopiero co udowodnionego twierdzenia znaczy to, że  $f(x) - g(x)$  jest stała, tzn.  $f(x) = g(x) + \text{const}$ .

**CBDO**

**Tw.** (Cauchy'ego; czasem z przydomkiem: O wartości średniej). Jeśli funkcje  $f$  i  $g$  są ciągłe na przedziale  $[a, b]$  i różniczkowalne wewnątrz oraz jeśli  $\forall x \in ]a, b[$  jest  $g'(x) \neq 0$ , to istnieje takie  $\theta \in ]0, 1[$ , że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{g'(a + \theta h)}, \quad (31)$$

gdzie  $h = b - a$ .

Przed dowodem

*Uwaga.* Twierdzenie Lagrange'a otrzymuje się z tw. Cauchy'ego, jeśli podstawić  $g(x) = x$ . Okazuje się, że także tw. Cauchy'ego wynika z tw. Lagrange'a, ale tu trzeba zaargumentować następująco:

**Dow.** Weźmy funkcję

$$G(x) = f(a) - f(x) + (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(mianownik  $g(b) - g(a)$  jest różny od zera ze względu na założenie, że wszędzie w przedziale  $]a, b[$  mamy  $g'(x) \neq 0$  i tw. Rolle'a).

Funkcja  $G(x)$  spełnia założenia tw. Rolle'a: Jest różniczkowalna i ciągła jak trzeba, oraz  $G(a) = 0 = G(b)$ . Pochodna funkcji  $G(x)$  jest

$$G'(x) = -f'(x) + g'(x) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}; \quad (32)$$

zatem (z tw. Rolle'a) istnieje takie  $\theta \in ]a, b[$ , że  $G'(a + \theta h) = 0$ . Podstawiając  $x = a + \theta h$  we wzorze (32), otrzymujemy (31).

Analogicznie do sposobu, w jaki tw. Rolle'a i Lagrange'a były wyrażane wzorami (27) i (30), można tw. Cauchy'ego sformułować tak: Istnieje  $\theta \in ]0, 1[$  takie, że

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)}. \quad (33)$$

*Uwaga:* W powyższym wzorze  $\theta$  jest TO SAMO w liczniku i mianowniku.

## 1.9 Różniczkowanie funkcji złożonych

Niech  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$ , przy tym funkcja  $g$  jest określona na zbiorze wartości funkcji  $f$ ; ponadto niech  $f$  i  $g$  będą różniczkowalne, a pochodna  $g'$  niech będzie ciągła. Następujący wzór wyraża pochodną funkcji złożonej  $g(f(x))$  przez pochodne  $f'$  i  $g'$ .

**Tw.**

$$(g(f(x)))' = f'(x) \cdot g'(f(x)), \quad \text{tzn.} \quad \frac{d(g(f(x)))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \left[ \frac{dg(y)}{dy} \right]_{y=f(x)}. \quad (34)$$

**Dow.** Przy danych  $x$  i  $h \neq 0$  weźmy  $k = f(x+h) - f(x)$ , tzn.  $f(x+h) = y+k$ .

Zastosujmy teraz wzór Lagrange'a na wartość średnią w wersji (30) do funkcji  $g$ ; otrzymamy

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(y+k) - g(y)}{h} = g'(y+\theta k) \cdot \frac{k}{h} = g'(y+\theta k) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

dla pewnego  $\theta \in ]0, 1[$  (pamiętajmy, że  $\theta$  jest pewną funkcją  $h$ ). Co stanie się z powyższym wyrażeniem, gdy weźmiemy jego granicę przy  $h \rightarrow 0$ ? Otóż ze względu na ciągłość funkcji  $g$ , mamy  $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ , a ponieważ  $0 < \theta < 1$ , to również  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta k = 0$ . Skoro tak, to  $\lim_{h \rightarrow 0} (y + \theta k) = y$ , co – w połączeniu z ciągłością funkcji  $g'$  – daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} g'(y + \theta k) = g'(y) = g'(f(x)).$$

Mamy więc:

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g'(y+\theta k) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

*Przykł.*  $(\sin^2 x)'$  na dwa sposoby

*Przykł.*  $(e^{\sin x})' = \dots$

*Przykł.* Udowodnimy teraz anonsowany wcześniej wzór

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}.$$

**Dow.** Napiszmy  $x^a$  w postaci:  $x^a = e^{a \ln x}$  i ze wzoru na pochodną funkcji złożonej

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = \frac{de^{a \ln x}}{dx} = \frac{da \ln x}{dx} \cdot \frac{de^y}{dy} \Big|_{y=a \ln x} = a \frac{1}{x} e^y \Big|_{y=a \ln x} = ax^{-1} x^a = ax^{a-1}$$

**CBDO**

Niejednokrotnie trzeba kilkakrotnie zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej. Mamy np. pochodną funkcji trzykrotnie złożonej:

$$h(g(f(x)))' = f'(x) \cdot g'(f(x)) \cdot h'(g(f(x)))$$

*Sztuczka mnemotechniczna:* Wzór powyższy można zapamiętać np. w następujący sposób: Oznaczmy:  $y = f(x)$ ,  $z = g(y)$ ,  $w = h(z)$ , oraz  $W(x) = h(g(f(x)))$ . Można wtedy napisać

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

pamiętając, w jakich punktach są liczone wszystkie pochodne.

W powyższym wzorze pochodne zachowują się jak *ułamki*. Ale UWAGA! Jest to zbieżność przypadkowa; inne pochodne (zwł. cząstkowe) już się tak nie zachowują!

*Uwaga* – wzór na pochodną funkcji odwrotnej z wzoru na pochodną funkcji złożonej

## 1.10 Związek między znakiem pochodnej a monotonicznością funkcji

Z tw. Lagrange'a wynika następujący związek pomiędzy znakiem pochodnej a tym, czy funkcja rośnie, czy maleje.

**Tw. \*** Jeśli  $\forall_{x \in [a, b]}$  zachodzi nierówność  $f'(x) > 0$ , to funkcja  $f$  jest w tym przedziale ściśle rosnąca. Jeśli mamy  $f'(x) < 0$ , to funkcja  $f$  jest ściśle malejąca.

**Dow.** Z wzoru (30) mamy, dla  $h > 0$ :  $f(x+h) > f(x)$  jeśli w przedziale  $[x, x+h]$  pochodna jest stale dodatnia, bądź  $f(x+h) < f(x)$ , jeśli pochodna jest stale ujemna. Czyli funkcja jest ściśle rosnąca w pierwszym przypadku, a ściśle malejąca w drugim.

**CBDO**

*Uwaga.* Jeśli założyć, że zachodzi nierówność nieostra  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ), to w tezie mamy, że funkcja jest rosnąca (malejąca).

Zachodzi również twierdzenie odwrotne do powyższego:

**Tw.** Jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $c$  i rośnie (maleje) w jakimś przedziale  $]a, b[$  zawierającym ten punkt, to  $f'(c) \geq 0$  (odpowiednio  $f'(c) \leq 0$ ).

**Dow.** Jeśli  $f$  rośnie, to dla  $h > 0$  mamy

$$f(c+h) - f(c) \geq 0 \implies \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

i przechodząc do granicy  $\lim_{h \rightarrow 0}$  otrzymujemy  $f'(c) \geq 0$ .

Jeśli funkcja  $f$  maleje, to rozumowanie jest analogiczne.

**CBDO**

Z tw. \* wynika

**Tw.** Jeśli  $f'(c) > 0$  i pochodna  $f'(x)$  jest ciągła w punkcie  $c$ , to funkcja  $f$  jest ściśle rosnąca w pewnym otoczeniu punktu  $c$ .

Analogicznie: Jeśli  $f'(c) < 0$  i pochodna  $f'(x)$  jest ciągła w punkcie  $c$ , to funkcja  $f$  jest ściśle malejąca w pewnym otoczeniu punktu  $c$ .

**Dow.** Ponieważ funkcja  $f'(x)$  jest ciągła w  $c$ , to nierówność  $f'(c) > 0$  mówi, że w pewnym otoczeniu punktu  $c$  funkcja  $f'(x)$  jest dodatnia:  $\exists_{\delta > 0} : \forall_{h < \delta} : f'(c+h) > 0$ . Znaczący to, że pochodna  $f'$  jest dodatnia  $\forall_x : c-h < x < c+h$ . Na mocy Tw. \*, funkcja  $f$  jest rosnąca w tym przedziale.

**CBDO**

*Uwaga.* Powyższe twierdzenie można przeformułować w następujący sposób:

i) Jeśli  $f'(c) \neq 0$ , to (przy założeniu ciągłości pochodnej) funkcja  $f$  jest różnowartościowa w pewnym otoczeniu punktu  $c$ , tzn. dla  $]c-\delta, c+\delta[$  ( $\delta > 0$ ). Skoro tak, to funkcja  $f$  posiada w tym przedziale funkcję odwrotną  $x = g(y)$ , czyli równanie:  $y = f(x)$  posiada w tym przedziale dokładnie jedno rozwiązanie..

ii) Jak wiemy, pochodna tejże funkcji odwrotnej  $g'(y)$  jest odwrotnością pochodnej funkcji  $f'(x)$ .

iii) Powyższe fakty: Przy założeniu  $f'(c) \neq 0$  istnieje w otoczeniu punktu  $f(c)$  funkcja odwrotna, lub że równanie:  $y = f(x)$  ma dokładnie jedno rozwiązanie o otoczeniu punktu  $c$  – przenoszą się na wyższe wymiary, tzn. zachodzą dla odwzorowań  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Oczywiście konieczne jest stosowne uogólnienie pojęć. Będzie o tym mowa w semestrze II.

## 1.11 Wyrażenia nieoznaczone i reguła de l'Hospitala

Często zdarza się konieczność obliczania granic postaci następującej:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{gdzie } f(a) = 0 = g(a). \quad (35)$$

Wyrażenia tego rodzaju noszą nazwę *wyrażień nieoznaczonych typu  $\frac{0}{0}$* .

**Tw.** Jeśli funkcje  $f$  i  $g$  są ciągłe w przedziale domkniętym  $[a, b]$  i są różniczkowalne wewnątrz tego przedziału i jeśli  $f(a) = 0 = g(a)$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (36)$$

przy założeniu, że ta ostatnia granica istnieje.

**Dow.** Kluczem do dowodu jest twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej (2 strony wcześniej).

Oznaczmy:  $x = a + h$ . Należy dowieść, że

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h)}{g(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f'(x+h)}{g'(x+h)}. \quad (37)$$

Ale: Równości:  $f(a) = 0 = g(a)$  i wzór Cauchy'ego (31) dają:

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

dla pewnego  $\theta \in ]0, 1[$ .

Oznaczmy  $F(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Z założenia  $\lim_{h \rightarrow 0+} F(a+h)$  istnieje. Ponieważ zaś  $\lim_{h \rightarrow 0+} h = 0$ , to też  $\lim_{\theta h \rightarrow 0+} \theta h = 0$  i, co za tym idzie,  $\lim_{h \rightarrow 0+} F(a+\theta h)$  też istnieje i jest równe  $\lim_{h \rightarrow 0+} F(a+h)$ ; mamy więc

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f'(x+h)}{g'(x+h)}$$

skąd otrzymujemy wzór (36).

**CBDO**

Analogiczne twierdzenie mamy w przypadku granicy lewostronnej.

W przypadku, gdy pochodne  $f'$  i  $g'$  są ciągłe w punkcie  $a$ , a ponadto  $g'(a) \neq 0$ , ze wzoru (36) (plus jego odpowiednika dla granicy lewostronnej) natychmiast wynika *wzór de l'Hospitala*:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (38)$$

*Uwaga:* Po prawej stronie powyższego wzoru nie ma granicy!

Analogiczne wzory mamy w przypadku granic jednostronnych i pochodnych jednostronnych.

*Przykł.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

*Uwaga.* Jeśli zdarzy się, że po prawej stronie wyrażenia (38) mamy  $f'(a) = g'(a) = 0$ , to tegoż wzoru *nie daje* się stosować. Ale można postępować rekurencyjnie! tzn. badać wyższe pochodne.

*Uwaga.* Powyższe twierdzenia dotyczyły wyrażeń typu  $\frac{0}{0}$ . Przez sztuczki z zamianą zmiennych i inne, można też liczyć inne wyrażenia nieoznaczone:  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  $\infty - \infty$ ;  $1^\infty$ ;  $0^0$ ;  $\infty^0$ .

**NA ĆWICZENIA: Powyższe typy granic z wyprowadzeniami i przykładami; oraz asymptoty funkcji.**